
Άσκηση 2.1(a): Υπολογισμός μετασχηματισμού Fourier του $x(t) = \dfrac{\mathrm{d}\,\delta(t)}{\mathrm{d}\,t} + 5\,\delta(2-5\,t)$.

Λύση:

Επειδή $\delta(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} 1$, έχουμε $\dfrac{\mathrm{d}\,\delta(t)}{\mathrm{d}\,t} \overset{F}{\longleftrightarrow} j\Omega.1 = j\Omega$ και

$$5\,\delta(2-5\,t) = 5\,\delta(-5(t-2/5)) \overset{F}{\longleftrightarrow} 5\frac{1}{|-5|}e^{-j\,\Omega\,2/5}.1 = e^{-j\,\Omega\,2/5} .$$

Κατά συνέπεια, $X(\Omega) = j\,\Omega + e^{-j\,\Omega\,2/5}$.

Άσκηση 2.1(b): Υπολογισμός μετασχηματισμού Fourier του $x(t) = t\,e^{-2\,t}\cos(t)\,u(t)$.

Λύση:

Το πρόβλημα μπορεί να λυθεί με δύο τρόπους. Ο πρώτος χρησιμοποιεί τον τύπο του Euler για το συνημίτονο, οπότε έχουμε:

$$t\,e^{-2\,t}\cos(t)\,u(t) \;=\; t\,e^{-2\,t}\,\frac{(e^{jt}+e^{-jt})}{2}\,u(t) \;=\; \frac{1}{2}\,t\,e^{-t(2-j)}u(t) \;+\; \frac{1}{2}\,t\,e^{-t(2+j)}u(t) \;.$$

Καθόσον $t\,e^{-at}u(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 1/(a+j\Omega)^2$, εάν $Re\{a\} > 0$ (πράγμα το οποίο ισχύει στην περίπτωσή μας), από την παραπάνω παίρνουμε:

$$X(\Omega) \;=\; \frac{1}{2}\,\frac{1}{(2-j+j\Omega)^2} \;+\; \frac{1}{2}\,\frac{1}{(2+j+j\Omega)^2} \;=\; \frac{1}{2}\,\frac{1}{(2+j(\Omega-1))^2} \;+\; \frac{1}{2}\,\frac{1}{(2+j(\Omega+1))^2} \;.$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι $x(t) = x_1(t)x_2(t)$, όπου $x_1(t) = t\,e^{-2\,t}u(t)$ και $x_2(t) = \cos(t)$. Κατά συνέπεια,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{x(t)\} \;&=\; \frac{1}{2\pi}\,[\mathcal{F}\{x_1(t)\} * \mathcal{F}\{x_2(t)\}] \;=\; \frac{1}{2\pi}\,[\,\frac{1}{(2+j\Omega)^2} * \pi(\delta(\Omega-1)+\delta(\Omega+1))\,] \\ &=\; \frac{1}{2}\,\frac{1}{(2+j\Omega)^2} * \delta(\Omega-1) \;+\; \frac{1}{2}\,\frac{1}{(2+j\Omega)^2} * \delta(\Omega+1) \\ &=\; \frac{1}{2}\,\frac{1}{(2+j(\Omega-1))^2} \;+\; \frac{1}{2}\,\frac{1}{(2+j(\Omega+1))^2} \;,\end{aligned}$$

από την γνωστή ιδιότητα συνέλιξης με την κρουστική συνάρτηση.

Άσκηση 2.1(c): Υπολογισμός μετασχηματισμού Fourier του $x(t) = \begin{cases} \dfrac{t+1}{2}\,, & \text{για } |t| \leq 1 \\ 0\,, & \text{αλλού} \end{cases}$.

Λύση:

Ας θεωρήσουμε $x_1(t) = \begin{cases} 1/2\,, & \text{για } |t| \leq 1 \\ 0\,, & \text{αλλού} \end{cases}$. Τότε, $x(t) = t\,x_1(t) + x_1(t)$. Συνεπώς, και αν θυμηθούμε ότι $\mathcal{F}\{x_1(t)\} = (\sin\Omega)/\Omega$, λαμβάνουμε, χρησιμοποιώντας και την ιδιότητα της παραγώγισης στο πεδίο της συχνότητας:

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = j\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\Omega}\left(\frac{\sin\Omega}{\Omega}\right) + \frac{\sin\Omega}{\Omega} = \left(j\,\frac{\cos\Omega}{\Omega} - j\,\frac{\sin\Omega}{\Omega^2}\right) + \frac{\sin\Omega}{\Omega}$$

$$= \frac{\sin\Omega}{j\,\Omega^2} - \frac{\cos\Omega - j\sin\Omega}{j\,\Omega} = \frac{\sin\Omega}{j\,\Omega^2} - \frac{e^{-j\,\Omega}}{j\,\Omega} .$$

Άσκηση 2.1(d): Υπολογισμός αντίστροφου μ/σμού Fourier του $X(\Omega) = \cos^2(2\,\Omega + \pi/5)$.

Λύση:

Παρατηρούμε πως επειδή $2\,\cos^2(\theta) = 1 + \cos(2\,\theta)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\{\cos^2(2\,\Omega + \pi/5)\} &= \mathcal{F}^{-1}\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(4\,\Omega + 2\,\pi/5)\} \\ &= \mathcal{F}^{-1}\{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(e^{j\,(4\,\Omega + 2\,\pi/5)} + e^{-j\,(4\,\Omega + 2\,\pi/5)})\} \\ &= \mathcal{F}^{-1}\{\frac{1}{4}\,e^{-j\,2\,\pi/5}\,e^{-4\,j\,\Omega} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\,e^{j\,2\,\pi/5}\,e^{4\,j\,\Omega}\} \\ &= \frac{1}{4}\,e^{-j\,2\,\pi/5}\,\delta(t-4) + \frac{1}{2}\,\delta(t) + \frac{1}{4}\,e^{j\,2\,\pi/5}\,\delta(t+4) . \end{aligned}$$

Άσκηση 2.1(e): Υπολογισμός αντίστροφου μ/σμού Fourier του $X(\Omega) = \dfrac{e^{-j\,\Omega}}{\Omega^2 + 5}$.

Λύση:

Ως γνωστό, ο μετασχηματισμός Fourier του $x(t) = e^{-a|t|}$ είναι ο $X(\Omega) = 2a/(a^2 + \Omega^2)$ (για $a > 0$). Κατά συνέπεια, έχουμε:

$$\mathcal{F}^{-1}\{\frac{1}{\Omega^2 + 5}\} = \mathcal{F}^{-1}\{\frac{1}{2\sqrt{5}}\,\frac{2\sqrt{5}}{\Omega^2 + (\sqrt{5})^2}\} = \frac{1}{2\sqrt{5}}\,e^{-\sqrt{5}\,|t|} .$$

Κάνοντας χρήση και της ιδιότητας μετατόπισης στο χρόνο, παίρνουμε:

$$\mathcal{F}^{-1}\{\frac{e^{-j\,\Omega}}{\Omega^2 + 5}\} = \mathcal{F}^{-1}\{e^{-j\,\Omega}\,\frac{1}{\Omega^2 + 5}\} = \frac{1}{2\sqrt{5}}\,e^{-\sqrt{5}\,|\,t-1|} .$$

Άσκηση 2.1(f): Υπολογισμός αντίστροφου μ/σμού Fourier του $X(\Omega) = \delta(\Omega-4) + j\delta(\Omega-\pi) - j\delta(\Omega+\pi) + \delta(\Omega+4)$.

Λύση:

Παρατηρούμε πως

$$\mathcal{F}^{-1}\{\delta(\Omega-4)+j\delta(\Omega-\pi)-j\delta(\Omega+\pi)+\delta(\Omega+4)\} \;=\; \mathcal{F}^{-1}\{\delta(\Omega-4)+\delta(\Omega+4)\} + j\,\mathcal{F}^{-1}\{\delta(\Omega-\pi)-\delta(\Omega+\pi)\}$$
$$= \frac{1}{\pi}\cos(4t) \;+\; \frac{j}{\pi}\,j\,\sin(\pi t) \;=\; \frac{1}{\pi}\left(\cos(4t)-\sin(\pi t)\right) \;.$$

Άσκηση 2.2(a): Υπολογισμός DTFT του $x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^{|n|} u[-n-1]$.

Λύση:

Παρατηρούμε πως:

$$x[n] \;=\; \left(\frac{1}{4}\right)^{-n} u[-n-1] \;=\; \left(\frac{1}{4}\right)^{-n} u[-n-1] \;+\; \left(\frac{1}{4}\right)^{0} \delta[n] \;-\; \left(\frac{1}{4}\right)^{0} \delta[n]$$
$$= \left(\frac{1}{4}\right)^{-n} u[-n] \;-\; \delta[n] \;.$$

Εφαρμόζοντας την ιδιότητα $\mathcal{DF}\{\,x_1[-n]\,\} \;=\; X_1(e^{-j\omega})$ στον πρώτο όρο του αθροίσματος της παραπάνω, καταλήγουμε στο:

$$\mathcal{DF}\{\,x[n]\,\} \;=\; \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j(-\omega)}} \;-\; 1 \;=\; \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{j\omega}} \;.$$

Άσκηση 2.2(b): Υπολογισμός DTFT του $x[n] = -\delta[n-2]+\delta[n-1]+\delta[n+1]+\delta[n+2]$.

Λύση:

Από το γεγονός ότι $\mathcal{DF}\{\delta[n-n_o]\} \;=\; e^{-j\omega n_o}$ και την σχέση του Euler παίρνουμε:

$$X(\omega) \;=\; -e^{-2j\omega} \;+\; e^{-j\omega} \;+\; e^{j\omega} \;+\; e^{2j\omega}$$
$$= \left(e^{j\omega} + e^{-j\omega}\right) + \left(e^{2j\omega} - e^{-2j\omega}\right) \;=\; 2\cos\omega \;+\; 2j\,\sin(2\omega) \;.$$

Άσκηση 2.2(c): Υπολογισμός DTFT του $x[n] = (n-1)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n} u[n]$.

Λύση:

Η λύση προκύπτει από πολλαπλή εφαρμογή της ιδιότητας της παραγώγισης στο πεδίο της συχνότητας, και την γνώση ότι ο DTFT του $x_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ είναι ο $X_1(e^{j\omega}) = 1/(1-0.5\,e^{-j\omega})$. Κατά συνέπεια:

$$
\begin{aligned}
X(e^{j\omega}) \;&=\; \mathcal{DF}\{\, n^2\, x_1[n] - 2\, n\, x_1[n] + x_1[n]\,\} \;=\; j^2\, \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\,\omega^2} X_1(e^{j\omega}) - 2\, j\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\omega} X_1(e^{j\omega}) + X_1(e^{j\omega}) \\
&=\; -\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\,\omega^2}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}\,e^{-j\omega}}\right) \;-\; 2\, j\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\omega}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}\,e^{-j\omega}}\right) \;+\; \frac{1}{1-\frac{1}{2}\,e^{-j\omega}} \\
&=\; -\,\frac{\frac{1}{2}\,e^{-2j\omega}}{(1-\frac{1}{2}\,e^{-j\omega})^3} \;-\; \frac{\frac{1}{2}\,e^{-j\omega}}{(1-\frac{1}{2}\,e^{-j\omega})^2} \;-\; \frac{e^{-j\omega}}{(1-\frac{1}{2}\,e^{-j\omega})^2} \;+\; \frac{1}{1-\frac{1}{2}\,e^{-j\omega}} \\
&=\; -\,\frac{\frac{1}{2}\,e^{-2j\omega}}{(1-\frac{1}{2}\,e^{-j\omega})^3} \;-\; \frac{\frac{3}{2}\,e^{-j\omega}}{(1-\frac{1}{2}\,e^{-j\omega})^2} \;+\; \frac{1}{1-\frac{1}{2}\,e^{-j\omega}} \;\; .
\end{aligned}
$$

Άσκηση 2.2(d): Υπολογισμός IDTFT του $X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1\,, & \text{για } \frac{\pi}{4} < |\omega| < \frac{3\pi}{4} \\ 0\,, & \text{για } 0 \le |\omega| \le \frac{\pi}{4} \text{ και } \frac{3\pi}{4} \le |\omega| < \pi \end{cases}$.

Λύση:

Αν θεωρήσουμε $X_1(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1\,, & \text{για } 0 \le |\omega| < \frac{\pi}{4} \\ 0\,, & \text{για } \frac{\pi}{4} \le |\omega| \le \pi \end{cases}$, παρατηρούμε πως:

$$
X(e^{j\omega}) = X_1(e^{j(\omega-\pi/2)}) + X_1(e^{j(\omega+\pi/2)}) \;\; .
$$

Καθόσον $\mathcal{DF}^{-1}\{X_1(e^{j\omega})\} = \sin(\pi n/4)/(\pi n)$, χρησιμοποιώντας και την ιδιότητα μετατόπισης συχνότητας και την σχέση του Euler, καταλήγουμε στο ότι:

$$
x[n] \;=\; e^{j\,\frac{\pi}{2}\,n}\,\frac{\sin(\pi n/4)}{\pi n} \;+\; e^{-j\,\frac{\pi}{2}\,n}\,\frac{\sin(\pi n/4)}{\pi n} \;=\; \frac{2}{\pi n}\,\cos(\pi n/2)\,\sin(\pi n/4)\;.
$$

Παρατηρήστε ότι η λύση επίσης μπορεί να γραφεί και ως $x[n] = 1/(\pi n).[\sin(3\pi n/4) - \sin(\pi n/4)]$, που προκύπτει ότι είναι ισοδύναμη με την παραπάνω από την σχέση του Euler. Η μορφή αυτή προκύπτει από την απευθείας ολοκλήρωση της $X(e^{j\omega})$ χρησιμοποιώντας τον ορισμό του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου.

Άσκηση 2.2(e): Υπολογισμός IDTFT του $X(e^{j\omega}) = \cos^2(\omega)$.

Λύση:

Παρατηρούμε πως επειδή $2\cos^2(\theta) = 1 + \cos(2\,\theta)$,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{DF}^{-1}\{\cos^2(\omega)\} \;&=\; \mathcal{DF}^{-1}\{\,\frac{1}{2} \;+\; \frac{1}{2}\cos(2\,\omega)\,\} \;=\; \mathcal{DF}^{-1}\{\,\frac{1}{2} \;+\; \frac{1}{4}\,(e^{2j\omega} \;+\; e^{-2j\omega})\,\} \\
&=\; \frac{1}{4}\,\delta[n-2] \;+\; \frac{1}{2}\,\delta[n] \;+\; \frac{1}{4}\,\delta[n+2] \;\; .
\end{aligned}
$$

Άσκηση 2.3:

Ένα γραμμικό, χρονικά αναλλοίωτο (Γ.Χ.Α.) σύστημα συνεχούς χρόνου ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}\,t^2} + 5\,\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}\,t} + 6\,y(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}\,t} + 4\,x(t)$$

όπου $x(t)$ και $y(t)$ είναι τα σήματα εισόδου και εξόδου του συστήματος. Υπολογίστε:

(a) Την απόκριση συχνότητας του συστήματος, $H(\Omega)$.

(b) Την κρουστική απόκριση του συστήματος, $h(t)$.

(c) Την έξοδο του συστήματος $y(t)$, όταν η είσοδος του είναι το $x(t) = e^{-4\,t}u(t) - t\,e^{-4\,t}u(t)$.

Λύση:

(a) Η απόκριση συχνότητας δίνεται από:

$$H(\Omega) \;=\; \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} \;=\; \frac{j\Omega + 4}{(-j\Omega)^2 + 5j\Omega + 6} \;=\; \frac{4 + j\Omega}{6 - \Omega^2 + 5j\Omega} \;\;.$$

(b) Αναλύοντας την παραπάνω σε μερικά κλάσματα, παίρνουμε:

$$H(\Omega) \;=\; \frac{4 + j\Omega}{(2 + j\Omega)(3 + j\Omega)} \;=\; \frac{2}{2 + j\Omega} \;-\; \frac{1}{3 + j\Omega} \;\;.$$

Κατά συνέπεια,

$$h(t) \;=\; \mathcal{F}^{-1}\{\,H(\Omega)\,\} \;=\; 2\,e^{-2\,t}u(t) \;-\; e^{-3\,t}u(t) \;\;.$$

(c) Ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος εισόδου είναι:

$$X(\Omega) \;=\; \mathcal{F}\{\,x(t)\,\} \;=\; \frac{1}{4 + j\Omega} \;-\; \frac{1}{(4 + j\Omega)^2} \;=\; \frac{3 + j\Omega}{(4 + j\Omega)^2} \;\;.$$

Κατά συνέπεια,

$$Y(\Omega) \;=\; X(\Omega)\,H(\Omega) \;=\; \frac{4 + j\Omega}{(2 + j\Omega)(3 + j\Omega)}\,\frac{3 + j\Omega}{(4 + j\Omega)^2} \;=\; \frac{1}{(2 + j\Omega)(4 + j\Omega)} \;\;.$$

Αναλύοντας την παραπάνω σε μερικά κλάσματα, παίρνουμε:

$$Y(\Omega) \;=\; \frac{1}{2}\,\frac{1}{2 + j\Omega} \;-\; \frac{1}{2}\,\frac{1}{4 + j\Omega} \;\;.$$

Κατά συνέπεια,

$$x(t) \;=\; \mathcal{F}^{-1}\{\,X(\Omega)\,\} \;=\; \frac{1}{2}\,e^{-2\,t}u(t) \;-\; \frac{1}{2}\,e^{-4\,t}u(t) \;\;.$$

Άσκηση 2.4(a)**:** Υποθέστε ότι έχουμε δύο ζωνοπεριορισμένα (bandlimited) σήματα $x_1(t)$ και $x_2(t)$ για τα οποία ισχύει $X_1(\Omega) = 0$ για $|\Omega| > 500\,\pi$ και $X_2(\Omega) = 0$ για $|\Omega| > 1000\,\pi$, αντίστοιχα. Για κάθε από τα παρακάτω σήματα, ποια είναι η μέγιστη περίοδος δειγματοληψίας T_s, ώστε αυτά να μπορούν να ανακατασκευαστούν από τα δείγματά τους;

i. $x_1(t)$

ii. $x_2(t)$

iii. $x_1(t) * x_2(t)$

iv. $x_1(t) + x_2(t)$

v. $x_1(t)\, x_2(t)$

vi. $x_1(t) \cos(2000\,\pi\, t) + x_2(t)$

Λύση:

Σύμφωνα με το θεώρημα δειγματοληψίας Shannon, ο ρυθμός δειγματοληψίας πρέπει να ξεπερνάει το όριο Nyquist, δηλαδή, ισοδύναμα, $T_s < \pi/\Omega_{\max}$, όπου $\Omega_{\max}$ είναι η μέγιστη συχνότητα που περιλαμβάνει το ζωνοπεριορισμένο σήμα ενδιαφέροντος. Κατά συνέπεια:

i. Για το $x_1(t)$ έχουμε $\Omega_{\max} = 500\pi$, συνεπώς $T_s = \pi/(500\pi) = 0.002\,\text{sec}$.

ii. Για το $x_2(t)$ έχουμε $\Omega_{\max} = 1000\pi$, συνεπώς $T_s = \pi/(1000\pi) = 0.001\,\text{sec}$.

iii. Για το $x(t) = x_1(t) * x_2(t)$, στο πεδίο της συχνότητας έχουμε πολλαπλασιασμό των $X_1(\Omega)$ και $X_2(\Omega)$, και κατά συνέπεια $\Omega_{\max} = \min\{500\pi\,,\ 1000\pi\} = 500\pi$, συνεπώς $T_s = \pi/(500\pi) = 0.002\,\text{sec}$.

iv. Για το $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$, στο πεδίο της συχνότητας έχουμε άθροιση των $X_1(\Omega)$ και $X_2(\Omega)$, και κατά συνέπεια $\Omega_{\max} = \max\{500\pi\,,\ 1000\pi\} = 1000\pi$, συνεπώς $T_s = \pi/(1000\pi) = 0.001\,\text{sec}$.

v. Για το $x(t) = x_1(t)\, x_2(t)$, στο πεδίο της συχνότητας έχουμε συνέλιξη των $X_1(\Omega)$ και $X_2(\Omega)$, και κατά συνέπεια $\Omega_{\max} = 500\pi + 1000\pi = 1500\pi$, συνεπώς $T_s = \pi/(1500\pi) = 0.00066\,\text{sec}$.

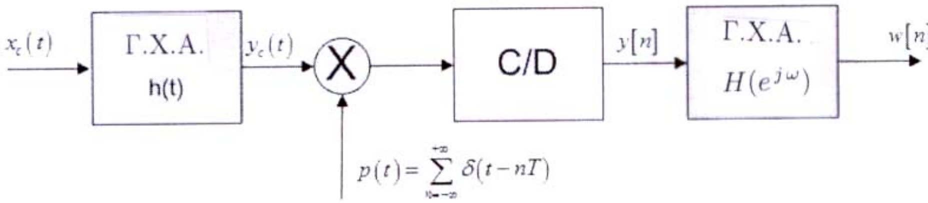
vi. Τέλος για το $x(t) = x_1(t)\cos(2000\,\pi\, t) + x_2(t)$ εφαρμόζουμε τα παραπάνω (iv. και v.), και βρίσκουμε $\Omega_{\max} = \max\{500\pi + 2000\pi\,,\ 1000\pi\} = 2500\pi$, συνεπώς $T_s = \pi/(2500\pi) = 0.0004\,\text{sec}$.

Άσκηση 2.4(b, c)**:** Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζεται ένα αιτιατό Γ.Χ.Α. σύστημα συνεχούς χρόνου που ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση

$$\frac{\mathrm{d}y_c(t)}{\mathrm{d}\,t} + y_c(t) = x_c(t)$$

Το σύστημα ακολουθείται από δειγματοληψία με κρουστικούς παλμούς και ένα Γ.Χ.Α. σύστημα διακριτού χρόνου. Αν η είσοδος του συστήματος συνεχούς χρόνου είναι $x_c(t) = \delta(t - \frac{T}{2})$, υπολογίστε:

(b) Τα $y_c(t)$ και $y[n]$.



(c) Την απόκριση συχνότητας $H(e^{j\omega})$ και κρουστική απόκριση του συστήματος διακριτού χρόνου $h[n]$, ώστε $w[n] = \delta[n]$.

Λύση:

(b) Η απόκριση συχνότητας του συστήματος συνεχούς χρόνου είναι:

$$\frac{dy_c(t)}{dt} + y_c(t) = x_c(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} j\Omega Y_c(\Omega) + Y_c(\Omega) = X_c(\Omega) \Rightarrow H_c(\Omega) = \frac{Y_c(\Omega)}{X_c(\Omega)} = \frac{1}{1+j\Omega} \quad .$$

Άρα σε είσοδο:

$$x_c(t) = \delta(t - \frac{T}{2}) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X_c(\Omega) = e^{-j\Omega T/2} \quad ,$$

η απόκριση, με χρήση της ιδιότητας χρονικής μετατόπισης, θα είναι:

$$Y_c(\Omega) = X_c(\Omega)H_c(\Omega) = e^{-j\Omega T/2}\frac{1}{1+j\Omega} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} y_c(t) = e^{-(t-T/2)}u(t-T/2) \quad .$$

Στην συνέχεια, η έξοδος του συστήματος δειγματοληψίας και μετατροπής C/D προκύπτει μέσω της αντικατάστασης $y[n] = y_c(nT)$. Επομένως:

$$y[n] = \begin{cases} e^{-nT+T/2}, & nT \geq T/2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} = e^{-nT+T/2}u[n-1] \quad ,$$

καθόσον $nT \geq 0.5T \Rightarrow n \geq 1$ (για ακέραια n).

(c) Από ιδιότητες και ζεύγη μ/σμού Fourier διακριτού χρόνου, ο DTFT του $y[n]$ είναι:

$$Y(e^{j\omega}) = \mathcal{DF}\{e^{-nT+T/2}u[n-1]\} = \mathcal{DF}\{e^{-T/2}\left((e^{-T})^{n-1}u[n-1]\right)\} = e^{-T/2}e^{-j\omega}\frac{1}{1-e^{-T}e^{-j\omega}} \ ,$$

καθόσον $|e^{-T}| < 1$ (γιατί προφανώς $T > 0$).
Για το σύστημα διακριτού χρόνου $H(e^{j\omega})$ ισχύει ότι $W(e^{j\omega}) = Y(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$. Για έξοδο $w[n] = \delta[n] \overset{\mathcal{DF}}{\leftrightarrow} W(e^{j\omega}) = 1$, η απόκριση συχνότητας $H(e^{j\omega})$ είναι:

$$H(e^{j\omega}) = 1/Y(e^{j\omega}) = e^{T/2}e^{j\omega} - e^{-T/2} \quad ,$$

και συνεπώς εφαρμόζοντας αντίστροφο DTFT η ζητούμενη κρουστική απόκριση είναι:

$$h[n] = e^{T/2}\,\delta[n+1] - e^{-T/2}\,\delta[n] \quad .$$

Παρατηρούμε μάλιστα ότι πρόκειται για μη αιτιατό σύστημα, καθόσον η κρουστική του απόκριση είναι μη μηδενική για $t = -1$.
