Άσκηση 1.1(a): Έστω ότι το σήμα συνεχούς χρόνου $w(t)$ ορίζεται ως $w(t) = t + 1$ στο διάστημα $[-2, 0]$ και $w(t) = 0$ εκτός του παραπάνω διαστήματος. Σχεδιάστε τα σήματα:

i. $x(t) = u(t) + u(t-1) - 2\,u(t-2) + w(t)$

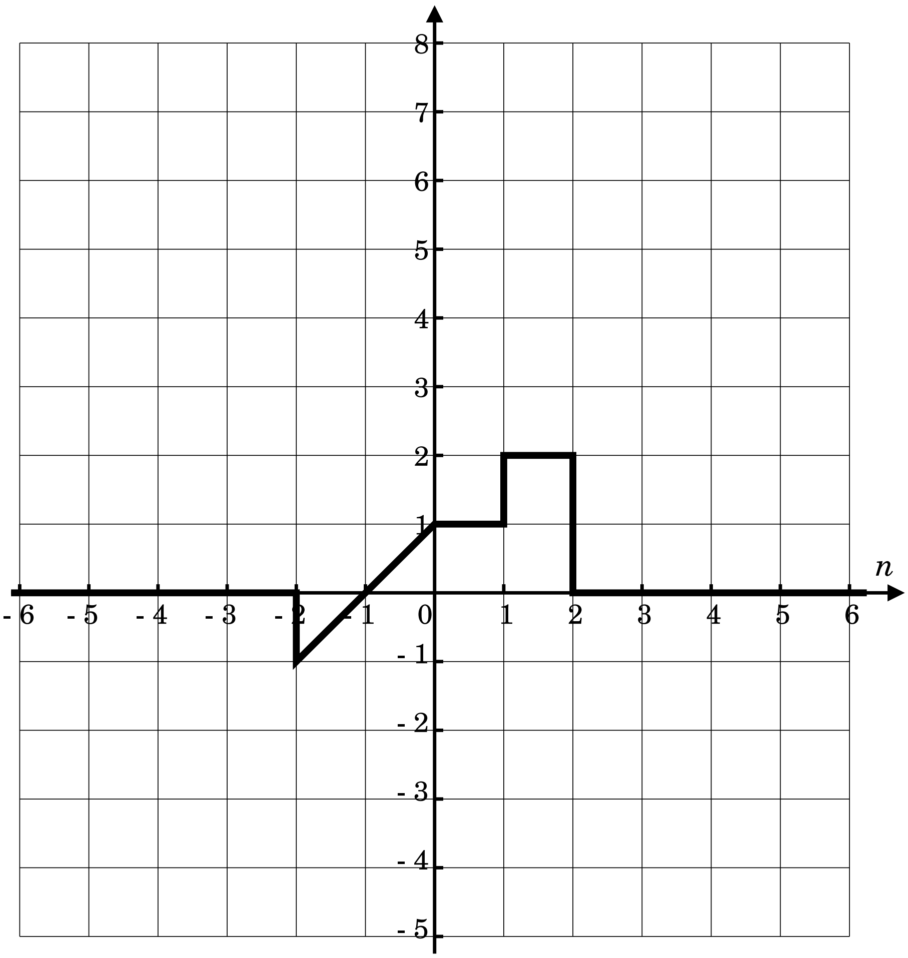
ii. $x(t)\,[\,\delta(t+\frac{1}{2}) - \delta(t-\frac{1}{2})\,]$

iii. $x(3-t)$

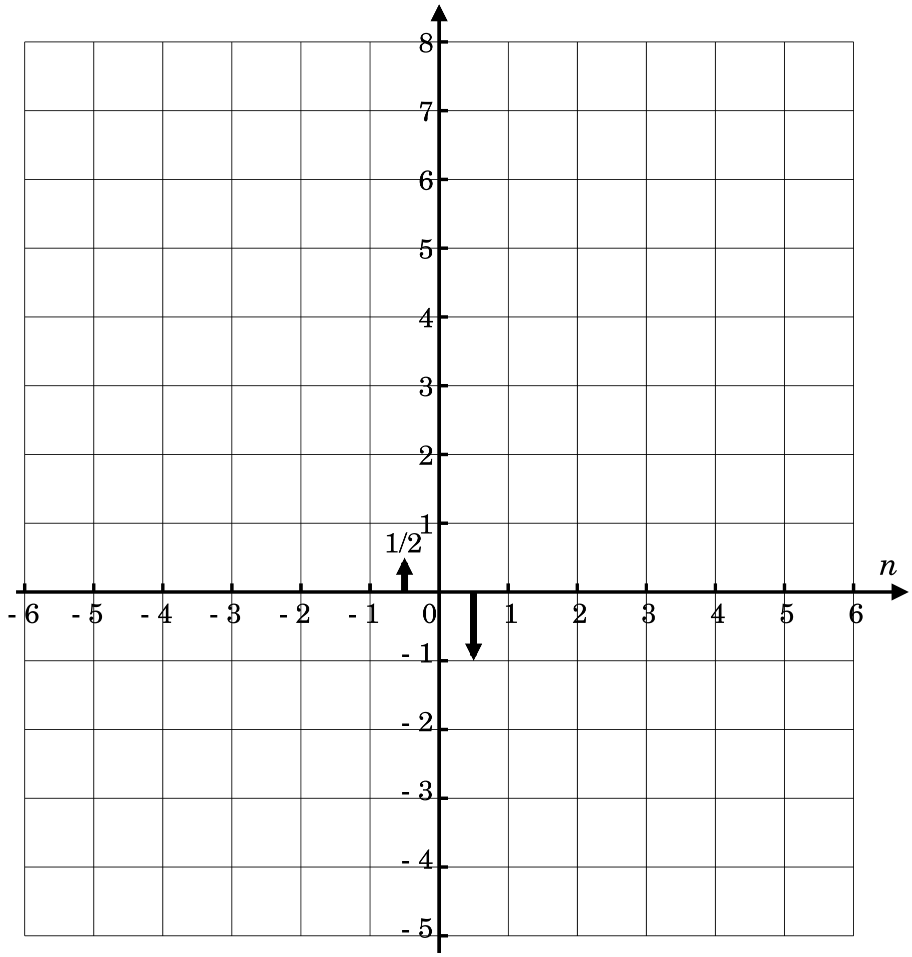
iv. $2\,x(t/2+1) + 3$

Λύση:

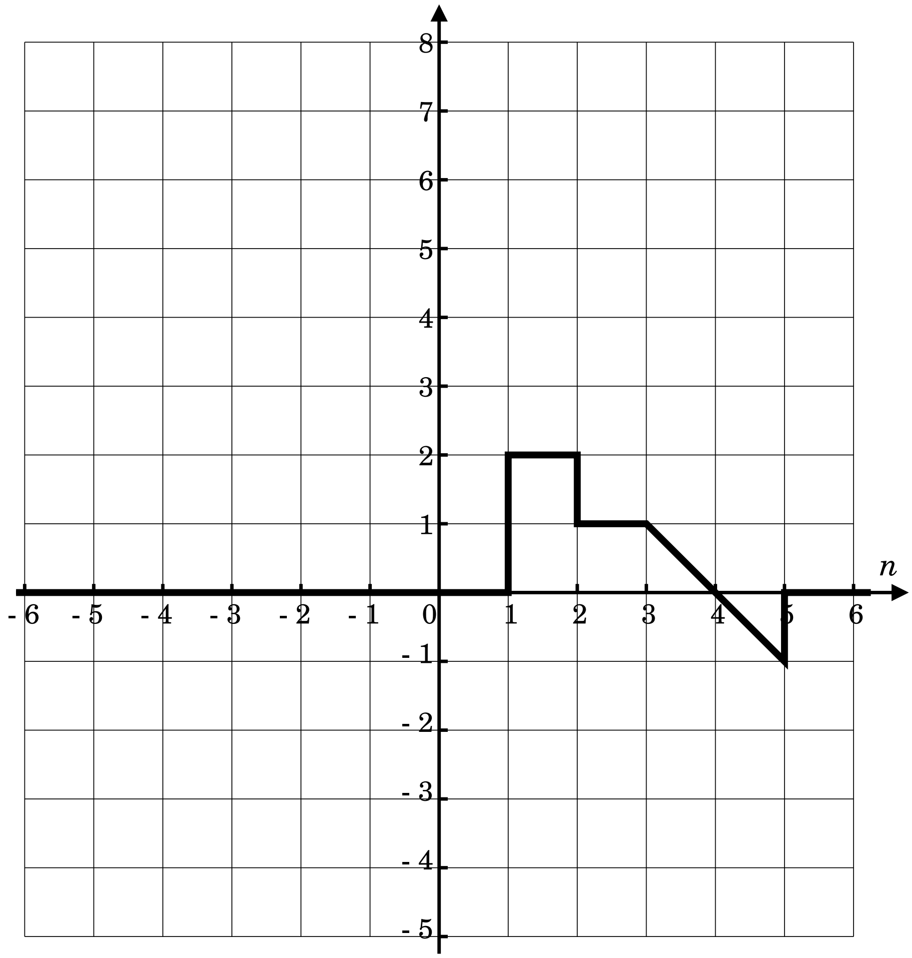
i. Το σήμα $x(t)$ έχει την παρακάτω γραφική:



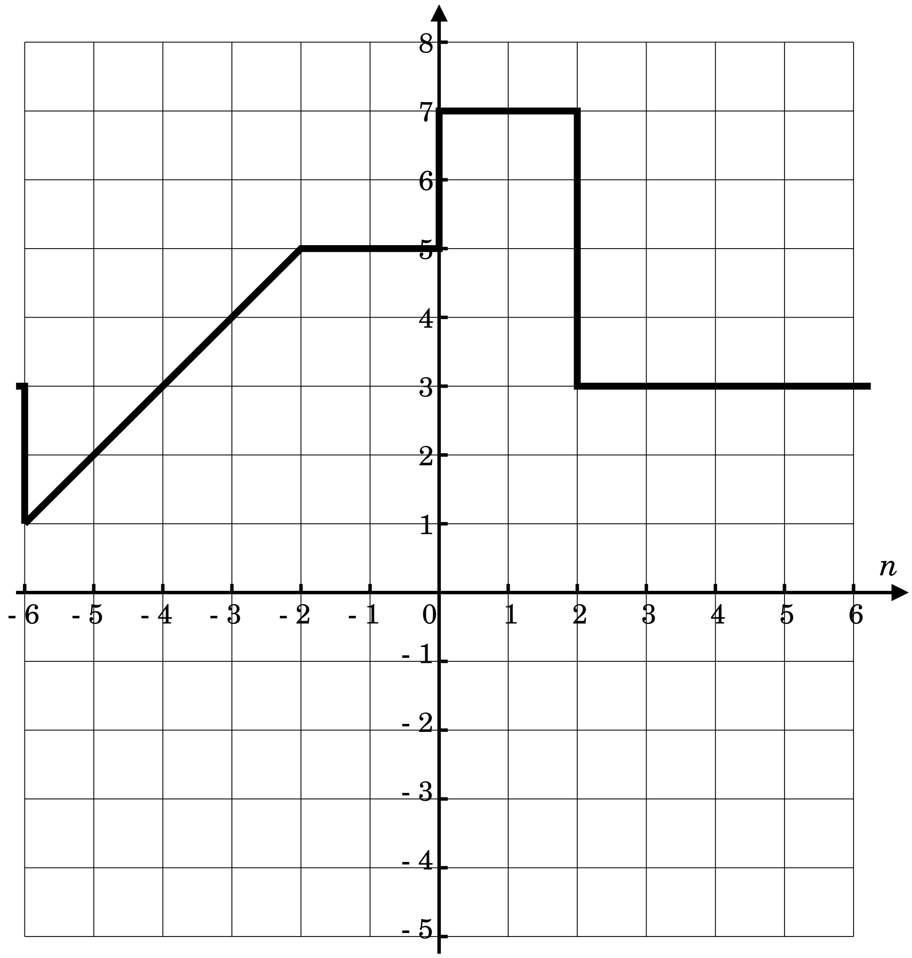
ii. Το σήμα $x(t)\left[\delta(t+\frac{1}{2})-\delta(t-\frac{1}{2})\right]$ έχει την παρακάτω γραφική:



iii. Το σήμα $x(3-t)$ έχει την παρακάτω γραφική:



iv. Το σήμα $2\,x(t/2+1)+3$ έχει την παρακάτω γραφική:



Άσκηση 1.1(b): Βρείτε ποια από τα παρακάτω σήματα είναι περιοδικά και την θεμελιώδη περίοδό τους:

i. $x(t) = \cos(10\,t + 2) + \sin(4\,t)$

ii. $x[n] = (-1)^n \cos(2\pi n/7)$

iii. $x[n] = (-1)^n + \cos(2\pi n/7)$

iv. $x[n] = e^{j\,n/3}$

Λύση:

i. Το σήμα αποτελείται από άθροισμα δύο περιοδικών σημάτων με θεμελιώδη περίοδο $T_1 = \pi/5$ (το πρώτο) και $T_2 = \pi/2$ (το δεύτερο). Κατά συνέπεια, το άθροισμά τους θα είναι επίσης περιοδικό σήμα με θεμελιώδη περίοδο T το μικρότερο κοινό πολλαπλάσιο και των δύο, ήτοι $T = \pi$.

ii. Κάνοντας πράξεις, βλέπουμε πως

$$\begin{aligned} x[n] &= (-1)^n \cos(2\pi n/7) = \cos(\pi n)\cos(2\pi n/7) \\ &= \frac{1}{2}\left[\cos(\pi n + 2\pi n/7) + cos(\pi n - 2\pi n/7)\right] = \frac{1}{2}\left[\cos(9\pi n/7) + cos(5\pi n/7)\right] . \end{aligned}$$

Το σήμα αποτελείται από άθροισμα δύο περιοδικών σημάτων με θεμελιώδη περίοδο $N = 14$ και τα δύο. Κατά συνέπεια, το άθροισμά τους θα είναι επίσης περιοδικό σήμα με θεμελιώδη περίοδο $N = 14$.

iii. Το σήμα αποτελείται από άθροισμα δύο περιοδικών σημάτων με θεμελιώδη περίοδο $N_1 = 2$ (αφού $\cos(\pi n) = (-1)^n$), και $N_2 = 7$. Κατά συνέπεια το άθροισμά τους θα είναι επίσης περιοδικό σήμα με θεμελιώδη περίοδο T το μικρότερο κοινό πολλαπλάσιο και των δύο, ήτοι $N = 14$.

iv. Το σήμα δεν είναι περιοδικό καθόσον το $\omega_o = 1/3$ δεν είναι ρητό πολλαπλάσιο του 2π.

Άσκηση 1.2(a): Αν το σήμα $x[n]$ είναι άρτιο και πραγματικό και το σήμα $y[n]$ είναι περιττό και πραγματικό, τότε αποδείξτε αν τα επόμενα σήματα είναι άρτια ή περιττά:

i. $x[n]\,x[n]$

ii. $x[n]\,y[n]$

iii. $y[n]\,y[n]$

iv. $x[n]\,u[n] - x[n]\,u[-n] + y[n]$

Λύση:

Από την υπόθεση του προβλήματος έχουμε ότι $x[-n] = x[n]$ (άρτιο σήμα) και $y[-n] = -y[n]$ (περιττό σήμα). Κατά συνέπεια:

i. Έχουμε: $x[-n]\,x[-n] = x[n]\,x[n]$, κατά συνέπεια το σήμα είναι άρτιο.

ii. Έχουμε: $x[-n]\,y[-n] = x[n]\,(-y[n]) = -(x[n]\,y[n])$, κατά συνέπεια είναι περιττό.

iii. Έχουμε: $y[-n]\,y[-n] = (-y[n])\,(-y[n]) = y[n]\,y[n]$, κατά συνέπεια το σήμα είναι άρτιο.

iv. Παρατηρούμε ότι $x[n]\,u[n] - x[n]\,u[-n] = x[n]\,(u[n] - u[-n])$. Προφανώς το σήμα $u[n]-u[-n] = -(u[-n]-u[n])$ είναι περιττό, και από το (ii.), το γινόμενο του με το άρτιο πραγματικό σήμα $x[n]$ είναι επίσης περιττό. Είναι εύκολο να δείξει κανείς ότι το άθροισμα του περιττού αυτού σήματος και του περιττού $y[n]$ είναι επίσης περιττό σήμα.

Άσκηση 1.2(b): Ποια από τα παρακάτω σήματα είναι σήματα ενέργειας και ποια σήματα ισχύος; Βρείτε (αντίστοιχα) την ενέργεια ή την ισχύ τους.

i. $\delta[n] + \delta[n-1]$

ii. $u[n] + 2\,u[-n]$

iii. $e^{-4\,t}u(t)$

iv. $\cos(\pi n/8)$

Λύση:

i. Αναμένουμε ότι πρόκειται για σήμα ενέργειας. Πράγματι, έχουμε $E_\infty = \sum_{-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = |x[0]|^2 + |x[1]|^2 = 1 + 1 = 2$, καθόσον οι μόνες μη μηδενικές τιμές του σήματος $x[n]$ λαμβάνουν χώρα στα $n = 0$ και $n = 1$. Κατά συνέπεια το σήμα είναι όντως σήμα ενέργειας με $E_\infty = 2$ (και προφανώς $P_\infty = 0$).

ii. Αναμένουμε ότι πρόκειται για σήμα ισχύος. Παρατηρούμε ότι $x[n] = 2\,u[-n]$ για $n < 0$, $x[n] = u[n]$ για $n > 0$, και $x[0] = 3$, άρα:

$$\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}|x[n]|^2 \;=\; \frac{1}{2N+1}\left(\sum_{n=-N}^{-1}4\,|u[-n]|^2 \;+\; 3^2 \;+\; \sum_{n=1}^{N}|u[n]|^2\right)$$

$$= \frac{4N+9+N}{2N+1} \;=\; \frac{5N+9}{2N+1}\;.$$

Συνεπώς πρόκειται για σήμα ισχύος με $P_\infty = \lim_{N\to+\infty}\dfrac{5N+9}{2N+1} = 2.5$ (και προφανώς $E_\infty = \infty$).

iii. Σκεφτόμαστε ότι κατά πάσα πιθανότητα πρόκειται για σήμα ενέργειας, καθόσον είναι ένα φθίνον εκθετικό σήμα. Πράγματι (και αφού το σήμα είναι μη μηδενικό μόνο για $t \geq 0$):

$$E_\infty = \int_{t=-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt \;=\; \int_0^{+\infty}(e^{-4t})^2dt \;=\; \int_0^{+\infty}e^{-8t}dt \;=\; -\;\frac{1}{8}\,e^{-8t}\Big|_0^{+\infty} \;=\; \frac{1}{8}\;.$$

Κατά συνέπεια το σήμα είναι όντως σήμα ενέργειας με $E_\infty = 1/8$ (και προφανώς $P_\infty = 0$).

iv. Αναμένουμε ότι πρόκειται για σήμα ισχύος λόγω της περιοδικότητάς του. Πράγματι, χρησιμοποιώντας και την σχέση $2\,\cos^2(\theta) \;=\; (1+\cos(2\,\theta))$, έχουμε:

$$\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}|x[n]|^2 \;=\; \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}\cos^2(\pi n/8)$$

$$= \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{2} \;+\; \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{2}\cos\left(\pi n/4\right)$$

$$= \frac{1}{2N+1}\,\frac{2N+1}{2} \;+\; \frac{1}{2N+1}\sum_{n=0}^{N}\cos\left(\pi n/4\right)$$

$$= \frac{1}{2} \;+\; \frac{1}{2N+1}\sum_{n=0}^{8\lfloor N/8\rfloor}\cos\left(\pi n/4\right) \;+\; \frac{1}{2N+1}\sum_{8\lfloor N/8\rfloor+1}^{N}\cos\left(\pi n/4\right)\;.$$

Παρατηρούμε πως ο δεύτερος όρος του παραπάνω αθροίσματος είναι μηδέν, ενώ το όριο του τρίτου όρου με $N \to +\infty$ γίνεται επίσης μηδέν, καθόσον φράσσεται από το $\pm 8/(2N+1)$. Συνεπώς πρόκειται για σήμα ισχύος με $P_\infty = 1/2$ (και προφανώς $E_\infty = \infty$).

Άσκηση 1.3(a): Για τα ακόλουθα συστήματα συνεχούς (ή διακριτού) χρόνου δίνονται οι αποκρίσεις τους $y(t)$ (ή $y[n]$) στα σήματα εισόδου $x(t)$ (ή $x[n]$). Βρείτε αν είναι Γ.Χ.Α. συστήματα, αν είναι αιτιατά, και αν είναι ευσταθή.

i. $y(t) = x(t-2) + x(2-t)$

ii. $y(t) = 2\,x(t/4) + 3$

iii. $y[n] = (n+5)\,x[n]$

Λύση:

i.
- Είναι εύκολο να δει κανείς ότι το σύστημα είναι γραμμικό, ωστόσο λόγω του δεύτερου όρου δεν είναι χρονικά αναλλοίωτο. Πράγματι, έστω ότι το σήμα εισόδου είναι ο ορθογώνιος παλμός $x_1(t) = u(t+1) - u(t-1)$. Παρατηρούμε ότι η έξοδος του συστήματος στο σήμα αυτό είναι ο ορθογώνιος παλμός $y_1(t) = 2(u(t-1) - u(t-3))$. Ωστόσο, η έξοδος του συστήματος στον ορθογώνιο παλμό $x_2(t) = x_1(t-1) = u(t) - u(t-2)$ είναι ο παλμός $y_2(t) = u(t) - u(t-4)$ και όχι ο $y_1(t-1) = 2(u(t-2) - u(t-4))$. Κατά συνέπεια το σύστημα δεν είναι Γ.Χ.Α.
- Το σύστημα δεν είναι αιτιατό (π.χ. $y(0) = x(-2) + x(2)$, άρα η τιμή της εξόδου στην χρονική στιγμή $t = 0$ εξαρτάται από τιμή στο μέλλον).
- Το σύστημα είναι ευσταθές γιατί εάν $|x(t)| \leq B$, για κάθε t, συνεπάγεται πως

  $$|y(t)| \;=\; |x(t-2) + x(2-t)| \;\leq\; |x(t-2)| \;+\; |x(2-t)| \;\leq\; 2B \;\;,$$

  δηλαδή η έξοδός του είναι φραγμένη για φραγμένη είσοδο.

ii.
- Το σύστημα δεν είναι γραμμικό λόγω της σταθεράς 3, όπως και δεν είναι χρονικά αναλλοίωτο λόγω του $x(t/4)$, άρα το σύστημα δεν είναι Γ.Χ.Α.
- Το σύστημα δεν είναι αιτιατό καθόσον η έξοδός του για παράδειγμα στο $t = -4$ εξαρτάται από την είσοδό του την μελλοντική χρονική στιγμή $t = -1$.
- Το σύστημα είναι ευσταθές γιατί εάν $|x(t)| \leq B$, για κάθε t, συνεπάγεται πως

  $$|y(t)| \;=\; |2\,x(t/4) + 3| \;\leq\; 2|x(t/4)| + 3 \;\leq\; 2B + 3 \;\;,$$

  δηλαδή η έξοδός του είναι φραγμένη για φραγμένη είσοδο.

iii.
- Το σύστημα είναι γραμμικό, ωστόσο δεν είναι χρονικά αναλλοίωτο, καθόσον για παράδειγμα όταν η είσοδός του είναι $x[n] = \delta[n]$, η έξοδός του είναι $y[n] = 5\,\delta[n]$, ενώ όταν η είσοδός του είναι $x[n] = \delta[n+5]$, η έξοδός του είναι $y[n] = (-5 + 5)\,\delta[n+5] = 0 \neq 5\,\delta[n+5]$. Άρα το σύστημα δεν είναι Γ.Χ.Α.
- Το σύστημα είναι προφανώς αιτιατό, καθόσον η έξοδός του κάθε χρονική στιγμή n είναι συνάρτηση της εισόδου του την ίδια μόνο χρονική στιγμή n.
- Το σύστημα δεν είναι ευσταθές καθόσον για παράδειγμα η έξοδός του στο φραγμένο σήμα εισόδου $x[n] = u[n]$ είναι η μη φραγμένη $y[n] = (n+5)\,u[n]$, που τείνει στο άπειρο, όταν $n \rightarrow +\infty$.

Άσκηση 1.3(b): Βρείτε τα αντίστροφα συστήματα (εάν υπάρχουν) για τα παρακάτω συστήματα:

i. $y(t) = x(t-2)$

ii. $y(t) = \mathrm{d}\, x(t)/\mathrm{d}\, t$

iii. $y[n] = x[n] - x[n-1]$

Λύση:

i. Το αντίστροφο του συστήματος $y(t) = x(t-2)$ είναι το $y(t) = x(t+2)$, καθόσον $w(t) = y(t+2) = x(t-2+2) = x(t)$, εάν συνδέσουμε σειριακά τα δύο συστήματα. Κατά συνέπεια το σύστημα είναι αντιστρέψιμο.

ii. Το σύστημα δεν είναι αντιστρέψιμο, γιατί όλα τα σήματα που διαφέρουν κατά μία σταθερά $x(t) + \text{const}$ δίνουνε ταυτόσημη έξοδο.

iii. Για τον ίδιο λόγο και το σύστημα αυτό δεν είναι αντιστρέψιμο, π.χ. όλα τα σήματα $x[n] = \text{const}$ δίνουνε μηδενική έξοδο, ανεξαρτήτου τιμής της σταθεράς.

Άσκηση 1.4(a): Υπολογίστε την συνέλιξη $y[n] = x[n] * h[n]$ των

$x[n] = \delta[n-3] + 2\,\delta[n-2] + 2\,\delta[n-1] + \delta[n]$

$h[n] = \delta[n-4] + \delta[n-3] + \delta[n-2] + \delta[n-1] + \delta[n]\,.$

Λύση:

Πρόκειται για δύο σήματα διακριτού χρόνου και πεπερασμένης διάρκειας, οπότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τρόπο υπολογισμού της συνέλιξής τους ως γινομένου πίνακα με διάνυσμα. Έχουμε λοιπόν:

$$\mathbf{x} = [\,x[0]\ x[1]\ x[2]\ x[3]\,]^T = [\,1\ 2\ 2\ 1]^T$$

με μήκος 4, και

$$\mathbf{h} = [\,h[0]\ h[1]\ h[2]\ h[3]\ h[4]\,]^T = [\,1\ 1\ 1\ 1\ 1]^T$$

με μήκος 5. Κατά συνέπεια η συνέλιξή τους θα ορίζεται μεταξύ 0 και $4+5-2=7$, και μπορεί να υπολογιστεί ως:

$$\begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ y[2] \\ y[3] \\ y[4] \\ y[5] \\ y[6] \\ y[7] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h[0] & 0 & 0 & 0 \\ h[1] & h[0] & 0 & 0 \\ h[2] & h[1] & h[0] & 0 \\ h[3] & h[2] & h[1] & h[0] \\ h[4] & h[3] & h[2] & h[1] \\ 0 & h[4] & h[3] & h[2] \\ 0 & 0 & h[4] & h[3] \\ 0 & 0 & 0 & h[4] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \\ 6 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}\,.$$

Κατά συνέπεια, η ζητούμενη συνέλιξη είναι:

$$y[n] = \delta[n-7] + 3\,\delta[n-6] + 5\,\delta[n-5] + 6\,\delta[n-4] + 6\,\delta[n-3] + 5\,\delta[n-2] + 3\,\delta[n-1] + \delta[n]\ .$$

Άσκηση 1.4(b)**:** Υπολογίστε την συνέλιξη $y[n] = x[n] * h[n]$ των

$x[n] = 3^n u[1-n]$

$h[n] = u[n]\,.$

Λύση:

Στο σχήμα (αριστερά) φαίνονται σχεδιασμένα τα σήματα $x[k]$ και $h[n-k]$. Είναι προφανές ότι τα σήματα έχουνε μη μηδενική επικάλυψη για όλα τα n. Για $n \geq 1$, το πεδίο επικάλυψης παραμένει σταθερό και είναι το διάστημα $k \leq 1$. Άρα για $n \geq 1$:

$$y[n] \;=\; \sum_{k=-\infty}^{k=1} 3^{\,k} \;=\; 3 \;+\; \sum_{k=-\infty}^{0} 3^{\,k} \;=\; 3 \;+\; \sum_{r=0}^{+\infty} (\frac{1}{3})^{\,r} \;=\; 3 \;+\; \frac{1}{1-(1/3)} \;=\; \frac{9}{2}\;,$$

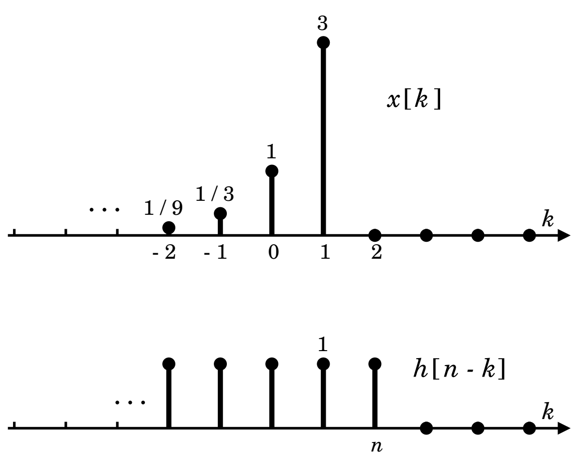
δηλαδή το $y[n]$ κρατάει σταθερή τιμή 4.5 για $n \geq 1$.
Για $n < 1$ επικάλυψη των σημάτων λαμβάνει χώρα μόνο για $k \leq n$. Συνεπώς:

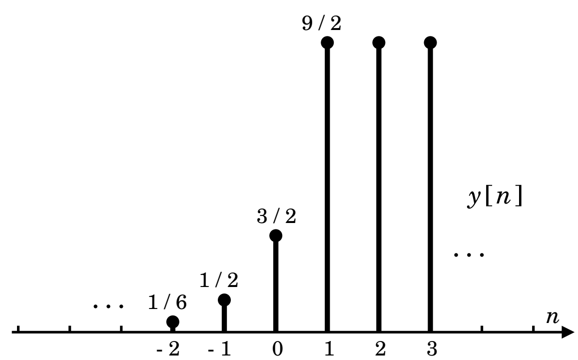
$$y[n] \;=\sum_{k=-\infty}^{n} 3^{\,k} \;=\; \sum_{l=-n}^{+\infty} (\frac{1}{3})^{\,l} \;=\; \sum_{m=0}^{+\infty} (\frac{1}{3})^{\,m-n} \;=(\frac{1}{3})^{-n} \sum_{m=0}^{+\infty} (\frac{1}{3})^{m} \;=\; 3^{\,n}\,\frac{3}{2} \;=\; \frac{3^{\,n+1}}{2}\;.$$

Συνεπώς:

$$y[n] = \begin{cases} 9/2\,, & \text{για } n \geq 1 \\ 3^{\,n+1}/2\,, & \text{αλλού}\;. \end{cases}$$

Η συνέλιξη είναι σχεδιασμένη στο δεξιό μέρος του σχήματος.





Άσκηση 1.4(c): Υπολογίστε την συνέλιξη $y(t) = x(t) * h(t)$ των

$x(t) = e^{-at}u(t)$, με $a > 0$

$h(t) = u(t) - u(t-T)$, με $T > 0$.

Λύση:

Παρατηρώντας την περιοχή επικάλυψης του $x(\tau)$ και του $h(t-\tau)$, βλέπουμε πως αυτή είναι μηδενική για $t \leq 0$. Εκεί προφανώς έχουμε $y(t) = 0$.
Στην συνέχεια βλέπουμε πως για $0 < t \leq T$ η περιοχή επικάλυψης είναι το $\tau \in [0, t]$, άρα:

$$y(t) \; = \; \int_0^t e^{-\alpha\tau}\, d\tau \; = \; -\frac{1}{\alpha}\, e^{-\alpha\tau}\Big|_0^t \; = \; \frac{1 \, - \, e^{-\alpha t}}{\alpha} \quad .$$

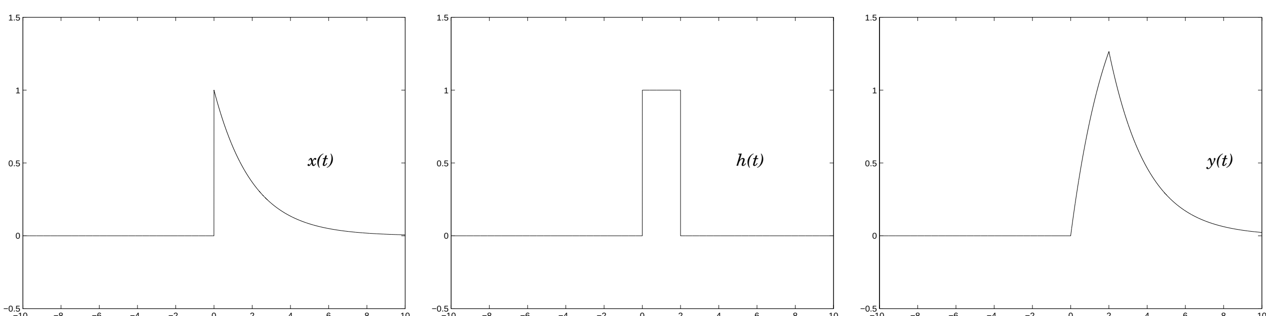
Τέλος, για $t > T$ η περιοχή επικάλυψης είναι το $\tau \in [\, t - T, t\,]$, συνεπώς:

$$y(t) \; = \; \int_{t-T}^t e^{-\alpha\tau}\, d\tau \; = \; -\frac{1}{\alpha}\, e^{-\alpha\tau}\Big|_{t-T}^t \; = \; \frac{e^{\alpha T} - 1}{a}\, e^{-\alpha t} \quad .$$

Συνοψίζοντας, έχουμε:

$$y(t) \; = \; \begin{cases} 0\,, & \text{για} \;\; t \leq 0 \\ \dfrac{1 \, - \, e^{-\alpha t}}{\alpha}\,, & \text{για} \;\; 0 < t \leq T \\ \dfrac{e^{\alpha T} - 1}{a}\, e^{-\alpha t}\,, & \text{για} \;\; t > T \quad . \end{cases}$$

Τα σήματα είναι σχεδιασμένα στο παρακάτω σχήμα για $\alpha = 1/2$ και $T = 2$.



Άσκηση 1.5(a): Αναπαραστήστε το σήμα

$$x(t) = 2 + \cos(\pi t + 3\pi/4) + \sin(3\pi t) + 3\,j\cos(2\pi t)\,\cos(5\pi t)$$

ως σειρά Fourier.

Λύση:

Χρησιμοποιώντας την σχέση του Euler και το γεγονός ότι $2\cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$, παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
x(t) \;=\; & 2 \;+\; \left(\frac{1}{2}\,e^{j\,3\,\pi/4}\,e^{j\,\pi\,t} \;+\; \frac{1}{2}\,e^{-j\,3\,\pi/4}\,e^{-j\,\pi\,t}\right) \;+\; \left(\frac{1}{2j}\,e^{j\,3\,\pi\,t} \;-\; \frac{1}{2j}\,e^{-j\,3\,\pi\,t}\right) \\
& \;+\; \frac{3j}{2}\,\frac{1}{2}\,\left(e^{j\,7\,\pi\,t} \;+\; e^{-j\,7\,\pi\,t}\right) \;+\; \frac{3j}{2}\,\frac{1}{2}\,\left(e^{j\,3\,\pi\,t} \;+\; e^{-j\,3\,\pi\,t}\right) \\
=\; & \frac{3j}{4}\,e^{-j\,7\,\pi\,t} \;+\; (\frac{3j}{4} - \frac{1}{2j})\,e^{-j\,3\,\pi\,t} \;+\; \frac{e^{-j\,3\,\pi/4}}{2}\,e^{-j\,\pi\,t} \;+\; 2 \;+\; \frac{e^{j\,3\,\pi/4}}{2}\,e^{j\,\pi\,t} \\
& \;+\; (\frac{3j}{4} + \frac{1}{2j})\,e^{j\,3\,\pi\,t} \;+\; \frac{3j}{4}\,e^{j\,7\,\pi\,t} \\
=\; & \frac{3j}{4}\,e^{-j\,7\,\pi\,t} \;+\; \frac{5j}{4}\,e^{-j\,3\,\pi\,t} \;-\; \frac{1+j}{2\sqrt{2}}\,e^{-j\,\pi\,t} \;+\; 2 \;+\; \frac{j-1}{2\sqrt{2}}\,e^{j\,\pi\,t} \;+\; \frac{j}{4}\,e^{j\,3\,\pi\,t} \;+\; \frac{3j}{4}\,e^{j\,7\,\pi\,t} \quad .
\end{aligned}$$

Κατά συνέπεια, οι μη μηδενικοί συντελεστές της σειράς Fourier του περιοδικού σήματος (με θεμελιώδη περίοδο $\Omega_o = \pi$)

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} c_k\,e^{j\,k\,\Omega_o\,t}$$

είναι οι:

$$c_{-7} = \frac{3j}{4}\,, \quad c_{-3} = \frac{5j}{4}\,, \quad c_{-1} = -\frac{1+j}{2\sqrt{2}}\,, \quad c_0 = 2\,, \quad c_1 = \frac{j-1}{2\sqrt{2}}\,, \quad c_3 = \frac{j}{4}\,, \quad c_7 = \frac{3j}{4} \quad .$$

Άσκηση 1.5(b): Θεωρήστε το περιοδικό σήμα $x(t)$ με περίοδο 2, για το οποίο ισχύει $x(t) = t$ εντός του διαστήματος $[-1, 1]$. Αναπαραστήστε το ως σειρά Fourier.

Λύση:

Η θεμελιώδης περίοδος του σήματος δίνεται ότι είναι $T = 2$. Κατά συνέπεια, και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα $\int y(t)(dz(t)/dt)dt = y(t)z(t) - \int (dy(t)/dt)z(t)dt$, παίρνουμε για $k \neq 0$:

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{T}\int_T x(t)\, e^{-j\,k\,\frac{2\pi}{T}\,t}\,dt \;=\; \frac{1}{2}\int_{t=-1}^{t=1} t\, e^{-j\,k\,\pi\,t}\,dt \;=\; -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{t}{j\,k\,\pi}\,\frac{d}{dt}\,(e^{-j\,k\,\pi\,t})\,dt \\
&= -\frac{1}{2}\left[\frac{t}{j\,k\,\pi}\,e^{-j\,k\,\pi\,t}\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\frac{1}{j\,k\,\pi}\,e^{-j\,k\,\pi\,t}\,dt\right] \\
&= -\frac{1}{2}\left[\frac{e^{-j\,k\,\pi}+e^{j\,k\,\pi}}{j\,k\,\pi} + \frac{1}{j^2\,k^2\,\pi^2}\;e^{-j\,k\,\pi\,t}\big|_{-1}^{1}\right] \\
&= -\frac{1}{2}\left[\frac{e^{-j\,k\,\pi}+e^{j\,k\,\pi}}{j\,k\,\pi} - \frac{e^{-j\,k\,\pi}-e^{j\,k\,\pi}}{k^2\,\pi^2}\right] \;=\; -\frac{\cos(k\,\pi)}{j\,k\,\pi} - \frac{j\,\sin(k\,\pi)}{k^2\,\pi^2} \;=\; \frac{j\,(-1)^k}{k\,\pi} \quad .
\end{aligned}$$

Το παραπάνω ισχύει για $k \neq 0$. Τέλος, για $k = 0$, παίρνουμε:

$$c_o \;=\; \frac{1}{2}\int_{t=-1}^{t=1} t\,dt \;=\; 0 \quad .$$

Άσκηση 1.5(c): Αν οι συντελεστές της σειράς Fourier του περιοδικού σήματος $x(t)$ με περίοδο T είναι c_k, ποιοι θα είναι οι συντελεστές της σειράς Fourier για το σήμα

$$y(t) = x(t - t_o) + x(t + t_o)$$

εκφρασμένοι σε σχέση με τα αρχικά c_k και τα T, t_o;

Λύση:

Είναι πολύ εύκολο να δούμε πως και το σήμα $y(t)$ είναι περιοδικό με περίοδο T, κατά συνέπεια μπορεί να αναλυθεί σε σειρά Fourier. Είναι επίσης πολύ εύκολο να δούμε πως οι συντελεστές της ανάπτυξης σε σειρά Fourier των $x(t - t_o)$ και $x(t + t_o)$ είναι:

$$c_k\, e^{-j\,k\,\frac{2\pi}{T}\,t_o} \;, \qquad \text{και} \qquad c_k\, e^{j\,k\,\frac{2\pi}{T}\,t_o} \;,$$

αντίστοιχα. Λόγω γραμμικότητας, καταλήγουμε πως οι συντελεστές της σειράς Fourier του $y(t)$ είναι οι:

$$c_k\,(\,e^{j\,k\,\frac{2\pi}{T}\,t_o} + e^{-j\,k\,\frac{2\pi}{T}\,t_o}\,) \;=\; 2\,c_k\cos\left(\,k\,\frac{2\,\pi}{T}\,t_o\right) \quad .$$

Άσκηση 1.5(d)**:** Αν η σειρά Fourier του περιοδικού σήματος $x(t)$ με περίοδο 3 είναι $c_k = 2$, για κάθε k, ποιο είναι το σήμα $x(t)$;

Λύση:

Θυμόμαστε ότι το περιοδικό σήμα $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \delta(t-kT)$ έχει συντελεστές σειράς Fourier που δίνονται από:

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, e^{-j\,k\,\frac{2\pi}{T}\,t}\,dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t)\, e^{-j\,k\,\frac{2\pi}{T}\,t}\,dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t)\,dt = \frac{1}{T} \ .$$

Κατά συνέπεια, το ζητούμενο σήμα είναι το $x(t) = 6\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \delta(t-3k)$, το οποίο όντως έχει συντελεστές σειράς Fourier τα $c_k = 6/3 = 2$.