Π.Θ. ΤΜΗΥ | ΗΥ241: ΣΗΜΑΤΑ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΛΥΣΕΙΣ 2ΟΥ ΣΕΤ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΕΞ: 2014-15 ΕΑΡΙΝΟ

ΑΣΚ. 2.1

(a) $\mathrm{DTFT}\left\{\frac{1}{\pi n^2}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right\}$

- Η άσκηση λύνεται παρόμοια με το παράδειγμα (5.15) του βιβλίου.
- Έχουμε λοιπόν: $x[n] = \pi \cdot \frac{\sin(\pi n/2)}{\pi n} \cdot \frac{\sin(\pi n/4)}{\pi n}$

$$\Rightarrow X(e^{j\omega}) = \underbrace{\mathrm{DTFT}\left\{\frac{1}{2}\,\frac{\sin(\pi n/2)}{\pi n}\right\}}_{X_1(e^{j\omega})} \circledast \underbrace{\mathrm{DTFT}\left\{\frac{\sin(\pi n/4)}{\pi n}\right\}}_{X_2(e^{j\omega})}$$

$\circledast$ → ΠΕΡΙΟΔΙΚΗ ΣΥΝΕΛΙΞΗ

όπου:

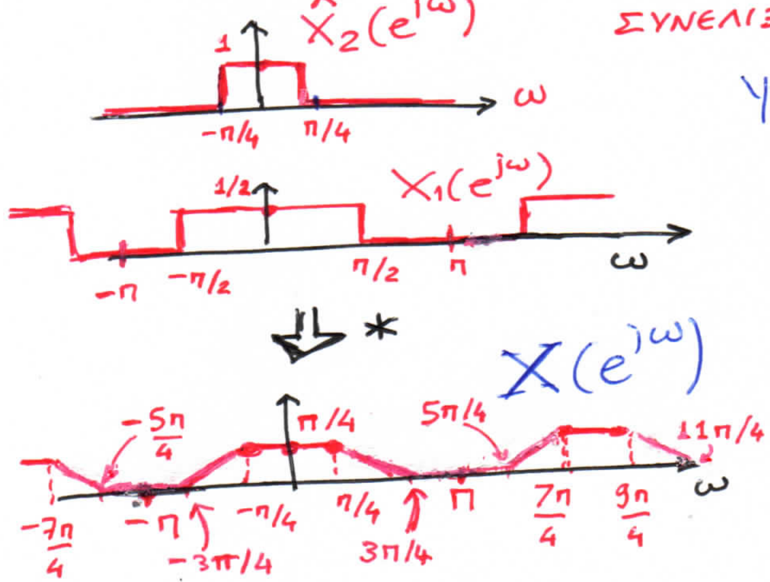
$$X_1(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1/2, & |\omega| \le \pi/2 \\ 0, & \frac{\pi}{2} < |\omega| \le \pi \end{cases} \qquad X_2(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \le \pi/4 \\ 0, & \frac{\pi}{4} < |\omega| \le \pi \end{cases}$$

ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ ΜΕ ΠΕΡΙΟΔΟ 2π
ΦΑΣΜΑΤΑ εκφρασμένα στο διάστημα $[-\pi, \pi]$

Έστω $\hat{X}_2(e^{j\omega})$ το εντός $[-\pi, \pi]$, τότε:

$$X(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega}) \circledast X_2(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega}) * \hat{X}_2(e^{j\omega})$$

$\circledast$: ΠΕΡΙΟΔΙΚΗ ΣΥΝΕΛΙΞΗ — $*$: ΚΛΑΣΙΚΗ ΣΥΝΕΛΙΞΗ



Υπολογίζουμε την συνέλιξη, και έχουμε:

$$\boxed{X(e^{j\omega}) = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & |\omega| \le \pi/4 \\ \frac{\frac{3\pi}{4} - |\omega|}{2}, & \frac{\pi}{4} < |\omega| \le \frac{3\pi}{4} \end{cases}}$$

εντός $[-\pi, \pi]$ επαναλαμβανόμενο εκτός, με περίοδο 2π

$$\boxed{\text{(b)} \quad \text{DTFT}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|} u[-n-2]\right\}}$$

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|} u[-n-2] = \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u[-n-2] =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u[-n] - \delta[n] - \frac{1}{2}\delta[n+1]$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u[-n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j(-\omega)}} \qquad \delta[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} 1 \qquad \frac{1}{2}\delta[n+1] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \frac{1}{2}e^{j\omega}$$

Άρα: $$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{j\omega}} - \left(1+\frac{1}{2}e^{j\omega}\right) =$$

$$= \frac{1-\left(1+\frac{1}{2}e^{j\omega}\right)\left(1-\frac{1}{2}e^{j\omega}\right)}{1-\frac{1}{2}e^{j\omega}} = \boxed{\frac{1}{4}\,\frac{e^{2j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{j\omega}}}$$

$$(c) \quad IDTFT\left\{ \frac{\sin(5\omega/2)\cos(\pi/2 - 3\omega/2)}{\sin^2(\omega/2)} \right\}$$

• Παρατηρούμε ότι: $X(e^{j\omega}) = \dfrac{\sin\left(\frac{5\omega}{2}\right)\sin\left(\frac{3\omega}{2}\right)}{\sin^2(\omega/2)} =$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$

$$= \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{5\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}}_{X_1(e^{j\omega})} \cdot \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{3\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}}_{X_2(e^{j\omega})} \Longrightarrow x[n] = x_1[n] * x_2[n],$$

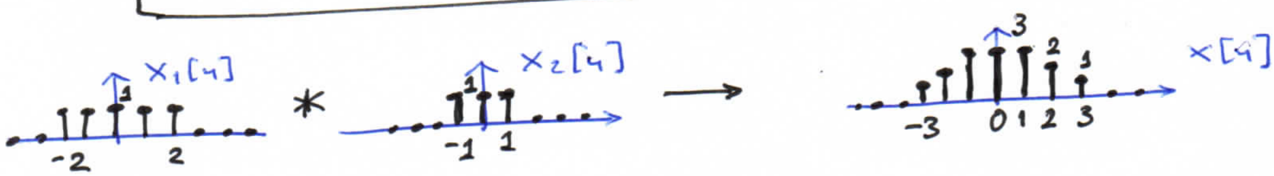
ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ

όπου: $x_1[n] = \begin{cases} 1, & \text{για } |n| \leq 2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \qquad x_2[n] = \begin{cases} 1, & \text{για } |n| \leq 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

• Η συνέλιξη μπορεί να βρεθεί με διάφορους τρόπους, ένας εκ των οποίων είναι ο Μ/Σ Z:

$$x[n] = Z^{-1}\left\{ (z^{+2} + z^{+1} + 1 + z^{-1} + z^{-2})(z^{+1} + 1 + z^{-1}) \right\} =$$

$$\boxed{= \delta[n+3] + 2\delta[n+2] + 3\delta[n+1] + 3\delta[n] + 3\delta[n-1] + 2\delta[n-2] + \delta[n-3]}$$



Ασκ. 2.2.

(a) $y(t) = x_1(t)\, x_2(t) + 25\, x_1(t) * x_2(t/4) \rightsquigarrow T_s = ?$

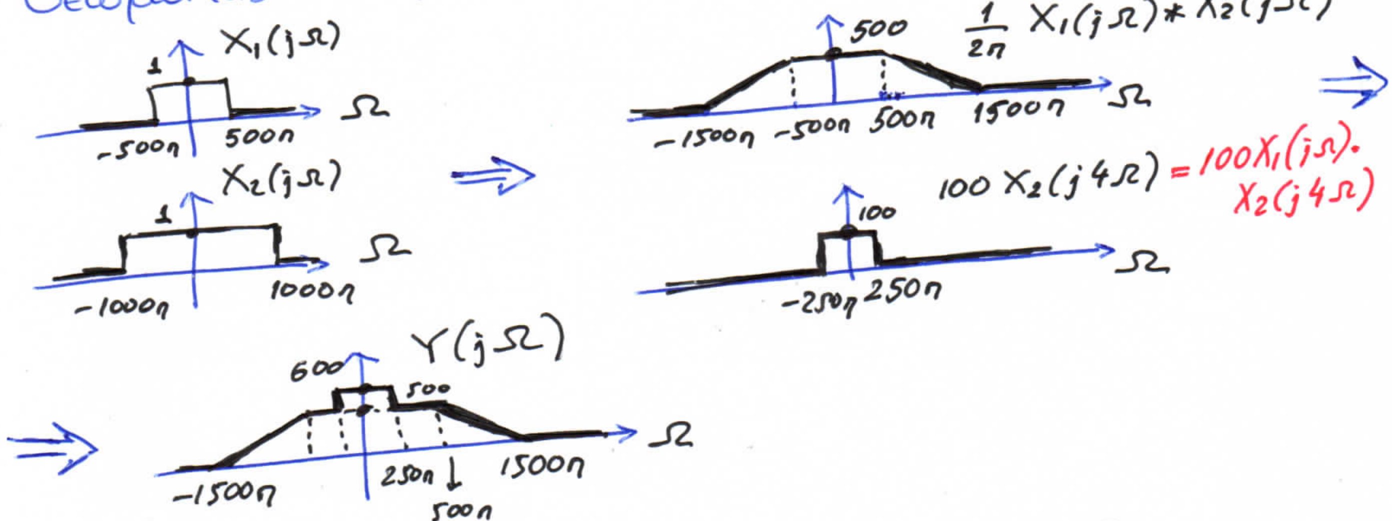
$X_1(j\Omega) = 0 \ \forall\, |\Omega| > 500\pi$, $X_2(j\Omega) = 0 \ \forall\, |\Omega| > 1000\pi$

• Από τις ιδιότητες* Μ/Σ Fourier, έχουμε:

* ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑ, ΓΙΝΟΜΕΝΟ, ΣΥΝΕΛΙΞΗ, ΧΡΟΝ. ΚΛΙΜΑΚΩΣΗ

$$Y(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} X_1(j\Omega) * X_2(j\Omega) + 100\, X_1(j\Omega)\, X_2(4j\Omega)$$

• Θεωρώντας αυθαίρετα τα απλά φάσματα παρακάτω για τα $X_1(j\Omega), X_2(j\Omega)$

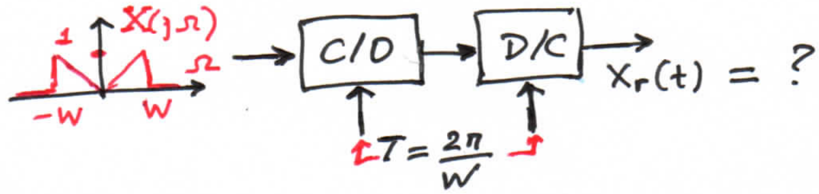


• Άρα η μέγιστη συχνότητα του $Y(j\Omega)$ είναι 1500π (από Θ. Shannon)

και συνεπώς $\Omega_{s,min} = 3000\pi$

άρα $T_{s,max} = \dfrac{2\pi}{\Omega_{s,min}} = \dfrac{1}{1500} = 0.000667\,sec$

(β)

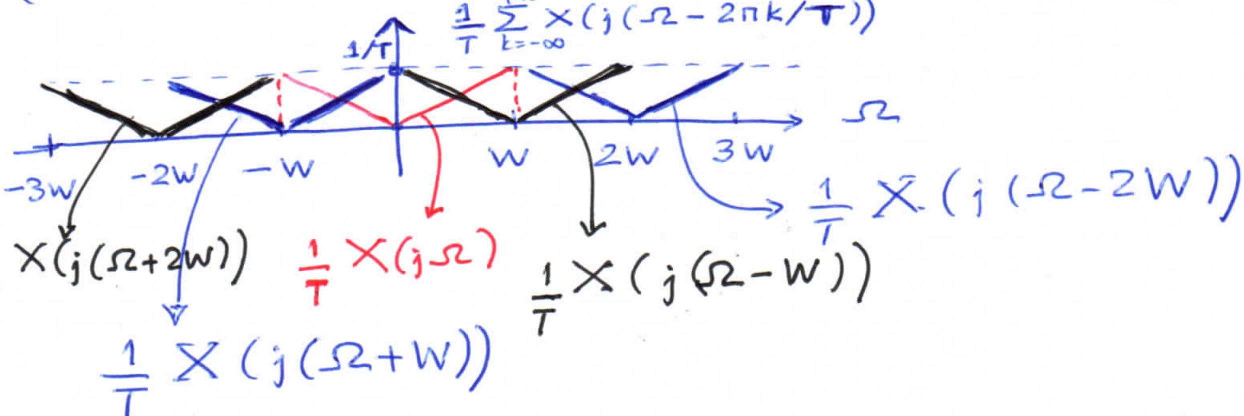


- Παρατηρούμε οτι $T_{s,max} = \frac{2\pi}{2W} = \frac{\pi}{W}$ σύμφωνα με το Θ. Shannon,

άρα καθώς $T > T_{s,max}$ θα έχουμε φαινόμενο αναδίπλωσης.

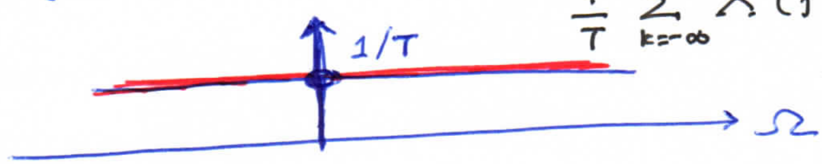
- Κατα συνέπεια, το φάσμα που προκύπτει από την δειγματοληψία (στον συνεχή χρόνο) θα έχει την κάτωθι μορφή:

$$\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(j(\Omega - 2\pi k/T))$$

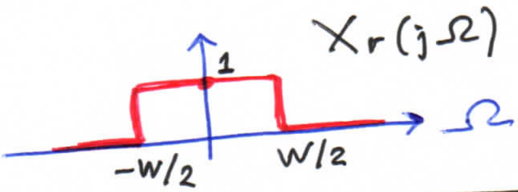


- Αθροίζοντας τις επιμέρους γραφικές, έχουμε:

$$\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(j\left(\Omega - k\underbrace{\frac{2\pi}{T}}_{W}\right)\right)$$



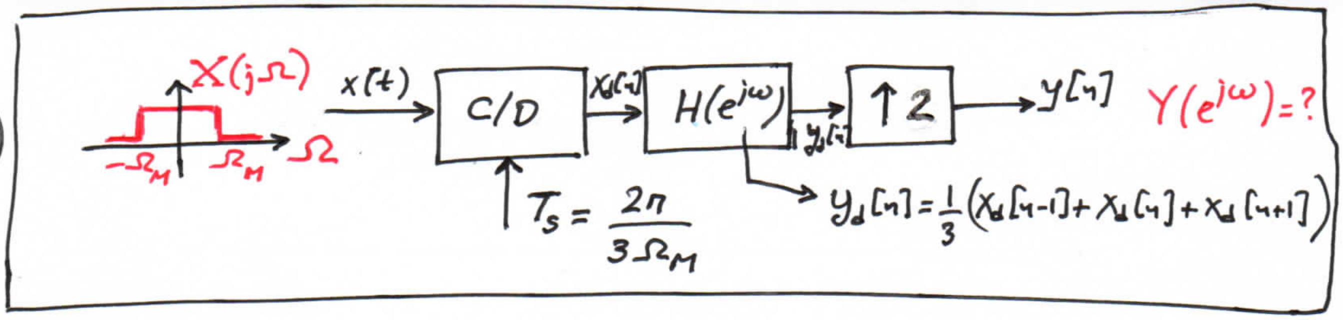
- Μετά το κατωπερατό φίλτρο με κέρδος T & συχν. αποκοπής $\underbrace{\frac{\Omega_s}{2}}_{W/2}$



- Κατα συνέπεια,

$$\boxed{x_r(t) = \frac{\sin\left(\frac{W}{2}t\right)}{\pi t}}$$

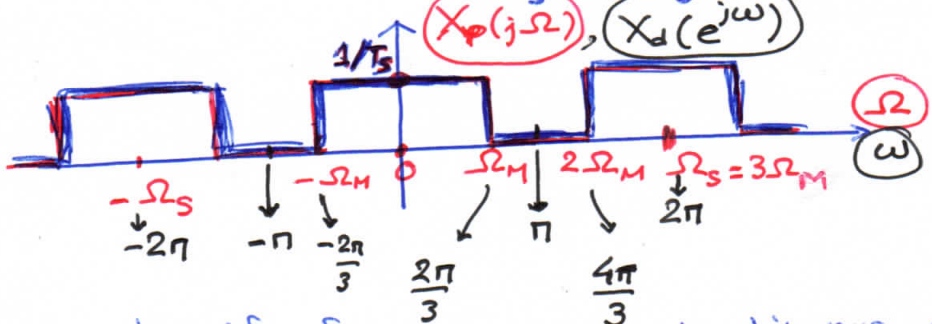
(C)



- Παρατηρούμε πως $\Omega_s > 2\Omega_M$, άρα δεν υπάρχει αναδίπλωση

- Έχουμε $X_p(j\Omega) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(j(\Omega - k\Omega_s))$, $\Omega_s \to 3\Omega_M = \frac{2\pi}{T_s}$

  και $X_d(e^{j\omega}) = X_p\left(j\frac{\omega}{T_s}\right) = \frac{1}{T_s} X\left(j\left(\frac{\omega - 2\pi k}{T_s}\right)\right)$ [1]

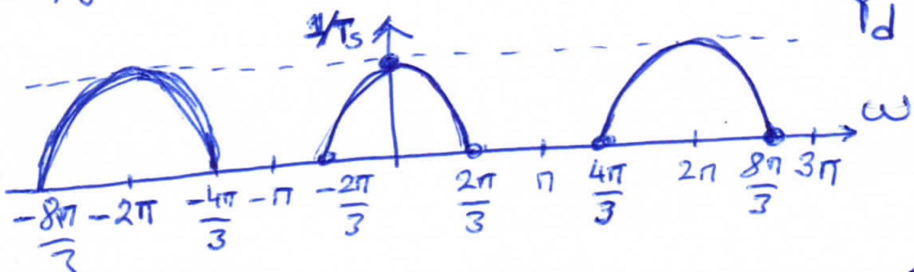


(ουσιαστικά το ίδιο διάγραμμα, με αλλαγή κλίμακας $\Omega_s \leftrightarrow 2\pi$).

- Για το $H(e^{j\omega})$ παρατηρούμε ότι η εξίσωση διαφορών δίνει

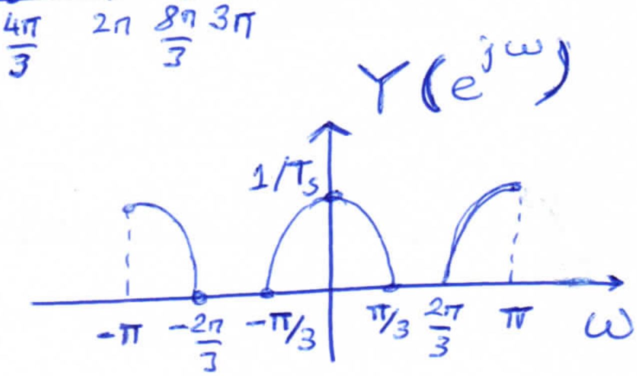
$$H(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega} + 1 + e^{j\omega}}{3} = \frac{1}{3}(1 + 2\cos\omega) \quad [2]$$

- Πολ/ζοντας τις [1] & [2] παίρνουμε την παρακάτω γραφική:



- Τέλος, $Y(e^{j\omega}) = Y_d(e^{2j\omega})$

  άρα η γραφική είναι, σχεδιασμένη στο $[-\pi, \pi]$:



ΑΣΚ. 2.3

(a) $H(s) = \dfrac{e^{s}}{(s+1)(s+2)} \Rightarrow$ αιτιατό?

- Παρατηρούμε πρώτα ότι η $H(s)$ δεν αποτελεί λόγο πολυωνύμων του s (λόγω του αριθμητή), άρα χρειάζεται περαιτέρω διερεύνηση.
- Η μόνη περίπτωση αιτιότητας θα ήταν η περιοχή σύγκλισης $Re\{s\} > -1$
- Με βάση αυτήν την Π.Σ., βρίσκουμε την $h(t)$, ως εξής:

$$H(s) = e^{s}\left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}\right) = \frac{e^{s}}{s+1} - \frac{e^{s}}{s+2} \Rightarrow$$

λόγω της Π.Σ. & ιδιότητας χρονικής μετατόπισης

$$\overset{\mathcal{L}^{-1}}{\Rightarrow} h(t) = e^{-(t+1)}u(t+1) - e^{-(2t+2)}u(t+1)$$

- Παρατηρούμε πως $h(t) \neq 0$ για $t \in [-1, 0) \Rightarrow$ $\boxed{\text{ΜΗ ΑΙΤΙΑΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ}}$

(c) $H(z) = \dfrac{z^3 - 2z^2 + z}{z^2 + \frac{3}{4}z + \frac{1}{8}} \Rightarrow$ αιτιατό?

- Παρατηρούμε ότι ο βαθμός του πολυωνύμου (ως προς z) του αριθμητή υπερβαίνει αυτόν του παρονομαστή, κατά συνέπεια:

$\lim_{z \to \infty} H(z) = \infty$, δηλαδή το $\boxed{\infty \notin ROC}$.

- Συνεπώς πρόκειται για $\boxed{\text{ΜΗ ΑΙΤΙΑΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ}}$

(b) $\boxed{H(s) = \frac{1}{s+1}\,\frac{s^2-2s+1}{10s^2+20s+10} \rightsquigarrow \text{BODE PLOT ?}}$

• Παρατηρούμε ότι $H(s) = \frac{1}{10}\frac{(s-1)^2}{(s+1)^3} = \frac{1}{10}\left(\frac{s-1}{s+1}\right)^2\frac{1}{s+1}$

λόγω ευστάθειας

$$\Longrightarrow |H(j\Omega)| = \frac{1}{10}\left|\cancel{\frac{j\Omega-1}{j\Omega+1}}\right|^2\frac{1}{|j\Omega+1|} = \frac{1}{10}\,\frac{1}{|j\Omega+1|}$$

1 $\qquad$ $j\Omega-1 = -(j\Omega+1)^*$

$$\Longrightarrow 20\log_{10}|H(j\Omega)| = -20 - 20\log|j\Omega+1|$$

$20\log_{10}(1/10) = -20$

• Το διάγραμμα Bode του $\boxed{-20\log|j\Omega\tau+1|}$ είναι γνωστό (ΠΑΡ. 6.5.1 βιβλίου) (Σχ. 6.20)

άρα για $\tau = 1$,

ϗ αφαίρεση 20dB παίρνουμε προσεγγιστικά το ακόλουθο διάγραμμα:

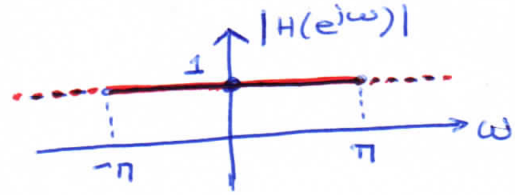
(d) $\boxed{H(z) = \frac{z^{-1}-1/3}{1-1/3\,z^{-1}} \rightsquigarrow |H(e^{j\omega})| = ?}$

• Λόγω ευστάθειας: $H(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega}-\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}} = e^{-j\omega}\,\frac{1-\frac{1}{3}e^{+j\omega}}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}}$

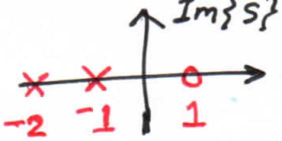
$$\Longrightarrow |H(e^{j\omega})| = |\cancel{e^{-j\omega}}| \cdot \cancel{\frac{\left|1-\frac{e^{j\omega}}{3}\right|}{\left|1-\frac{e^{-j\omega}}{3}\right|}} = 1$$

1 $\qquad$ 1 λόγω συζυγίας: $1-\frac{e^{j\omega}}{3} = \left(1-\frac{e^{-j\omega}}{3}\right)^*$

• Άρα:



ΑΣΚ. 2.4



$, \; x(t)=1 \Rightarrow y(t)=2,$ αιτιατό

(a) $H(s)=?$ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ: ?

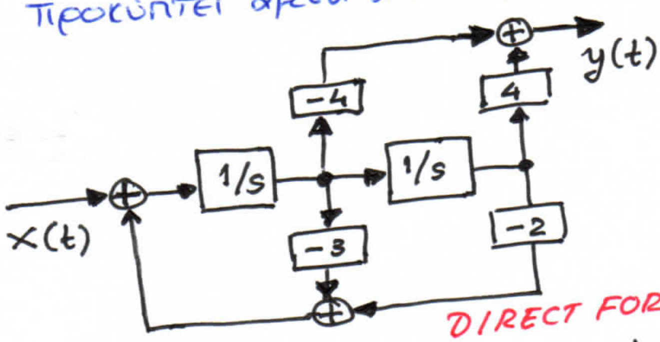
- Από το διάγραμμα πόλων/μηδενικών έχουμε $H(s)=\dfrac{A(s-1)}{(s+1)(s+2)}$ [1]
- Επίσης παρατηρούμε ότι το $x(t)=1$ είναι εκθετικής μορφής $(x(t)=e^{0t})$,

άρα $y(t)=e^{0t}H(0)=2 \Rightarrow H(0)=2$ [2]

- Από τις [1] & [2] βρίσκουμε το A: $2=H(0)=\dfrac{A(-1)}{1\;2} \Rightarrow \boxed{A=-4}$ [3]
- Άρα, από τις [1]&[3] έχουμε $\boxed{H(s)=\dfrac{-4(s-1)}{(s+1)(s+2)}=\dfrac{-4s+4}{s^2+3s+2}}$ [4]
- Από το δεδομένο της <u>ΑΙΤΙΑΤΟΤΗΤΑΣ</u> συμπεραίνουμε ότι Π.Σ: $Re\{s\}>-1$ που περιλαμβάνει τον άξονα των $j\Omega$ $\Rightarrow$ $\boxed{\text{ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ}}$

(B) ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΣΕ DIRECT & PARALLEL FORMS

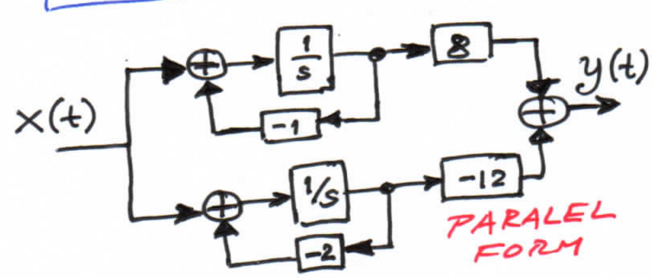
- Η υλοποίηση σε <u>κανονική</u> μορφή προκύπτει άμεσα από την [4]



DIRECT FORM

- Η υλοποίηση σε <u>παράλληλη</u> μορφή απαιτεί ανάλυση σε μερικά κλάσματα:

$$\boxed{H(s)=\frac{8}{s+1}-\frac{12}{s+2}}$$



PARALEL FORM

(C) ΕΞΟΔΟΣ ΣΕ ΕΙΣΟΔΟ $x(t)=e^{-t}u(t)$

$X(s)=\dfrac{1}{s+1}$, Π.Σ: $Re\{s\}>-1 \Rightarrow Y(s)=H(s)X(s)=\dfrac{-4(s-1)}{(s+1)^2(s+2)}=$

ανάλυση σε μερικά κλάσματα $=-\dfrac{12}{s+1}+\dfrac{8}{(s+1)^2}+\dfrac{12}{s+2}$, Π.Σ: $Re\{s\}>-1$

$$\xRightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \boxed{y(t)=(-12e^{-t}+8te^{-t}+12e^{-2t})u(t)}$$

ΑΣΚ. 2.5

$$H(z) = \frac{z}{z^2 - z + 0.24}$$

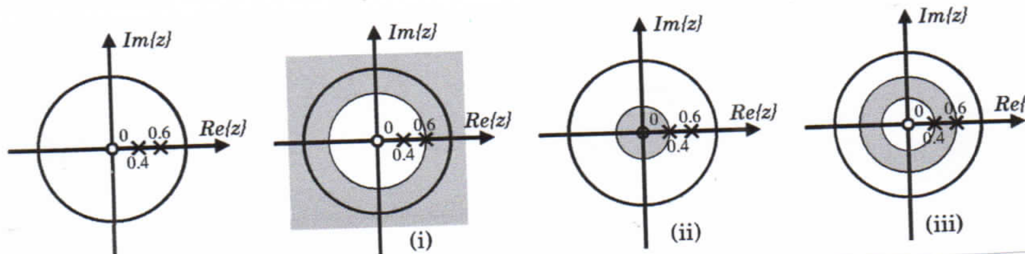
(a) Διάγραμμα μηδενικών & πόλων / περιοχές σύγκλισης

Γράφουμε την $H(z) = \dfrac{z}{(z-0.4)(z-0.6)} \Rightarrow$ ΠΟΛΟΙ $= \{0.4, 0.6\}$

ΜΗΔΕΝΙΚΑ $= \{0, \infty\}$

γιατί $\boxed{\lim_{z\to\infty} H(z) = 0}$

Κατα συνέπεια:



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΠΟΛΩΝ-ΜΗΔΕΝΙΚΩΝ

{Έχουμε 3 δυνατές περιοχές σύγκλισης}

Π.Σ: $\lvert z\rvert > 0.6$	Π.Σ: $\lvert z\rvert < 0.4$	Π.Σ: $0.4 < \lvert z\rvert < 0.6$
ΑΙΤΙΑΤΟ & ΕΥΣΤΑΘΕΣ (γιατί επίσης το $z=\infty$ ανήκει στην Π.Σ)	ΜΗ ΑΙΤΙΑΤΟ & ΑΣΤΑΘΕΣ	ΜΗ ΑΙΤΙΑΤΟ & ΑΣΤΑΘΕΣ

(c) $h[n], s[n] = ?$ (για ευσταθές σύστημα)

$$H(z) = \frac{z^{-1}}{(1-0.4z^{-1})(1-0.6z^{-1})} = \frac{5}{1-0.6z^{-1}} - \frac{5}{1-0.4z^{-1}} \Rightarrow \boxed{h[n] = 5(0.6^n - 0.4^n)u[n]}$$

ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΑΡΙΘΜ./ΠΑΡΑΝ. με z^2

ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΕ ΜΕΡΙΚΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ Μ/Σ Z

⊕ {Π.Σ: $\lvert z\rvert > 0.6$ ΛΟΓΩ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ}

Η βηματική απόκριση είναι η έξοδος του συστήματος σε είσοδο $u[n]$,

άρα στο πεδίο του Μ/Σ Ζ θα έχουμε:

$$S(z) = H(z) \cdot \mathcal{Z}\{u[n]\} = \frac{z^{-1}}{(1-0.4z^{-1})(1-0.6z^{-1})(1-z^{-1})}$$

$$\overset{v = z^{-1}}{=} \frac{v}{\left(1-\frac{2}{5}v\right)\left(1-\frac{3}{5}v\right)(1-v)} = \frac{A}{1-\frac{2}{5}v} + \frac{B}{1-\frac{3}{5}v} + \frac{C}{1-v}$$

ανάλυση σε μερικά κλάσματα

όπου:

$$A = \left.\frac{v}{\left(1-\frac{3}{5}v\right)(1-v)}\right|_{v=5/2} = \frac{\frac{5}{2}}{\left(1-\frac{3}{5}\frac{5}{2}\right)\left(1-\frac{5}{2}\right)} = \frac{5/2}{(-1/2)(-3/2)} = \frac{10}{3}$$

$$B = \left.\frac{v}{\left(1-\frac{2}{5}v\right)(1-v)}\right|_{v=\frac{5}{3}} = \frac{\frac{5}{3}}{\left(1-\frac{2}{5}\frac{5}{3}\right)\left(1-\frac{5}{3}\right)} = \frac{5/3}{(1/3)(-2/3)} = -\frac{15}{2}$$

$$C = \left.\frac{v}{\left(1-\frac{2}{5}v\right)\left(1-\frac{3}{5}v\right)}\right|_{v=1} = \frac{1}{\left(1-\frac{2}{5}\right)\left(1-\frac{3}{5}\right)} = \frac{1}{\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}} = \frac{25}{6}$$

Άρα: $$S(z) = \frac{10}{3}\frac{1}{1-0.4z^{-1}} - \frac{15}{2}\frac{1}{1-0.6z^{-1}} + \frac{25}{6}\frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{s[n] = \left(\frac{10}{3}0.4^n - \frac{15}{2}0.6^n + \frac{25}{6}\right)u[n]}$$

Π.Σ: $|z| > 1$

(b) Διαγράμματα υλοποίησης σε κανονική μορφή & εν-παραλλήλω

$$H(z) = \frac{z^{-1}}{1 - \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5}\right) z^{-1} + \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5}\right) z^{-2}} = \frac{0 + 1 . z^{-1}}{1 - 1 . z^{-1} + 0.24 z^{-2}}$$

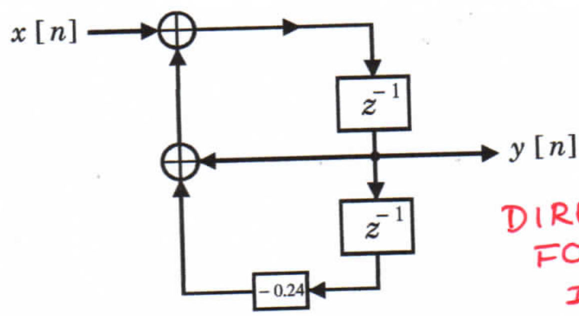
$\hookrightarrow \frac{6}{25} = 0.24$

{ ΚΑΤΑΛΛΗΛΗ ΜΟΡΦΗ ΓΙΑ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΣΕ DIRECT FORM }

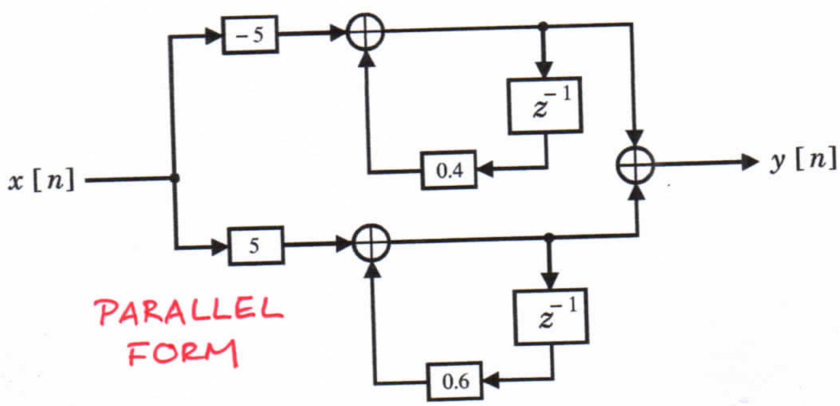
$$H(z) = \frac{5}{1 - 0.6 z^{-1}} - \frac{5}{1 - 0.4 z^{-1}}$$

$\hookrightarrow$ από ερώτημα (c) (ανάλυση σε μερικά κλάσματα)

{ ΚΑΤΑΛΛΗΛΗ ΜΟΡΦΗ ΓΙΑ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΕΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩ }



DIRECT FORM II



PARALLEL FORM