Άσκηση 2.1: Υπολογίστε τον μετασχηματισμό Fourier $X(j\,\Omega)$ του σήματος

$$x(t) = \frac{1}{\pi\, t^2} \sin(t) \sin(3\,t/2) \ .$$

Λύση: Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα του μετασχηματισμών Fourier όσον αφορά πολλαπλασιασμό στο πεδίο του χρόνου / συνέλιξη στο πεδίο της συχνότητας, παίρνουμε:

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \pi\, \mathcal{F}\{\frac{\sin(t)}{\pi\, t}\frac{\sin(3\,t/2)}{\pi\, t}\} = \pi\, \frac{1}{2\,\pi}\, \mathcal{F}\{\frac{\sin(t)}{\pi\, t}\} * \mathcal{F}\{\frac{\sin(3\,t/2)}{\pi\, t}\} = \frac{1}{2} X_1(j\,\Omega) * X_2(j\,\Omega) \ ,$$

όπου:

$$X_1(j\,\Omega) \ = \begin{cases} 1\,, & \text{για } |\Omega| < 1 \\ 0\,, & \text{για } |\Omega| > 1 \end{cases} \qquad \text{και} \qquad X_2(j\,\Omega) \ = \begin{cases} 1\,, & \text{για } |\Omega| < 3/2 \\ 0\,, & \text{για } |\Omega| > 3/2 \end{cases} \ .$$

Προχωράμε στη συνέχεια στον υπολογισμό της συνέλιξης

$$X_1(j\,\Omega) \, * \, X_2(j\,\Omega) \ = \ \int_{-\infty}^{+\infty} X_1(j\,\Theta)\, X_2(j\,(\Omega-\Theta))\, d\Theta \ .$$

Στο αριστερό τμήμα του σχήματος της επόμενης σελίδας έχουμε σχεδιάσει τα $X_1(j\,\Theta)$ και $X_2(j\,(\Omega-\Theta))$.
Είναι προφανές ότι αυτά δεν έχουνε επικάλυψη, όταν $3/2+\Omega < -1$, ισοδύναμα $\Omega < -5/2$, όπως και όταν $-3/2+\Omega > 1$, ισοδύναμα $\Omega > 5/2$. Στις δύο αυτές περιπτώσεις η συνέλιξη είναι μηδενική.
Συνεχίζοντας, βλέπουμε ότι όπως το $X_2(j\,(\Omega-\Theta))$ αρχίζει και μετακινείται προς τα δεξιά (αυξάνεται δηλαδή η τιμή του Ω), μερική επικάλυψη λαμβάνει χώρα στο διάστημα $-1 < 3/2 + \Omega < 1$, ισοδύναμα για $-5/2 < \Omega < -1/2$. Στο διάστημα αυτό η συνέλιξη θα ισούται με:

$$\int_{\Theta=-1}^{\Theta=3/2+\Omega} 1\,.\,1\,.\,d\Theta \ = \ 3/2+\Omega+1 \ = \ \Omega \, + \, 5/2 \ .$$

Παρόμοια, βλέπουμε ότι όπως το $X_2(j\,(\Omega-\Theta))$ αρχίζει και μετακινείται προς τα αριστερά της δεξιάς περιοχής μη επικάλυψης (μειώνεται δηλαδή η τιμή του Ω σε σχέση με το $5/2$), μερική επικάλυψη λαμβάνει χώρα στο διάστημα $-1 < -3/2+\Omega < 1$, ισοδύναμα για $1/2 < \Omega < 5/2$. Στο διάστημα αυτό η συνέλιξη θα ισούται με:

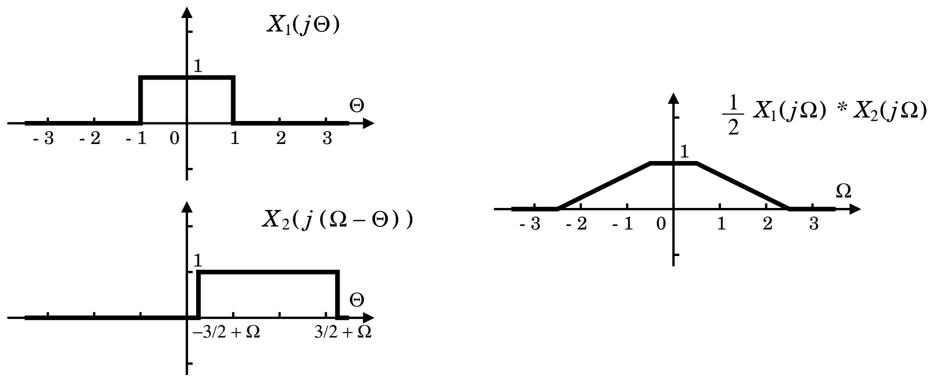
$$\int_{\Theta=-3/2+\Omega}^{\Theta=1} 1\,.\,1\,.\,d\Theta \ = \ 1-(\Omega-3/2) \ = \ 5/2 \, - \, \Omega \ .$$

Τέλος, παραμένει μία περιοχή όπου όλο το $X_1(j\,\Theta)$ επικαλύπτεται από τμήματα του $X_2(j\,(\Omega-\Theta))$. Αυτό προφανώς συμβαίνει για το διάστημα για το οποίο ισχύουν οι εξής δύο ανισότητες ταυτόχρονα: $3/2+\Omega > 1$ και $-3/2+\Omega < -1$, ισοδύναμα δηλαδή $-1/2 < \Omega < 1/2$. Για το διάστημα αυτό η συνέλιξη δίνεται από το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{1} d\Theta \ = \ 2$.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω, και πολλαπλασιάζοντας και με τον συντελεστή $1/2$ της πρώτης εξίσωσης που είχαμε αμελήσει στα παραπάνω, παίρνουμε την ζητούμενη απάντηση:

$$\mathcal{F}\{\,x(t)\,\} \;=\; \begin{cases} 0\,, & \text{για } \Omega \leq -5/2 \\ \Omega/2 + 5/4\,, & \text{για } -5/2 < \Omega < -1/2 \\ 1\,, & \text{για } -1/2 \leq \Omega \leq 1/2 \\ -\Omega/2 + 5/4\,, & \text{για } 1/2 < \Omega < 5/2 \\ 0\,, & \text{για } \Omega \geq 5/2 \end{cases} \;.$$

Ο μετασχηματισμός φαίνεται στο δεξιό τμήμα του σχήματος.



Άσκηση 2.2: Υπολογίστε το σήμα $x[n]$ από τον αντίστοιχό του μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου (DTFT),

$$X(e^{j\omega}) \;=\; \frac{\sin(5\,\omega/2)\;\cos(\pi/2 - 3\,\omega/2)}{\sin^2(\omega/2)} \;\; .$$

Λύση: Παρατηρούμε, χρησιμοποιώντας λίγη τριγωνομετρία και την ιδιότητα ότι συνέλιξη στο πεδίο του χρόνου αντιστοιχεί σε πολλαπλασιασμό στο πεδίο της συχνότητας, ότι:

$$\begin{aligned}
\mathcal{DF}^{-1}\{X(e^{j\omega})\} &= \mathcal{DF}^{-1}\left\{\frac{\sin(5\,\omega/2)\;\cos(\pi/2 - 3\,\omega/2)}{\sin^2(\omega/2)}\right\} \\
&= \mathcal{DF}^{-1}\left\{\frac{\sin(5\,\omega/2)\;\sin(3\,\omega/2)}{\sin^2(\omega/2)}\right\} \\
&= \mathcal{DF}^{-1}\left\{\frac{\sin(3\,\omega/2)}{\sin(\omega/2)}\right\} * \mathcal{DF}^{-1}\left\{\frac{\sin(5\,\omega/2)}{\sin(\omega/2)}\right\} \;=\; x_1[n] \, * \, x_2[n] \;\; ,
\end{aligned}$$

όπου

$$x_1[n] \;=\; \mathcal{DF}^{-1}\left\{\frac{\sin(3\,\omega/2)}{\sin(\omega/2)}\right\} \;=\; \begin{cases} 1\,, & \text{για } \; |n| \le 1 \\ 0\,, & \text{αλλού} \;\; , \end{cases}$$

και

$$x_2[n] \;=\; \mathcal{DF}^{-1}\left\{\frac{\sin(5\,\omega/2)}{\sin(\omega/2)}\right\} \;=\; \begin{cases} 1\,, & \text{για } \; |n| \le 2 \\ 0\,, & \text{αλλού} \;\; . \end{cases}$$

Η ζητούμενη συνέλιξη μπορεί να υπολογιστεί με διάφορους τρόπους. Ένας εξ' αυτών είναι ο τρόπος υπολογισμού της συνέλιξης ως γινομένου πίνακα με διάνυσμα, καθόσον πρόκειται για δύο σήματα διακριτού χρόνου και πεπερασμένης διάρκειας. Έχουμε λοιπόν:

$$\mathbf{x}_1 = [\, x_1[-1] \,,\, x_1[0] \,,\, x_1[1] \,]^T = [\, 1 \,,\, 1 \,,\, 1 \,]^T$$

με μήκος 3, και

$$\mathbf{x}_2 = [\, x_2[-2] \,,\, x_2[-1] \,,\, x_2[0] \,,\, x_2[1] \,,\, x_2[2] \,]^T = [\, 1 \,,\, 1 \,,\, 1 \,,\, 1 \,,\, 1 \,]^T$$

με μήκος 5. Κατά συνέπεια η συνέλιξή τους θα ορίζεται μεταξύ -3 και 3 (δηλαδή έχει μήκος 7), και μπορεί να υπολογιστεί ως:

$$\begin{bmatrix} x[-3] \\ x[-2] \\ x[-1] \\ x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2[-2] & 0 & 0 \\ x_2[-1] & x_2[-2] & 0 \\ x_2[0] & x_2[-1] & x_2[-2] \\ x_2[1] & x_2[0] & x_2[-1] \\ x_2[2] & x_2[1] & x_2[0] \\ 0 & x_2[2] & x_2[1] \\ 0 & 0 & x_2[2] \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1[-1] \\ x_1[0] \\ x_1[1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \;\; .$$

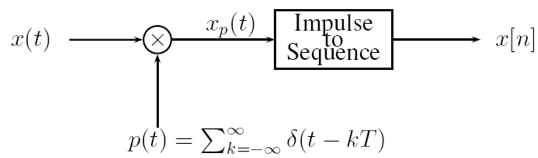
Κατά συνέπεια, το ζητούμενο σήμα είναι το:

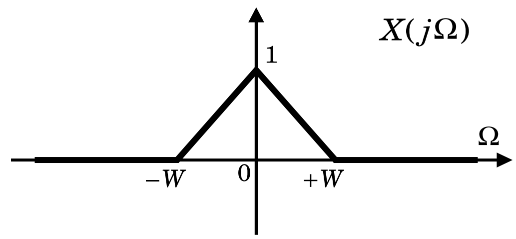
$$x[n] \;=\; \delta[n+3] + 2\,\delta[n+2] + 3\,\delta[n+1] + 3\,\delta[n] + 3\,\delta[n-1] + 2\,\delta[n-2] + \delta[n-3] \;\; .$$

Άσκηση 2.3: Έστω το ακόλουθο σύστημα, όπως και το ζωνοπεριορισμένο (bandlimited) σήμα εισόδου ($X(j\,\Omega) = 0$ για $|\Omega| \geq W$), που δίνονται στο παρακάτω σχήμα.

(a) Απεικονίστε γραφικά τα φάσματα των σημάτων $x_p(t)$ και $x[n]$ (δηλ. τα $X_p(j\,\Omega)$ και $X(e^{j\,\omega})$ αντίστοιχα), όταν $T = \pi/\mathrm{W}$, σημειώνοντας τις κρίσιμες τιμές στους άξονες.

(b) Υπολογίστε τις ποσότητες $\int_{t=-\infty}^{+\infty} |\,x(t)|^2\,\mathrm{d}\,t$, $\int_{t=-\infty}^{+\infty} x(t)\,\mathrm{d}\,t$, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\,x[n]\,|^2$, και $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]$.





Λύση:

(a) Για το φάσμα του $x_p(t)$ παρατηρούμε πως:

$$x_p(t) \;=\; [\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(t-nT)]\;.\;x(t) \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{F}\{\,x_p(t)\,\} \;=\; \frac{1}{2\,\pi}\,\mathcal{F}\{\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(t-nT)\} * X(j\,\Omega)$$

$$\Rightarrow\; X_p(j\,\Omega) \;=\; \frac{1}{2\,\pi}\,\frac{2\,\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(\Omega - \frac{2\,\pi\,n}{T}) * X(j\,\Omega) \;=\; \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}[X(j\,\Omega) * \delta(\Omega - 2\,n\,\mathrm{W}\,)]$$

$$=\; \frac{\mathrm{W}}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} X(j\,(\Omega \;-\; 2\,n\,\mathrm{W}))\;\;,$$

το διάγραμμα του οποίου δίνεται παρακάτω. Παρατηρούμε πως λόγω των δεδομένων της άσκησης δεν υπάρχει φαινόμενο αναδίπλωσης ($\Omega_s = 2\,\pi/T = 2\,\mathrm{W}$).

Συνεχίζουμε τώρα με το φάσμα του διακριτού σήματος $x_d[n]$. Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι:

$$X_d(e^{j\,\omega}) \;=\; X_p(j\,\omega/T) \;\;\Rightarrow\;\; X_d(e^{j\,\omega}) \;=\; \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} X(j\,(\,\frac{\omega}{T} \;-\; 2\,n\,\mathrm{W})\,)$$

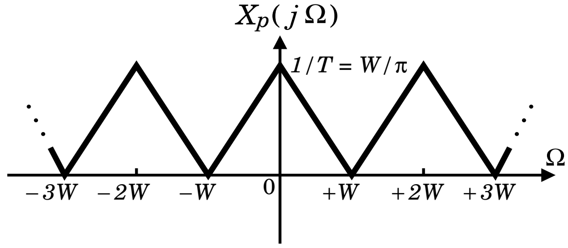
$$=\; \frac{\mathrm{W}}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} X(j\,(\,\frac{\mathrm{W}}{\pi}\,\omega \;-\; 2\,n\,\mathrm{W}\,)\,)\;\;,$$

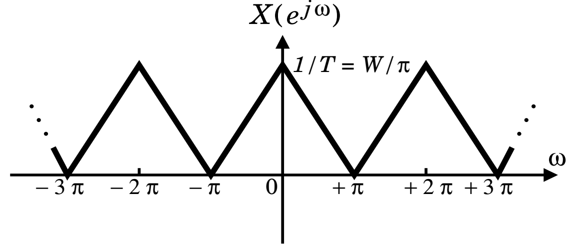
το διάγραμμα του οποίου δίνεται παρακάτω. Παρατηρούμε φυσικά ότι το φάσμα έχει περίοδο $2\,\pi$.

Το ότι $X_d(e^{j\,\omega}) \;=\; X_p(j\,\omega/T)$ μπορεί να δειχθεί εύκολα επειδή $x_d[n] = x(n\,T)$ και αν συγκρίνουμε το:

$$x_p(t) = [\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(t - n\,T)\,].x(t) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x(n\,T)\;\delta(t - n\,T) \;\Rightarrow\; X_p(j\,\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x(n\,T)\;e^{-j\,\Omega\,n\,T}$$

με το:
$$X_d(e^{j\omega}) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x_d[n]\, e^{-j\omega n} \;=\; \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x(nT)\, e^{-j\omega n} \;.$$





(b) Από το φάσμα (όπως δίνεται στην εκφώνηση) είναι προφανές ότι το $x(t)$ είναι μη περιοδικό σήμα. Άρα, χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Parseval παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \mathrm{d}t \;&=\; \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\Omega)|^2 \mathrm{d}\Omega \\
&=\; \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^{0} (\frac{\Omega}{W} + 1)^2 \mathrm{d}\Omega \;+\; \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{+W} (-\frac{\Omega}{W} + 1)^2 \mathrm{d}\Omega \\
&=\; \frac{1}{2\pi} (\frac{\Omega^3}{3W^2} + \Omega + \frac{\Omega^2}{W}) \Big|_{-W}^{0} + \; \frac{1}{2\pi} (\frac{\Omega^3}{3W^2} + \Omega - \frac{\Omega^2}{W}) \Big|_{0}^{W} \\
&=\; \frac{W}{3\pi} \;=\; \frac{1}{3T} \;.
\end{aligned}$$

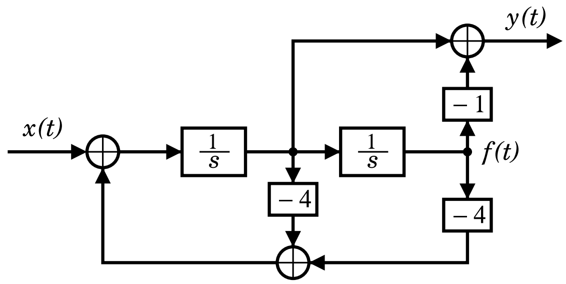
Για το δεύτερο ζητούμενο, παρατηρούμε ότι:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, \mathrm{d}t \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\Omega t} \mathrm{d}t \Big|_{\Omega=0} \;=\; X(j\Omega)\,|_{\Omega=0} \;=\; 1 \;,$$
όπως φαίνεται εύκολα από το δοθέν φάσμα στο σχήμα της εκφώνησης της άσκησης.

Για το τρίτο ζητούμενο του ερωτήματος, χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Parseval, παίρνουμε (βλέπε επίσης το σχήμα του φάσματος):

$$\begin{aligned}
\sum_{-\infty}^{+\infty} |\,x[n]\,|^2 \;&=\; \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |\,X(e^{j\omega})\,|^2 \mathrm{d}\omega \\
&=\; \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{0} \frac{W}{\pi} (\frac{\omega}{\pi} + 1)^2 \mathrm{d}\omega \;+\; \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{+\pi} \frac{W}{\pi} (-\frac{\omega}{\pi} + 1)^2 \mathrm{d}\omega \\
&=\; \frac{W}{2\pi^2} (\frac{\omega^3}{3\pi^2} + \omega + \frac{\omega^2}{\pi}) \Big|_{-\pi}^{0} + \; \frac{W}{2\pi^2} (\frac{\omega^3}{3\pi^2} + \omega - \frac{\omega^2}{\pi}) \Big|_{0}^{\pi} \\
&=\; \frac{W}{3\pi} \;=\; \frac{1}{3T} \;.
\end{aligned}$$

Τέλος, για το τέταρτο ζητούμενο του ερωτήματος, παρατηρούμε ότι:
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \;=\; \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-j\omega n} \Big|_{\omega=0} \;=\; X(e^{j0}) \;=\; \frac{1}{T} \;=\; \frac{W}{\pi} \;,$$
χρησιμοποιώντας και το παραπάνω σχήμα της $X(e^{j\omega})$.

Άσκηση 2.4: Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ένα διάγραμμα υλοποίησης ενός Γ.Χ.Α. και ευσταθούς συστήματος συνεχούς χρόνου.



(a) Υπολογίστε τη συνάρτηση μεταφοράς του όλου συστήματος $H(s)$.

(b) Σχεδιάστε διαγράμματα υλοποίησης του συστήματος εν παραλλήλω (in parallel) και εν σειρά (cascade).

(c) Εκφράστε τη σχέση εισόδου-εξόδου του συστήματος ως διαφορική εξίσωση.

(d) Υπολογίστε την κρουστική απόκρισή του, $h(t)$.

Λύση:

(a) Για να βοηθηθούμε στον υπολογισμό της συνάρτησης μεταφοράς από το δοθέν διάγραμμα υλοποίησης εισάγουμε την μεταβλητή $f(t)$ όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα. Είναι εύκολο τότε να διαπιστώσουμε ότι η είσοδος του δεξιού ολοκληρωτή $1/s$ θα είναι το σήμα $\mathrm{d}\,f(t)\,/\,\mathrm{d}\,t$, καθώς και ότι η είσοδος του αριστερού ολοκληρωτή $1/s$ θα είναι το σήμα $\mathrm{d}^2 f(t)\,/\,\mathrm{d}\,t^2$.

Στη συνέχεια διαπιστώνουμε από το κάτω τμήμα του διαγράμματος υλοποίησης ότι η είσοδος του συστήματος $x(t)$ σχετίζεται με το σήμα $f(t)$ σύμφωνα με τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{\mathrm{d}^2 f(t)}{\mathrm{d}\,t^2} \;=\; x(t) \;-\; 4\;\frac{\mathrm{d}\,f(t)}{\mathrm{d}\,t} \;-\; 4\,f(t) \;\;,$$

ή, ισοδύναμα,

$$\frac{\mathrm{d}^2 f(t)}{\mathrm{d}\,t^2} \;+\; 4\;\frac{\mathrm{d}\,f(t)}{\mathrm{d}\,t} \;+\; 4\,f(t) \;=\; x(t) \;\;.$$

Παίρνοντας τον μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέρη της εξίσωσης έχουμε

$$\frac{F(s)}{X(s)} \;=\; \frac{1}{s^2 \;+\; 4\,s \;+\; 4} \;\;.$$

Στη συνέχεια βρίσκουμε από το πάνω τμήμα του διαγράμματος υλοποίησης τη σχέση της εξόδου του συστήματος $y(t)$ με το βοηθητικό σήμα $f(t)$. Αυτή είναι η

$$y(t) \;=\; \frac{\mathrm{d}\,f(t)}{\mathrm{d}\,t} \;-\; f(t) \;\;,$$

ή, ισοδύναμα, στο πεδίο του μετασχηματισμού Laplace,

$$\frac{Y(s)}{F(s)} \; = \; s \, - \, 1 \; .$$

Πολλαπλασιάζοντας τις δύο σχέσεις που εξήγαμε στο πεδίο του μετασχηματισμού Laplace παίρνουμε τη ζητούμενη συνάρτηση μεταφοράς ως

$$H(s) \; = \; \frac{Y(s)}{X(s)} \; = \; \frac{Y(s)}{F(s)} \, \frac{F(s)}{X(s)} \; = \; \frac{s \, - \, 1}{s^2 \, + \, 4\,s \, + \, 4} \; .$$

(b) Για τις ζητούμενες εναλλακτικές υλοποιήσεις του συστήματος πρέπει πρώτα να παραγοντοποιήσουμε το πολυώνυμο του παρονομαστή. Εύκολα βλέπουμε ότι

$$H(s) \; = \; \frac{s \, - \, 1}{s^2 \, + \, 4\,s \, + \, 4} \; = \; \frac{s \, - \, 1}{(\,s \, + \, 2\,)^2} \; .$$

Στη συνέχεια αναπτύσσουμε τη συνάρτηση μεταφοράς σε μερικά κλάσματα, και λόγω της διπλής ρίζας στον παρονομαστή παίρνουμε τελικά

$$H(s) \; = \; \frac{s \, - \, 1}{(\,s \, + \, 2\,)^2} \; = \; \frac{1}{s \, + \, 2} \, - \, \frac{3}{(\,s \, + \, 2\,)^2} \; = \; \frac{1}{s \, + \, 2} \, - \, \frac{3}{s^2 \, + \, 4\,s \, + \, 4} \; .$$

Η ανάπτυξη αυτή οδηγεί στην παράλληλη υλοποίηση του σχήματος (σε ξεχωριστό αρχείο).

Για μία εν σειρά υλοποίηση, γράφουμε τη συνάρτηση μεταφοράς ως

$$H(s) \; = \; \left(\frac{1}{s \, + \, 2} \right) \left(\frac{s \, - \, 1}{s \, + \, 2} \right) \; ,$$

που μας οδηγεί στην υλοποίηση του σχήματος (σε ξεχωριστό αρχείο).

(c) Η διαφορική εξίσωση που περιγράφει τη σχέση εισόδουεξόδου του συστήματος προκύπτει με απλή επισκόπηση από τη συνάρτηση μεταφοράς, ως

$$\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}\,t^2} \, + \, 4 \, \frac{\mathrm{d}\,y(t)}{\mathrm{d}\,t} \, + \, 4\,y(t) \; = \; \frac{\mathrm{d}\,x(t)}{\mathrm{d}\,t} \, - \, x(t) \; .$$

(d) Για να βρούμε την κρουστική απόκριση του συστήματος, και έχοντας ήδη αναλύσει τη συνάρτηση μεταφοράς σε μερικά κλάσματα σε προηγούμενο υπο-ερώτημα, παίρνουμε:

$$h(t) \; = \; \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s \, + \, 2} \, - \, \frac{3}{(\,s \, + \, 2\,)^2} \right\} \; = \; (\, e^{-2\,t} \, - \, 3\,t\,e^{-2\,t}\,)\,u(t) \; .$$

Καταλήξαμε στην παραπάνω χρησιμοποιώντας κατάλληλα ζεύγη μετασχηματισμού Laplace και γνώση της περιοχής σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος. Πράγματι, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση μεταφοράς έχει ένα διπλό πόλο στο -2 (όπως και ένα μηδενικό στο 1 και ένα ακόμη μηδενικό στο ∞). Καθώς μας δίνεται από την εκφώνηση ότι το σύστημα είναι ευσταθές, αυτό σημαίνει ότι η περιοχή σύγκλισης της παραπάνω συνάρτησης μεταφοράς είναι αυτή με $\mathcal{R}e\{\,s\,\} \; > \; -2$ (περιλαμβάνεται ο φανταστικός άξονας $s = j\,\Omega$ σε αυτήν). Η πληροφορία αυτή επιτρέπει τον υπολογισμό των αντίστροφων μετασχηματισμών των μερικών κλασμάτων.

Άσκηση 2.5: Έστω το αιτιατό σύστημα διακριτού χρόνου με συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{(2\,z^2 - 8\,z + 7)\,z^2}{(z-1)\,(z-2)^3} \quad .$$

(a) Σχεδιάστε το διάγραμμα πόλων και μηδενικών του συστήματος, όπως και την περιοχή σύγκλισης του $H(z)$. Είναι το σύστημα ευσταθές;

(b) Εκφράστε τη σχέση εισόδου-εξόδου του συστήματος ως εξίσωση διαφορών.

(c) Βρείτε την κρουστική απόκριση του συστήματος, $h[n]$.

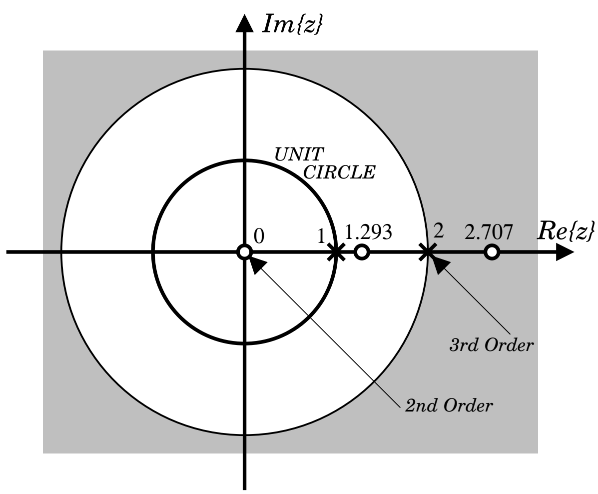
(d) Σχεδιάστε διαγράμματα υλοποίησης του συστήματος σε κανονική μορφή (direct form), εν παραλλήλω (in parallel), και εν σειρά (cascade).

Λύση:

(a) Είναι εύκολο να δούμε ότι το πολυώνυμο του παρονομαστή έχει μία τριπλή ρίζα στη θέση $z = 2$ και μία απλή ρίζα στη θέση $z = 1$. Εύκολα επίσης βλέπουμε ότι το πολυώνυμο του αριθμητή έχει μία διπλή ρίζα στη θέση $z = 0$, καθώς και ακόμη δύο ρίζες που προκύπτουν από το τριώνυμο $2\,z^2 - 8\,z + 7$ στις θέσεις $2 \pm \sqrt{2}/2 \approx 1.293$ και 2.707. Συνοψίζοντας λοιπόν το δοθέν σύστημα έχει 4 μηδενικά στις θέσεις $\{\,0\,,0\,,1.293\,,2.707\,\}$ και 4 πόλους στις θέσεις $\{\,1\,,2\,,2\,,2\,\}$. Το διάγραμμα πόλων και μηδενικών του έχει σχεδιαστεί στο παρακάτω σχήμα.

Επιπλέον, γνωρίζοντας ότι το σύστημα είναι αιτιατό συνεπάγεται ότι η περιοχή σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς του θα είναι στο εξωτερικό του κύκλου που διέρχεται από τον πόλο με το μεγαλύτερο μέτρο, δηλαδή $|\,z\,| > 2$. Η περιοχή αυτή είναι επισκιασμένη στο διάγραμμα πόλων και μηδενικών του συστήματος.

Τέλος είναι εμφανές ότι η περιοχή σύγκλισης δεν εμπεριέχει τον μοναδιαίο κύκλο, κατά συνέπεια το σύστημα είναι ασταθές (όπως εξάλλου είναι εμφανές και από την κρουστική του απόκριση, όπως υπολογίζεται σε επόμενο υπο-ερώτημα).



(b) Μπορούμε εύκολα να βρούμε την εξίσωση διαφορών που περιγράφει τη σχέση εισόδου-εξόδου του συστήματος αν εκφράσουμε τη συνάρτηση μεταφοράς ως λόγο δύο πολυωνύμων ως προς z^{-1}. Για να το πετύχουμε αυτό διαιρούμε τον αριθμητή και παρονομαστή της $H(z)$ της εκφώνησης με το z^4, οπότε παίρνουμε:

$$H(z) \;=\; \frac{(2\,z^2 - 8\,z + 7)/z^2}{((z-1)/z)\,((z-2)/z)^3} \;=\; \frac{2 \,-\, 8\,z^{-1} \,+\, 7\,z^{-2}}{(\,1 \,-\, z^{-1}\,)\,(\,1 \,-\, 2\,z^{-1}\,)^3}$$

$$= \; \frac{2 \,-\, 8\,z^{-1} \,+\, 7\,z^{-2}}{1 \,-\, 7\,z^{-1} \,+\, 18\,z^{-2} \,-\, 20\,z^{-3} \,+\, 8\,z^{-4}} \;\; .$$

Η εξίσωση διαφορών που αντιστοιχεί στη συνάρτηση μεταφοράς προκύπτει πλέον με προφανή τρόπο ως η:

$$y[n] - 7\,y[n{-}1] + 18\,y[n{-}2] - 20\,y[n{-}3] + 8\,y[n{-}4] \;=\; 2\,x[n] - 8\,x[n{-}1] + 7\,x[n{-}2] \;\; .$$

(c) Η ζητούμενη κρουστική απόκριση του συστήματος, $h[n]$, δίνεται από τον αντίστροφο μετασχηματισμό $\mathcal{Z}$ της συνάρτησης μεταφοράς του, $H(z)$, μαζί με γνώση της περιοχής σύγκλισής της, δηλ. $|\,z\,| > 2$, όπως διαπιστώθηκε στο πρώτο υπο-ερώτημα.

Ένας πρώτος τρόπος επίλυσης είναι να αναπτύξουμε την $H(z)$ σε μερικά κλάσματα ως εξής:

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{z\,(2\,z^2 - 8\,z + 7)}{(z-1)\,(z-2)^3} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2} + \frac{C}{(z-2)^2} + \frac{D}{(z-2)^3}.$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέρη επί $(z-1)$ και θέτοντας $z = 1$, προκύπτει $A = -1$. Πολλαπλασιάζοντας επί $(z-2)^3$ και θέτοντας $z = 2$, προκύπτει $D = -2$. Πολλαπλασιάζοντας επί z και υπολογίζοντας το όριο για $z \to \infty$, προκύπτει $2 = -1 + B$, ή $B = 3$. Τέλος, θέτοντας $z = 0$, έχουμε

$$0 = 1 - \frac{3}{2} + \frac{C}{4} + \frac{1}{4} \;\; ,$$

έτσι ώστε $C = 1$. Συνοψίζοντας λοιπόν, έχουμε:

$$H(z) = -\,\frac{z}{z-1} + \frac{3\,z}{z-2} + \frac{z}{(z-2)^2} - \frac{2\,z}{(z-2)^3} \;\; .$$

Δεδομένου ότι

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{(z-a)^{k+1}}\right\} = \frac{1}{a^k k!}\,n(n-1)\cdots(n-k+1)\,a^n u[n]$$

για $k \geq 1$ και για περιοχή σύγκλισης $|z| > |a|$, η ζητούμενη κρουστική απόκριση $h[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{\,H(z)\,\}$ δίνεται από:

$$h[n] \;=\; [\,-1 \,+\, 3\,.\,2^n \,+\, \frac{1}{2}\,n\,2^n \,-\, \frac{1}{4}\,n\,(n-1)\,2^n\,]\,u[n]$$

$$= \; [\,-1 \,+\, 3\,.\,2^n \,+\, \frac{3}{4}\,n\,2^n \,-\, \frac{1}{4}\,n^2\,2^n\,]\,u[n] \;\; ,$$

εφόσον, όπως προαναφέραμε, η περιοχή σύγκλισης της $H(z)$ είναι για $|z| > 2$.

Εναλλακτικά, μπορούμε να δουλέψουμε αναλύοντας σε μερικά κλάσματα ως προς $\upsilon = z^{-1}$. Από το υπο-ερώτημα (b) έχουμε:

$$H(z) \;=\; \frac{2-8\,\upsilon+7\,\upsilon^2}{(1-\upsilon)\,(1-2\,\upsilon)^3} \;=\; \frac{A_{11}}{1-\upsilon}+\frac{A_{21}}{1-2\,\upsilon}+\frac{A_{22}}{(1-2\,\upsilon)^2}+\frac{A_{23}}{(1-2\,\upsilon)^3} \;\;,$$

όπου το δεξιό μέρος προέκυψε με ανάπτυξη σε μερικά κλάσματα. Οι άγνωστοι συντελεστές του αναπτύγματος βρίσκονται εύκολα ως:

$$A_{11} = (1-\upsilon)\,\frac{2-8\upsilon+7\upsilon^2}{(1-\upsilon)\,(1-2\,\upsilon)^3}\bigg|_{\upsilon=1} = \;-1 \;\;,$$

$$A_{21} = \frac{1}{2!}\left(-\,\frac{1}{2}\right)^2\frac{d^2}{d\,\upsilon^2}\left[(1-2\,\upsilon)^3\,\frac{2-8\upsilon+7\upsilon^2}{(1-\upsilon)\,(1-2\,\upsilon)^3}\right]\bigg|_{\upsilon=1/2} = \;2 \;\;,$$

$$A_{22} = -\,\frac{1}{2}\,\frac{d}{d\,\upsilon}\left[(1-2\,\upsilon)^3\,\frac{2-8\upsilon+7\upsilon^2}{(1-\upsilon)\,(1-2\,\upsilon)^3}\right]\bigg|_{\upsilon=1/2} = \;\frac{3}{2} \;\;,$$

$$A_{23} = \;(1-2\,\upsilon)^3\,\frac{2-8\upsilon+7\upsilon^2}{(1-\upsilon)\,(1-2\,\upsilon)^3}\bigg|_{\upsilon=1/2} = \;-\,\frac{1}{2}\;,$$

κατά συνέπεια,

$$H(z) \;=\; -\,\frac{1}{1-z^{-1}} \;+\; \frac{2}{1-2\,z^{-1}} \;+\; \frac{3}{2}\,\frac{1}{(1-2\,z^{-1})^2} \;-\; \frac{1}{2}\,\frac{1}{(1-2\,z^{-1})^3} \;\;.$$

Χρησιμοποιώντας ιδιότητες του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$, παίρνοντας τα ακόλουθα ζεύγη:

$$2^n\,u[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-2\,z^{-1}} \quad\Rightarrow\quad n\,2^n\,u[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{2\,z^{-1}}{(1-2\,z^{-1})^2}$$

$$\Rightarrow\quad (n\,+\,1)\,2^n\,u[n] \;=\; (n\,+\,1)\,2^n\,u[n+1] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{(1-2\,z^{-1})^2}$$

και παραγωγίζοντας πάλι το τελευταίο, έχουμε (ακολουθώντας παράλληλα βήματα με τα παραπάνω):

$$(n\,+\,1)\,(n\,+\,2)\,2^n\,u[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{2}{(1-2\,z^{-1})^3} \;\;,$$

όπου φυσικά η περιοχή σύγκλισης όλων των μετασχηματισμών είναι η $|z| > 2$. Με βάση τα παραπάνω, είναι εύκολο να δούμε ότι:

$$\begin{aligned} h[n] \;&=\; [\,-1\;+\;2\,.\,2^n\;+\;\frac{3}{2}\,(n+1)\,2^n\;-\;\frac{1}{4}\,(n+1)\,(n+2)\,2^n\,]\,u[n] \\ &=\; [\,-1\;+\;3\,.\,2^n\;+\;\frac{3}{4}\,n\,2^n\;-\;\frac{1}{4}\,n^2\,2^n\,]\,u[n] \;\;, \end{aligned}$$

που είναι το ίδιο αποτέλεσμα με αυτό που βρήκαμε προηγουμένως.

(d) Το διάγραμμα υλοποίησης σε κανονική μορφή σχεδιάζεται εύκολα με βάση την μορφή της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος όπως αυτή έχει βρεθεί ως τμήμα της απάντησης στο υπο-ερώτημα (b). Το διάγραμμα αυτό εμφανίζεται στο σχήμα (βρίσκεται σε ξεχωριστό, συνοδευτικό αρχείο).

Μία υλοποίηση σε σειρά μπορεί να βασιστεί στην ακόλουθη παραγοντοποίηση της συνάρτησης μεταφοράς (φυσικά υπάρχουν πολλές εναλλακτικές!):

$$
\begin{aligned}
H(z) &= \frac{2 - 8z^{-1} + 7z^{-2}}{[\,(1 - z^{-1})(1 - 2z^{-1})\,]\,(1 - 2z^{-1})^2} \\
&= \left(\frac{2 - 8z^{-1} + 7z^{-2}}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}} \right) \left(\frac{1}{1 - 4z^{-1} + 4z^{-2}} \right) \; .
\end{aligned}
$$

Αυτή μας οδηγεί στην εν-σειρά υλοποίηση του σχήματος (βρίσκεται σε ξεχωριστό, συνοδευτικό αρχείο).

Τέλος, η παράλληλη υλοποίηση θα βασιστεί στην ανάπτυξη της συνάρτησης μεταφοράς σε μερικά κλάσματα. Όπως έχουμε δει στο υπο-ερώτημα (c),

$$
\begin{aligned}
H(z) &= -\frac{1}{1 - z^{-1}} + \frac{2}{1 - 2z^{-1}} + \frac{3}{2}\,\frac{1}{(1 - 2z^{-1})^2} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{(1 - 2z^{-1})^3} \\
&= -\frac{1}{1 - z^{-1}} + \frac{2}{1 - 2z^{-1}} + \frac{3/2}{1 - 4z^{-1} + 4z^{-2}} - \frac{1/2}{1 - 6z^{-1} + 12z^{-2} - 8z^{-3}} \; ,
\end{aligned}
$$

οδηγώντας μας στην (πολύ αναποτελεσματική!) εν-παραλλήλω υλοποίηση του σχήματος (βρίσκεται σε ξεχωριστό, συνοδευτικό αρχείο).

ΤΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗΣ ΤΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 2.4 ΚΑΙ 2.5 ΒΡΙΣΚΟΝΤΑΙ ΣΕ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΣΥΝΟΔΕΥΤΙΚΟ ΑΡΧΕΙΟ.
