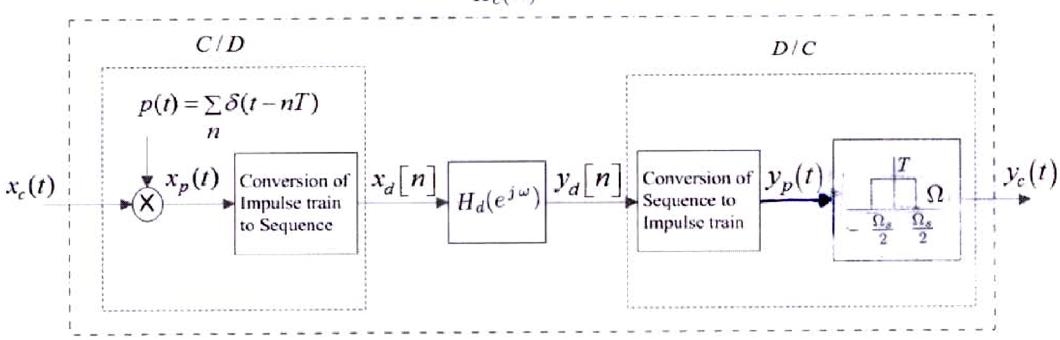
Άσκηση 3.1:

Θεωρούμε ένα ΓΧΑ σύστημα συνεχούς χρόνου με σήμα εισόδου $x_c(t)$ και σήμα εξόδου $y_c(t)$. Για να υλοποιήσουμε αυτό το σύστημα ψηφιακά, χρησιμοποιούμε τα εξής τρία στάδια:
- Δειγματοληψία του $x_c(t)$ και μετατροπή του σε σήμα διακριτού χρόνου $x_d[n]$.
- Επεξεργασία του $x_d[n]$ από ένα ΓΧΑ σύστημα διακριτού χρόνου με έξοδο το $y_d[n]$.
- Μετατροπή του $y_d[n]$ σε συνεχές σήμα $y_c(t)$ με πλήρη ανακατασκευή (παρεμβολή) συνεχούς σήματος από διακριτό σήμα (όπως προβλέπει το θεώρημα δειγματοληψίας).

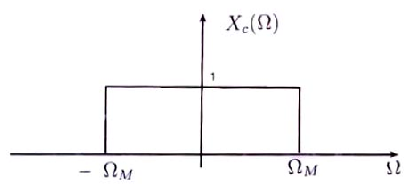
Τα στάδια αυτά φαίνονται παρακάτω. Θεωρούμε ότι το σήμα συνεχούς χρόνου στην είσοδο έχει πεπερασμένο εύρος ζώνης, δηλ., $X_c(\Omega) = 0$ για $|\Omega| \geq \Omega_M$. Επίσης η δειγματοληψία του γίνεται με συχνότητα $\Omega_s = 3\Omega_M$. Το διακριτό σύστημα περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y_d[n] = \frac{1}{3}\left(x_d[n-1] + x_d[n] + x_d[n+1]\right) \quad .$$



(a) Να σχεδιάσετε τα φάσματα των σημάτων $x_p(t)$, $x_d[n]$, $y_d[n]$, $y_p(t)$ και $y_c(t)$ για όλα τα στάδια της επεξεργασίας, σημειώνοντας κρίσιμες τιμές στους άξονες, αν το φάσμα του σήματος εισόδου $x_c(t)$ δίνεται από το παρακάτω σχήμα (εξηγήστε αναλυτικά).

(b) Να βρείτε την ισοδύναμη απόκριση συχνότητας του συστήματος συνεχούς χρόνου $H_c(\Omega) = Y_c(\Omega)/X_c(\Omega)$.



Λύση:

(a) Ξεκινάμε με τα ζητούμενα φάσματα, ένα προς ένα, από τα δεξιά προς τα αριστερά του σχήματος. Παρατηρούμε από την εκφώνηση της άσκησης ότι $T = 2\pi/\Omega_s = 2\pi/(3\Omega_M)$. Στην συνέχεια έχουμε:

- Για το φάσμα του $x_p(t)$ παρατηρούμε πως:

$$x_p(t) = [\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\delta(t-nT)] \cdot x_c(t) \;\Rightarrow\; \mathcal{F}\{x_p(t)\} = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\{\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\delta(t-nT)\} * X_c(\Omega)$$

$$\Rightarrow \quad X_p(\Omega) \;=\; \frac{1}{2\,\pi}\,\frac{2\,\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\delta(\Omega - \frac{2\,\pi\,n}{T}) * X_c(\Omega) \;=\; \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}[X_c(\Omega) * \delta(\Omega - n\,\Omega_s)]$$

$$= \; \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} X_c(\Omega \;-\; n\,\Omega_s) \;\;,$$

το διάγραμμα του οποίου δίνεται στο παρακάτω σχήμα. Παρατηρούμε πως λόγω των δεδομένων της άσκησης δεν υπάρχει φαινόμενο αναδίπλωσης ($\Omega_s = 3\,\Omega_M$), παρατηρείται επίσης κενό πλάτους Ω_M μεταξύ των επαναλήψεων μη μηδενικού φάσματος.

- Συνεχίζουμε τώρα με το φάσμα του διακριτού σήματος $x_d[n]$. Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι:

$$X_d(e^{j\,\omega}) = X_p(\omega/T) \;\Rightarrow\; X_d(e^{j\,\omega}) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} X_c\,(\frac{\omega - 2\,\pi\,n}{T}) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} X_c\,(\frac{\Omega_s}{2\,\pi}\,\omega - n\,\Omega_s) \;\;,$$

το διάγραμμα του οποίου δίνεται στο παρακάτω σχήμα. Παρατηρούμε φυσικά ότι το φάσμα έχει περίοδο $2\,\pi$. Το ότι $X_d(e^{j\,\omega}) = X_p(\omega/T)$ μπορεί να δειχθεί εύκολα επειδή $x_d[n] = x_c(n\,T)$ και αν συγκρίνουμε το:

$$x_p(t) \;=\; [\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\delta(t \;-\; n\,T)\,]\;.\;x_c(t) \;\;=\;\; \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x_c(n\,T)\;\delta(t \;-\; n\,T)$$

$$\Rightarrow \quad X_p(\Omega) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x_c(n\,T)\;e^{-j\,\Omega\,n\,T}$$

με το:

$$X_d(e^{j\,\omega}) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x_d[n]\;e^{-j\,\omega\,n} \;=\; \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x_c(n\,T)\;e^{-j\,\omega\,n} \;\;.$$

- Συνεχίζουμε τώρα με το φάσμα του διακριτού σήματος $y_d[n]$. Από την εκφώνηση της άσκησης έχουμε:

$$Y_d(e^{j\,\omega}) \;\;=\;\; \frac{1}{3}\;\left(\,X_d(e^{j\,\omega})\;e^{-j\,\omega} \;+\; X_d(e^{j\,\omega}) \;+\; X_d(e^{j\,\omega})\;e^{j\,\omega}\right)$$

$$\Rightarrow \quad H_d(e^{j\,\omega}) \;\;=\;\; \frac{Y_d(e^{j\,\omega})}{X_d(e^{j\,\omega})} \;\;=\;\; \frac{e^{-j\,\omega} \;+\; 1 \;-\; e^{j\,\omega}}{3} \;\;=\;\; \frac{1}{3}\,(\;1 \;+\; 2\;\cos\,\omega\;) \;\;.$$

Συνεπώς:

$$Y_d(e^{j\,\omega}) \;\;=\;\; X_d(e^{j\,\omega})\;H_d(e^{j\,\omega}) \;\;=\;\; \frac{1}{3\,T}\,(\;1 \;+\; 2\;\cos\,\omega\;)\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} X_c\,(\frac{\omega - 2\,\pi\,n}{T}) \;\;.$$

Παρατηρούμε πως ισοδύναμα έχουμε:

$$Y_d(e^{j\,\omega}) \;\;= \begin{cases} \dfrac{1}{3\,T}\,(\;1 \;+\; 2\;\cos\,\omega\;), \;\; \text{για} \;\; |\omega| \leq 2\pi/3 \\ 0\,, \;\; \text{για} \;\; 2\pi/3 < |\omega| \leq \pi \quad , \end{cases}$$

φυσικά με περιοδική επανάληψη κάθε $2\,\pi$.

- Συνεχίζουμε τώρα με το φάσμα του συνεχούς σήματος $y_p(t)$. Παρόμοια με παραπάνω, μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$Y_p(\Omega) \;=\; Y_d(e^{j\,\Omega\,T}) \;=\; \frac{1}{3\,T}\,(\,1\,+\,2\,\cos\,(\,2\,\pi\,\frac{\Omega}{\Omega_s}\,)\,)\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} X_c(\Omega\,-\,n\,\Omega_s)\;\;,$$

  το διάγραμμα του οποίου δίνεται στο παρακάτω σχήμα.

- Τέλος, το τελευταίο φίλτρο της σειράς επεξεργασίας έχει σαν αποτέλεσμα να υπάρξει μη μηδενικό φάσμα εξόδου μόνο στο διάστημα $[-\Omega_s/2\,,\,\Omega_s/2\,]$, κατά συνέπεια:

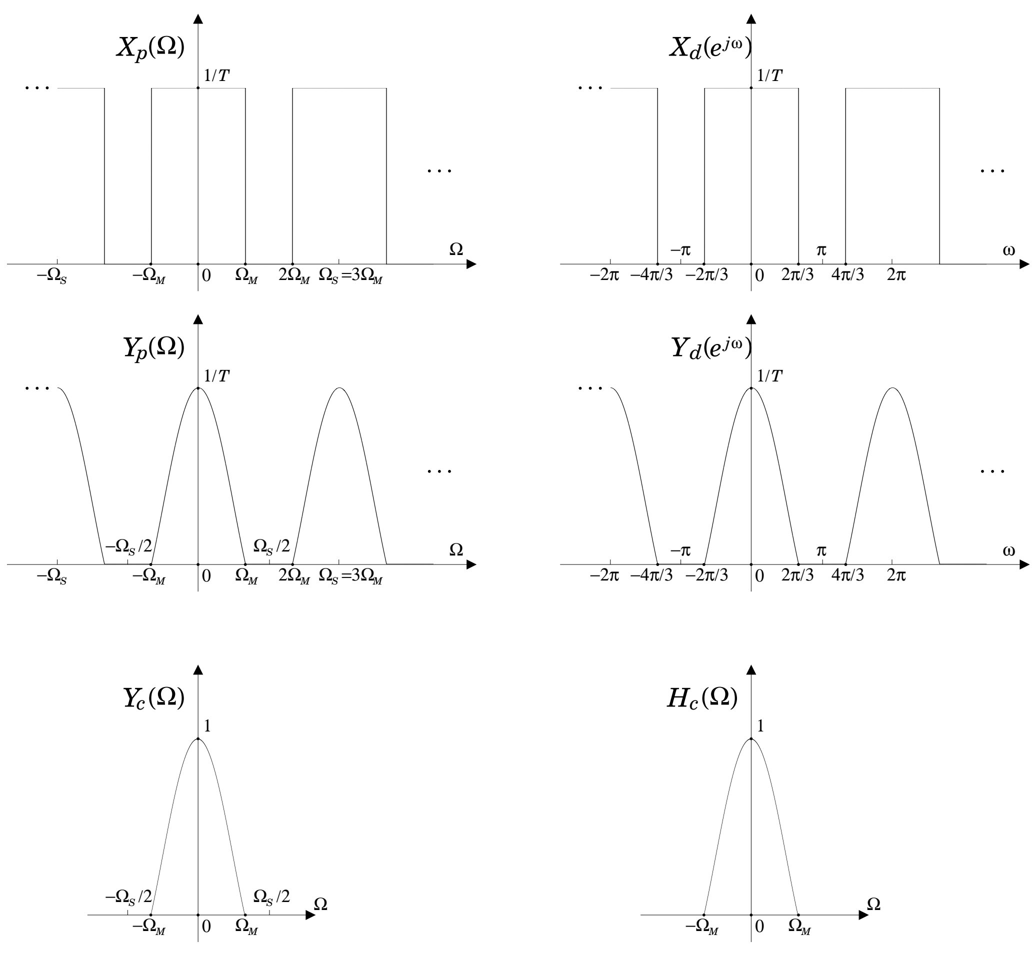
$$Y_c(\Omega) \;=\; T\,\frac{1}{3\,T}\,(\,1\,+\,2\,\cos\,(\,2\,\pi\,\frac{\Omega}{\Omega_s}\,)\,)\;X_c(\Omega) \;=\frac{1}{3}\,(\,1\,+\,2\,\cos\,(\,2\,\pi\,\frac{\Omega}{\Omega_s}\,)\,)\;X_c(\Omega)\;\;,$$

  το διάγραμμα του οποίου δίνεται στο παρακάτω σχήμα.

(b) Με βάση το τελευταίο από τα φάσματα που υπολογίσαμε παραπάνω, είναι προφανές ότι:

$$H_c(\Omega) \;=\; \frac{Y_c(\Omega)}{X_c(\Omega)} \;=\; \begin{cases} \frac{1}{3}\,(\,1\,+\,2\,\cos\,(\,\frac{2\,\pi\,\Omega}{3\,\Omega_M}\,)\,)\,, & \text{για } |\Omega| \le \Omega_M \\ 0\,, \;\text{για } |\Omega| > \Omega_M & . \end{cases}$$

Η ισοδύναμη αυτή απόκριση συχνότητας του συστήματος συνεχούς χρόνου είναι σχεδιασμένη στο παρακάτω σχήμα.



Άσκηση 3.2:

Βρείτε την κρουστική απόκριση $h(t)$ του αιτιατού, Γ.Χ.Α. συστήματος συνεχούς χρόνου που ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} - 6\frac{dy(t)}{dt} + 9y(t) = \frac{dx(t)}{dt} - x(t) \ .$$

Ορίζεται η απόκριση συχνότητας $H(\Omega)$ του παραπάνω συστήματος; Είναι το σύστημα ευσταθές;

Λύση: Εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό Laplace επί της δοθείσας διαφορικής εξίσωσης, και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της γραμμικότητας και παραγώγισης στο πεδίο του χρόνου, παίρνουμε:

$$s^2\,Y(s) \ - \ 6\,s\,Y(s) \ + \ 9\,Y(s) \ = \ s\,X(s) \ - X(s) \ ,$$

συνεπώς:

$$H(s) \ = \ \frac{Y(s)}{X(s)} \ = \ \frac{s-1}{s^2 \ - \ 6\,s \ + \ 9} \ = \ \frac{s-1}{(s-3)^2} = \frac{1}{s-3} \ + \ \frac{2}{(s-3)^2} \ ,$$

όπως προκύπτει εύκολα με ανάλυση σε μερικά κλάσματα.
Παρατηρούμε πως επειδή το σύστημα είναι αιτιατό, η ρητή συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ που είναι ο μετασχηματισμός Laplace μίας δεξιάς κρουστικής απόκρισης $h(t)$ θα έχει περιοχή σύγκλισης στα δεξιά του πιο δεξιού πόλου, δηλαδή θα συγκλίνει για $\mathrm{Re}\{\,s\,\} > 3$. Η περιοχή αυτή σύγκλισης δεν περιλαμβάνει τον φανταστικό άξονα, άρα ο μετασχηματισμός Fourier $H(\Omega)$ (απόκριση συχνότητας) δεν υπάρχει!
Ωστόσο η κρουστική απόκριση υπάρχει και δίνεται από:

$$h(t) \ = \ \mathcal{L}^{-1}\{\,H(s)\,\} \ = \ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3} \ + \ \frac{2}{(s-3)^2}\right\} \ = \ e^{3\,t}u(t) \ + \ 2\,t\,e^{3\,t}u(t) \ ,$$

λόγω της περιοχής σύγκλισης που ορίσαμε παραπάνω (λόγω αιτιατότητας). Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε ότι το σύστημα δεν είναι ευσταθές.

Άσκηση 3.3:

Προσδιορίστε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Z της παρακάτω συνάρτησης $X(z)$ με περιοχή σύγκλισης:

$$X(z) = \frac{(2\,z^2 - 8\,z + 7)\,z^2}{(z-1)\,(z-2)^3}, \quad |z| > 2.$$

Λύση: Ένας πρώτος τρόπος επίλυσης είναι να αναπτύξουμε τη συνάρτηση $X(z)$ σε μερικά κλάσματα ως εξής:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z\,(2\,z^2 - 8\,z + 7)}{(z-1)\,(z-2)^3} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2} + \frac{C}{(z-2)^2} + \frac{D}{(z-2)^3}.$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέρη επί $(z-1)$ και θέτοντας $z = 1$, προκύπτει $A = -1$. Πολλαπλασιάζοντας επί $(z-2)^3$ και θέτοντας $z = 2$, προκύπτει $D = -2$. Πολλαπλασιάζοντας επί z και υπολογίζοντας το όριο για $z \to \infty$, προκύπτει $2 = -1 + B$, ή $B = 3$. Τέλος, θέτοντας $z = 0$, έχουμε

$$0 = 1 - \frac{3}{2} + \frac{C}{4} + \frac{1}{4} \;,$$

έτσι ώστε $C = 1$. Συνοψίζοντας, έχουμε:

$$X(z) = -\frac{z}{z-1} + \frac{3\,z}{z-2} + \frac{z}{(z-2)^2} - \frac{2\,z}{(z-2)^3} \;.$$

Δεδομένου ότι

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{(z-a)^{k+1}}\right\} = \frac{1}{a^k k!}\,n(n-1)\cdots(n-k+1)\,a^n u[n]$$

για $k \geq 1$ και για περιοχή σύγκλισης $|z| > |a|$, το σήμα $x[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{\,X(z)\,\}$ δίνεται από:

$$\begin{aligned} x[n] \;&=\; [\,-1 \;+\; 3\,.\,2^n \;+\; \frac{1}{2}\,n\,2^n \;-\; \frac{1}{4}\,n\,(n-1)\,2^n\,]\,u[n] \\ &=\; [\,-1 \;+\; 3\,.\,2^n \;+\; \frac{3}{4}\,n\,2^n \;-\; \frac{1}{4}\,n^2\,2^n\,]\,u[n] \;, \end{aligned}$$

εφόσον η περιοχή σύγκλισης της $X(z)$ είναι $|z| > 2$.

Εναλλακτικά μπορούμε να δουλέψουμε αναλύοντας σε μερικά κλάσματα ως προς $\upsilon = z^{-1}$. Διαιρώντας αριθμητή και παρανομαστή με το z^4 παίρνουμε:

$$X(z) = \frac{1}{8}\,\frac{2 - 8\upsilon + 7\upsilon^2}{(\upsilon-1)\,(\upsilon-0.5)^3} = \frac{A_{11}}{\upsilon-1} + \frac{A_{21}}{\upsilon-0.5} + \frac{A_{22}}{(\upsilon-0.5)^2} + \frac{A_{23}}{(\upsilon-0.5)^3} \;.$$

Χρησιμοποιούμε στην συνέχεια τους γνωστούς τύπους για την ανάπτυξη σε μερικά κλάσματα και παίρνουμε:

$$A_{11} = (\upsilon-1)\,\frac{1}{8}\,\frac{2 - 8\upsilon + 7\upsilon^2}{(\upsilon-1)\,(\upsilon-0.5)^3}\Bigg|_{\upsilon=1} = \;1\;,$$

$$A_{21} = \frac{1}{2!}\,\frac{d^2}{d\,\upsilon^2}\,\left[\,(\upsilon-0.5)^3\,\frac{1}{8}\,\frac{2 - 8\upsilon + 7\upsilon^2}{(\upsilon-1)\,(\upsilon-0.5)^3}\,\right]\Bigg|_{\upsilon=1/2} = \;-1\,,$$

$$A_{22} = \frac{1}{1!}\,\frac{d}{d\,\upsilon}\,\left[\,(\upsilon-0.5)^3\,\frac{1}{8}\,\frac{2-8\upsilon+7\upsilon^2}{(\upsilon-1)\,(\upsilon-0.5)^3}\,\right]\Bigg|_{\upsilon=1/2} = \frac{3}{8}\,,$$

$$A_{23} = (\upsilon-0.5)^3\,\frac{1}{8}\,\frac{2-8\upsilon+7\upsilon^2}{(\upsilon-1)\,(\upsilon-0.5)^3}\Bigg|_{\upsilon=1/2} = \frac{1}{16}\,,$$

κατά συνέπεια,

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{1}{z^{-1}-1} - \frac{1}{z^{-1}-\frac{1}{2}} + \frac{3}{8}\,\frac{1}{(z^{-1}-\frac{1}{2})^{2}} + \frac{1}{16}\,\frac{1}{(z^{-1}-\frac{1}{2})^{3}} \\ &= -\frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{2}{1-2\,z^{-1}} + \frac{3}{2}\,\frac{1}{(1-2\,z^{-1})^{2}} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{(1-2\,z^{-1})^{3}}\;. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας ιδιότητες του μετασχηματισμού Z, παίρνοντας τα ακόλουθα ζεύγη:

$$2^{n}\,u[n] \stackrel{z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-2\,z^{-1}} \;\;\Rightarrow\;\; n\,2^{n}\,u[n] \stackrel{z}{\longleftrightarrow} \frac{2\,z^{-1}}{(1-2\,z^{-1})^{2}}$$

$$\Rightarrow\;\; (n+1)\,2^{n}\,u[n] = (n+1)\,2^{n}\,u[n+1] \stackrel{z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{(1-2\,z^{-1})^{2}}$$

και παραγωγίζοντας πάλι το τελευταίο, έχουμε (ακολουθώντας παράλληλα βήματα με τα παραπάνω):

$$(n+1)\,(n+2)\,2^{n}\,u[n] \stackrel{z}{\longleftrightarrow} \frac{2}{(1-2\,z^{-1})^{3}}\;\;,$$

όπου φυσικά η περιοχή σύγκλισης όλων των μετασχηματισμών είναι η $|z| > 2$. Με βάση τα παραπάνω, είναι εύκολο να δούμε ότι:

$$\begin{aligned} x[n] &= [\,-1 + 2\,.\,2^{n} + \frac{3}{2}\,(n+1)\,2^{n} - \frac{1}{4}\,(n+1)\,(n+2)\,2^{n}\,]\,u[n] \\ &= [\,-1 + 3\,.\,2^{n} + \frac{3}{4}\,n\,2^{n} - \frac{1}{4}\,n^{2}\,2^{n}\,]\,u[n]\;\;, \end{aligned}$$

που είναι το ίδιο αποτέλεσμα με αυτό που βρήκαμε προηγουμένως.

Άσκηση 3.4:

Έστω ένα Γ.Χ.Α. σύστημα διακριτού χρόνου με σχέση εισόδου-εξόδου

$$y[n] - 3\,y[n-2] + 2\,y[n-3] = x[n] + 4\,x[n-1] + 3\,x[n-2]$$

και με μηδενικές αρχικές συνθήκες.

(a) Προσδιορίστε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ του συστήματος και υπολογίστε την τιμή της για $z = 1$.

(b) Ποιοί είναι οι πόλοι και τα μηδενικά του συστήματος; Είναι το σύστημα ευσταθές;

(c) Προσδιορίστε τη βηματική απόκριση του συστήματος.

Λύση:

(a) Εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό Z και στα δύο μέρη της σχέσης εισόδου-εξόδου, παίρνουμε:

$$Y(z) \;-\; 3\,z^{-2}\,Y(z) \;+\; 2\,z^{-3}\,Y(z) \;=\; X(z) \;+\; 4\,z^{-1}\,X(z) \;+\; 3\,z^{-2}\,X(z) \;\;,$$

οπότε η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος βρίσκεται εύκολα ως:

$$H(z) \;=\; \frac{Y(z)}{X(z)} \;=\; \frac{1 \,+\, 4\,z^{-1} \,+\, 3\,z^{-2}}{1 \,-\, 3\,z^{-2} \,+\, 2\,z^{-3}} \;=\; \frac{z\,(z^2 \,+\, 4\,z \,+\, 3)}{z^3 \,-\, 3\,z \,+2} \;=\; \frac{z\,(z+1)\,(z+3)}{(z-1)^2\,(z+2)} \;\;.$$

Παρατηρούμε ότι για $z \,=\, 1$ ο παρανομαστής μηδενίζεται, ενώ ο αριθμητής είναι μη μηδενικός. Συνεπώς η συνάρτηση μεταφοράς δεν συγκλίνει στην τιμή αυτή, καθόσον απειρίζεται (δηλ. το $z \,=\, 1$ είναι πόλος της και όχι μηδενικό της).

(b) Με βάση τα παραπάνω, το σύστημα έχει ένα διπλό πόλο στο $+1$ και έναν πόλο στο -2. Επίσης το σύστημα έχει τρία μηδενικά στα 0, -1, και -3. Το σύστημα είναι κατά συνέπεια ασταθές καθόσον ο μοναδιαίος κύκλος δεν ανήκει στην περιοχή σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς (η οποία είναι $|z| > 2$, λόγω των μηδενικών αρχικών συνθηκών).

(c) Η βηματική απόκριση του συστήματος είναι η έξοδός του σε είσοδο $x[n] \,=\, u[n]$. Κάνουμε τους υπολογισμούς στο πεδίο του μετασχηματισμού Z, και έχουμε:

$$Y(z) \;=\; H(z)\,X(z) \;=\; \frac{z\,(z+1)\,(z+3)}{(z-1)^2\,(z+2)}\;\frac{z}{z-1} \;=\; \frac{z^2\,(z^2 \,+\, 4\,z \,+\, 3)}{(z-1)^3\,(z+2)} \;\;,$$

με περιοχή σύγκλισης $|z| > 2$. Για να βρούμε την $y[n]$, ακολουθούμε τον τρόπο επίλυσης της Άσκησης 3.3. Γράφουμε λοιπόν:

$$\frac{Y(z)}{z} \;=\; \frac{z\,(z^2 \,+\, 4\,z \,+\, 3)}{(z-1)^3\,(z+2)} \;=\; \frac{A}{z-1} \;+\; \frac{B}{(z-1)^2} \;+\; \frac{C}{(z-1)^3} \;+\; \frac{D}{(z+2)} \;\;.$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέρη επί $(z+2)$ και θέτοντας $z \,=\, -2$, προκύπτει $D = -2/27$. Πολλαπλασιάζοντας επί $(z \,-\, 1)^3$ και θέτοντας $z \,=\, 1$, προκύπτει $C \,=\, 8/3$.

Πολλαπλασιάζοντας επί z και υπολογίζοντας το όριο για $z \to \infty$, προκύπτει $1 = A - 2/27$, ή $A = 29/27$. Τέλος, θέτοντας $z = 0$, έχουμε

$$0 \;=\; -\,\frac{29}{27} \,+\, B \,-\, \frac{8}{3} \,-\, \frac{1}{27} \;\;,$$

έτσι ώστε $B = 34/9$. Συνοψίζοντας, έχουμε:

$$\begin{aligned} Y(z) \;&=\; \frac{29}{27}\,\frac{z}{z-1} \,+\, \frac{34}{9}\,\frac{z}{(z-1)^{\,2}} \,+\, \frac{8}{3}\,\frac{z}{(z-1)^{\,3}} \,-\, \frac{2}{27}\,\frac{z}{(z+2)} \\ &=\; \frac{29}{27}\,\frac{z}{z-1} \,+\, \frac{102}{27}\,\frac{z}{(z-1)^{\,2}} \,+\, \frac{72}{27}\,\frac{z}{(z-1)^{\,3}} \,-\, \frac{2}{27}\,\frac{z}{(z+2)} \;\;. \end{aligned}$$

Δεδομένου ότι

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{(z-a)^{k+1}}\right\} = \frac{1}{a^k k!}\, n(n-1)\cdots(n-k+1)\, a^n u[n]$$

για $k \geq 1$ και για περιοχή σύγκλισης $|z| > |a|$, η ζητούμενη βηματική απόκριση $y[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{\, Y(z)\,\}$ δίνεται από:

$$\begin{aligned} y[n] \;&=\; [\,\frac{29}{27} \,+\, \frac{102}{27}\,n \,+\, \frac{36}{27}\,n(n-1) \,+\, \frac{1}{27}\,(-2)^{\,n+1}\,]\,u[n] \\ &=\; [\,\frac{29}{27} \,+\, \frac{11}{9}\,n \,+\, \frac{4}{3}\,n^{\,2} \,+\, \frac{1}{27}\,(-2)^{\,n+1}\,]\,u[n]\;, \end{aligned}$$

εφόσον η περιοχή σύγκλισης της $Y(z)$ είναι $|z| > 2$.

Άσκηση 3.5:

(a) Έστω το σήμα $x[n]$, $n = 0, ..., N-1$, και $X[k]$ ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier N σημείων του σήματος. Αν το σήμα αποτελεί συμμετρική ακολουθία, δηλαδή $x[n] = x[N-1-n]$ και το N είναι άρτιος αριθμός, υπολογίστε την τιμή $X[N/2]$.

(b) Έστω το σήμα $x[n]$, $n = 0, ..., N-1$, και $X[k]$ ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier N σημείων του σήματος. Αν το σήμα ικανοποιεί την σχέση $x[m] = -\,x[m+N/2]$ για $m = 0, ..., (N/2)-1$, και το N είναι άρτιος αριθμός, δείξτε ότι η τιμή του $X[2\,m] = 0$.

Λύση:

(a) Από τον ορισμό του διακριτού μετασχηματισμού Fourier έχουμε στην τιμή $k = N/2$ (που είναι ακέραια καθόσον ο N είναι άρτιος):

$$
\begin{aligned}
X[\,\frac{N}{2}\,] \;&=\; \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\,\frac{2\,\pi\,n\,N/2}{N}} \;=\; \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\,\pi\,n} \;=\; \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\,(-1)^{n} \\
&=\; x[0] \;-\; x[1] \;+\; x[2] \;-\; ... \;-\; x[N-1] \\
&=\; (\,x[0] - x[N-1]\,) \;-\; (\,x[1] - x[N-2]\,) \;+\; ... \;\pm\; (\,x[\frac{N}{2}-1] - x[\frac{N}{2}]\,) \\
&=\; 0\,.\,\frac{N}{2} \;=\; 0\,,
\end{aligned}
$$

όπου στις πράξεις παραπάνω χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι ο $N-1$ είναι περιττός αριθμός. Παρατηρούμε επίσης ότι το πρόσημο του τελευταίου αθροίσματος εξαρτάται από το εάν το $N/2$ είναι άρτιος ή περιττός, αλλά φυσικά αυτό δεν αλλάζει το αποτέλεσμα.

(b) Από τον ορισμό του διακριτού μετασχηματισμού Fourier, και θέτοντας $K = N/2$, που είναι ακέραιος (λόγω αρτιότητας του N):

$$
\begin{aligned}
X[\,2\,m\,] \;&=\; \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\; e^{-j\,\frac{2\,\pi\,n\,2\,m}{N}} \;=\; \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\; e^{-j\,\frac{\pi}{K}\,2\,n\,m} \\
&=\; \sum_{n=0}^{K-1} (\,x[n]\; e^{-j\,\frac{\pi}{K}\,2\,n\,m} \;+\; x[K+n]\; e^{-j\,\frac{\pi}{K}\,2\,(n+K)\,m}\,) \\
&=\; \sum_{n=0}^{K-1} (\,x[n]\; e^{-j\,\frac{\pi}{K}\,2\,n\,m} \;-\; x[n]\; e^{-j\,\frac{\pi}{K}\,2\,n\,m}\; e^{-j\,2\,\pi\,m}\,) \\
&=\; \sum_{n=0}^{K-1} (\,x[n]\; e^{-j\,\frac{\pi}{K}\,2\,n\,m} \;-\; x[n]\; e^{-j\,\frac{\pi}{K}\,2\,n\,m}\,) \;=\; K.\,0 \;=\; 0\,,
\end{aligned}
$$

όπου κάναμε χρήση του δεδομένου $x[n] \;=\; -\,x[n+N/2] \;=\; -\,x[n+K]$.