ΛΥΣΕΙΣ $1^{ου}$ ΣΕΤ. ΑΣΚΗΣΕΩΝ | ΕΞ: 2014-2015 ΕΑΡΙΝΟ

1.1.a

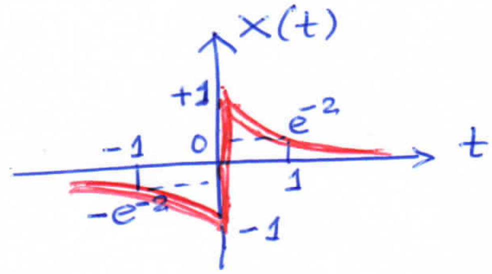
$$x(t) = e^{-2t}u(t) - e^{2t}u(-t)$$

$$\Rightarrow x(-t) = e^{2t}u(-t) - e^{-2t}u(t)$$

$$= -\left(e^{-2t}u(t) - e^{2t}u(-t)\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{x(-t) = -x(t)}$$, άρα __περιττό__

(όπως εξάλλου φαίνεται και από τη γραφική του παράσταση)



1.1.b Υποψιαζόμαστε ότι πρόκειται για σήμα ενέργειας, οπότε προσπαθούμε να το διαπιστώσουμε:

$$E_\infty = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{0} (e^{2t})^2 dt + \int_{0}^{\infty} (e^{-2t})^2 dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{4t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-4t} dt = \frac{1}{4} e^{4t}\Big|_{-\infty}^{0} - \frac{1}{4} e^{-4t}\Big|_{0}^{\infty} =$$

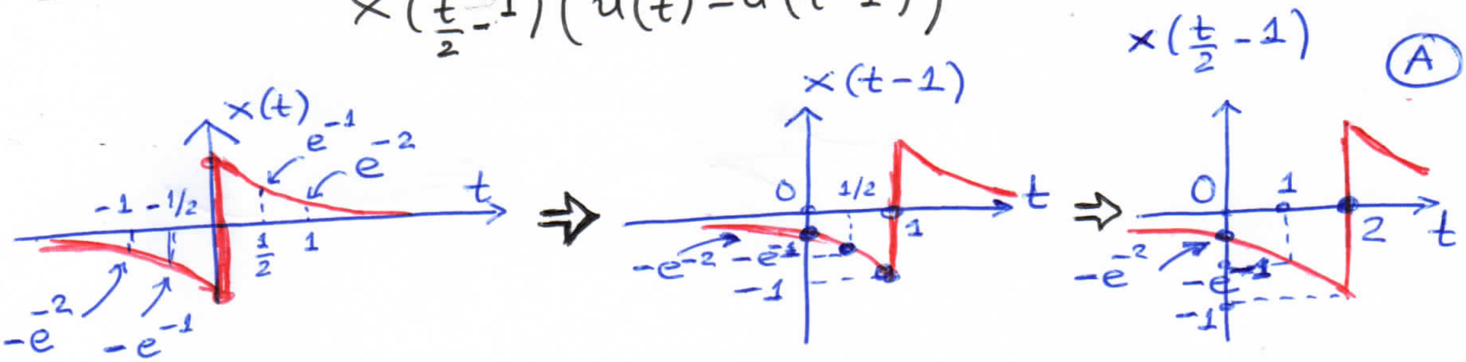
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1/2 \Rightarrow \boxed{E_\infty = 1/2}$$, πεπερασμένο, άρα __ενέργειας__

(Προφανώς, $P_\infty = 0$)

1.1.c

Σχεδιασμός του

$$x\left(\frac{t}{2}-1\right)\big(u(t)-u(t-1)\big)$$



(επιβεβαίωση:

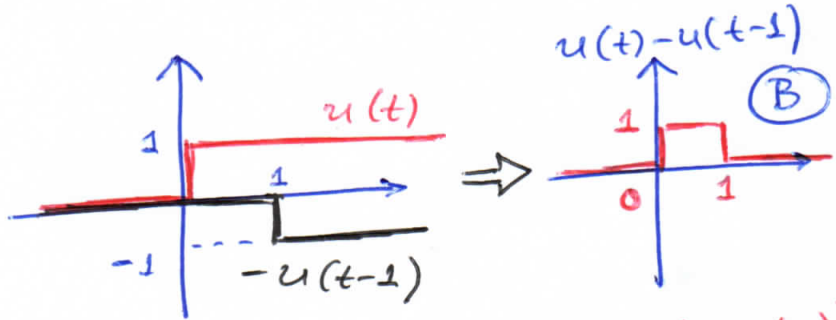
$\frac{t}{2}-1=0 \Leftrightarrow t=2$

$\frac{t}{2}-1=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow t=1$

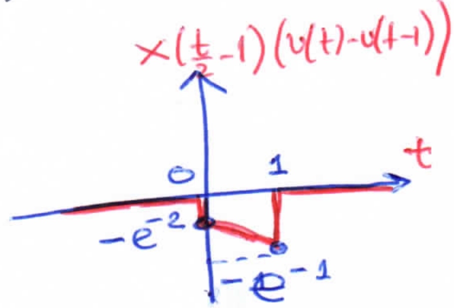
$\frac{t}{2}-1=-1 \Leftrightarrow t=0$)

ΣΗΜΕΙΑ ΑΡΧΙΚΗΣ $x(t)$

ΣΗΜΕΙΑ $x(\frac{t}{2}-1)$



Πολ/ζοντας τις δύο γραφικές παραστάσεις (A), (B), παίρνουμε:



1.1.d

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΤΗΤΑ ΤΟΥ $x(t)=2\cos(10t+1)-\sin(4t-1)$

Το σήμα είναι άθροισμα δύο σημάτων:

- το πρώτο περιοδικό με $T_1=\frac{2\pi}{10}=\frac{\pi}{5}$
- το δεύτερο επίσης περιοδικό με $T_2=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

Το ΕΚΠ των δύο περιόδων είναι το π $\left(=5\cdot\underbrace{\frac{\pi}{5}}_{T_1},\ =2\cdot\underbrace{\frac{\pi}{2}}_{T_2}\right)$

Κατά συνέπεια, το άθροισμα είναι περιοδικό με $\boxed{T=\pi}$

$\boxed{1.2}$

$$y[n] = \begin{cases} -x[n], & n \geq 1 \\ 0, & n = 0 \\ +x[n], & n \leq -1 \end{cases}$$

a) ΑΙΤΙΑΤΟΤΗΣ

Το σύστημα είναι αιτιατό, γιατί η έξοδός του εξαρτάται μόνο από την είσοδο την χρονική στιγμή n (ή ισούται με το μηδέν).

Άρα δέν εξαρτάται από μελλοντικές τιμές εισόδου, συνεπώς <u>είναι αιτιατό</u>.

β) ΓΡΑΜΜΙΚΟ

Ναι, γιατί εύκολα βλέπουμε πως η έξοδός του σε είσοδο $ax_1[n] + \beta x_2[n]$ ισούται με $ay_1[n] + \beta y_2[n]$

$(x_1[n] \longrightarrow y_1[n]\ ;\ x_2[n] \longrightarrow y_2[n])$

c) ΧΡΟΝΙΚΑ ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΟ

Δέν είναι, γιατί:

Έστω $x_1[n] = \delta[n] \Rightarrow y_1[n] = \begin{cases} -\delta[n], & n \geq 1 \\ 0, & n = 0 \\ \delta[n], & n \leq -1 \end{cases} = 0$

$x_2[n] = x_1[n-1] = \delta[n-1] \Rightarrow y_2[n] = \begin{cases} -\delta[n-1], & n \geq 1 \\ 0, & n = 0 \\ \delta[n-1], & n \leq -1 \end{cases} = -\delta[n-1]$

Άρα $y_2[n] \neq y_1[n-1]$

(d) ΕΥΣΤΑΘΕΣ

Ναι, καθώς $|x[n]| < B_x, \forall n$

$$\Rightarrow |y[n]| \leq |x[n]| < B_x, \forall n$$

Άρα, φραγμένη είσοδος ⇒ φραγμένη έξοδος (πάντα)

συνεπώς είναι ευσταθές

(e) ΑΝΤΙΣΤΡΕΨΙΜΟ

Όχι, γιατί όλα τα σήματα εισόδου $x[n] + a\delta[n]$ (για οποιοδήποτε a) δίνουν την ίδια έξοδο

(f) ΕΞΟΔΟΣ ΣΕ ΕΙΣΟΔΟ $x[n] = u[n]$

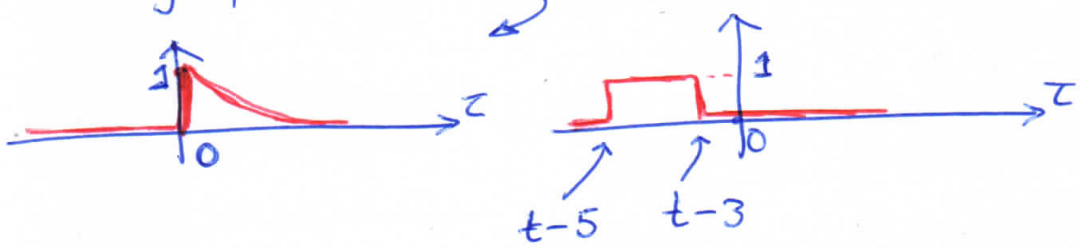
$$y[n] = \begin{cases} -u[n], & n \geq 1 \\ 0, & n = 0 \\ u[n], & n \leq -1 \end{cases}$$

$$= -u[n-1]$$

1.3.

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= u(t-3) - u(t-5) \\ h(t) &= e^{-3t}u(t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underbrace{x(t) * h(t)}_{y(t)} = ?$$

① Σχεδιάζουμε τα $h(\tau)$, $x(t-\tau)$



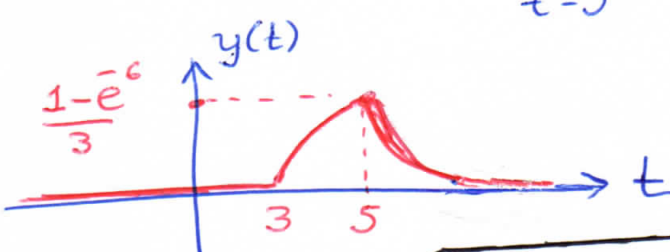
② Παρατηρούμε ότι έχουμε τρείς περιοχές ενδιαφέροντος

ⓐ $t-3<0 \Longrightarrow y(t)=0$ (δεν υπάρχει επικάλυψη)

ⓑ $\left.\begin{aligned} t-3 &\geq 0 \\ &\& \\ t-5 &< 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow 3 \leq t < 5 \Rightarrow y(t) = \int_0^{t-3} e^{-3\tau}d\tau = \frac{1}{3}\left(1-e^{-3t+9}\right)$

ⓒ $t-5 \geq 0 \Rightarrow y(t) = \int_{t-5}^{t-3} e^{-3\tau}d\tau = -\frac{1}{3}\left[e^{-3t+9} - e^{-3t+15}\right]$

$$= e^{-3t+15}\left[\frac{1-e^{-6}}{3}\right]$$



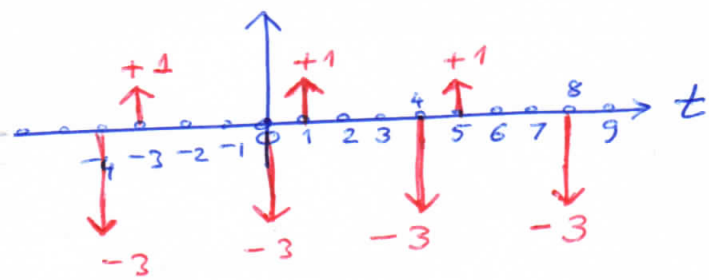
$$\boxed{\frac{dx(t)}{dt} * h(t)} = \left[\delta(t-3) - \delta(t-5)\right] * e^{-3t}u(t)$$

$$= e^{-3(t-3)} \cdot u(t-3) - e^{-3(t-5)} \cdot u(t-5)$$

καθώς η $\delta(\cdot)$ είναι το ταυτοτικό στοιχείο της συνέλιξης.

1.4
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\delta(t-1-4k) - 3\delta(t-4k) \right]$$

• Σχεδιάζοντας το σήμα:



Παρατηρούμε ότι είναι περιοδικό με $T = 4 \Longrightarrow \Omega_0 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

• Άρα μπορεί να γραφτεί ως σειρά Fourier:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\frac{\pi}{2}t}$$

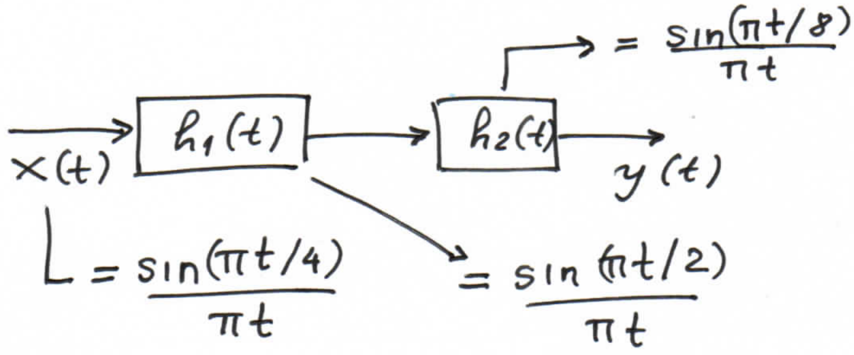
με
$$c_k = \frac{1}{4}\int_{-1}^{3} \left(-3\delta(t) + \delta(t-1)\right) e^{-j\frac{\pi}{2}kt} dt$$

ολοκλήρωση σε μία περίοδο

$$= \frac{1}{4}\left[-3 + e^{-j\frac{\pi}{2}k}\right]$$

με $c_0 = \frac{1}{4}\left[-3 + e^{0}\right] = -\frac{1}{2}$

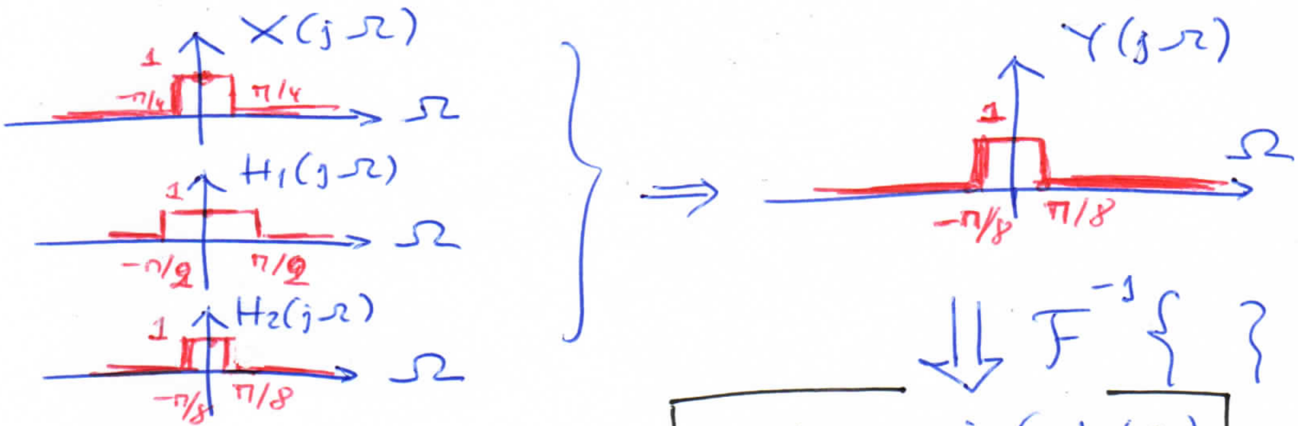
1.5



Δουλεύουμε στο πεδίο της συχνότητας, όπου εύκολα βλέπουμε ότι:

$$Y(j\Omega) = X(j\Omega)\, H_1(j\Omega)\, H_2(j\Omega)$$

(επειδή: $y(t) = x(t) * h_1(t) * h_2(t)$)



$$\Downarrow \mathcal{F}^{-1}\{\ \}$$

$$\boxed{y(t) = \frac{\sin(\pi t/8)}{\pi t}}$$

Επίσης, από το θεώρημα Parseval:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |Y(j\Omega)|^2\, d\Omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/8}^{\pi/8} d\Omega = \frac{1}{2\pi}\,\frac{2\pi}{8} = \boxed{\frac{1}{8}}$$

1.6.a $\mathcal{F}\{te^{-4t}\cos(t)u(t)\} = ?$

$$x(t) = te^{-4t}\cos(t)u(t) = t e^{-4t}\frac{e^{jt}+e^{-jt}}{2}u(t)$$

$$= \frac{1}{2}te^{-t(4-j)}u(t) + \frac{1}{2}te^{-t(4+j)}u(t)$$

$$\Longrightarrow \boxed{X(j\Omega) = \frac{1}{2}\frac{1}{(4-j+j\Omega)^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{(4+j+j\Omega)^2}}$$

καθώς $\mathrm{Re}\{4 \pm j\} > 0$

1.6.b $\mathcal{F}^{-1}\left\{\dfrac{3\sin(5(\Omega-\pi))}{\Omega-\pi}\right\} = ?$

Από το τυπολόγιο έχουμε το ζεύγος Μ/Σ:

$$x_1(t) = \begin{cases} 1, & |t|<5 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{2\sin 5\Omega}{\Omega}$$

άρα

$$x_2(t) = \frac{3}{2}x_1(t) = \begin{cases} 3/2, & |t|<5 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{3\sin 5\Omega}{\Omega}$$

και

$$x(t) = e^{j\pi t}\cdot x_2(t) = \begin{cases} \frac{3}{2}e^{j\pi t}, & |t|<5 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{3\sin[5(\Omega-\pi)]}{\Omega-5}$$

1.7. $$\boxed{\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 4x(t)}$$

- Από τη σχέση εισόδου εξόδου, παίρνουμε εύκολα:

$$H(j\Omega) = \frac{j\Omega + 4}{(j\Omega)^2 + 5(j\Omega) + 6} =$$

$$= \frac{4 + j\Omega}{6 - \Omega^2 + 5j\Omega}$$

- Αναλύοντας σε μερικά κλάσματα, παίρνουμε:

$$H(j\Omega) = \frac{4 + j\Omega}{(2+j\Omega)(3+j\Omega)} = \frac{2}{2+j\Omega} - \frac{1}{3+j\Omega}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} h(t) = 2e^{-2t}u(t) - e^{-3t}u(t)$$

- $$Y(j\Omega) = H(j\Omega)X(j\Omega) = \frac{\cancel{(4+j\Omega)}\cancel{(3+j\Omega)}}{(2+j\Omega)\cancel{(3+j\Omega)}(4+j\Omega)^{\cancel{2}}}$$

επειδή:

$$X(j\Omega) = \frac{1}{4+j\Omega} - \frac{1}{(4+j\Omega)^2} = \frac{3+j\Omega}{(4+j\Omega)^2}$$

$$\Longrightarrow Y(j\Omega) = \frac{1}{(2+j\Omega)(4+j\Omega)} = \frac{1}{2}\frac{1}{2+j\Omega} - \frac{1}{2}\frac{1}{4+j\Omega}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \boxed{y(t) = 1/2 \cdot e^{-2t}u(t) - \frac{1}{2}e^{-4t}u(t)}$$