---

**Θέμα 1:** (a) (10%) Βρείτε εάν το σύστημα με σχέση εισόδου/εξόδου την:

$$y(t) = 2\,x(t/5) + 3$$

είναι Γ.Χ.Α., αν είναι αιτιατό, αν είναι ευσταθές, και αν είναι αντιστρέψιμο (στην τελευταία περίπτωση, αν ναι, βρείτε και τον αντίστροφό του).

**Λύση:**

- Το σύστημα δεν είναι γραμμικό λόγω της σταθεράς $3$, όπως και δεν είναι χρονικά αναλλοίωτο λόγω του $x(t/5)$, άρα το σύστημα δεν είναι Γ.Χ.Α.
- Το σύστημα δεν είναι αιτιατό καθόσον η έξοδός του για παράδειγμα στο $t = -5$, $y(-5)$, εξαρτάται από την είσοδό του $x(-1)$ (δηλαδή σε μελλοντική χρονική στιγμή).
- Το σύστημα είναι ευσταθές γιατί εάν $|x(t)| \leq B$, για κάθε $t$, συνεπάγεται πως

$$|y(t)| \;=\; |2\,x(t/5) + 3| \;\leq\; 2|x(t/5)| + 3 \;\leq\; 2B + 3 \;\;,$$

  δηλαδή η έξοδός του είναι φραγμένη για φραγμένη είσοδο.
- Το σύστημα είναι αντιστρέψιμο, με αντίστροφο το σύστημα

$$y(t) \;=\; \frac{x(5\,t) \;-\; 3}{2} \;\;,$$

  καθώς, αν συνδέσουμε σειριακά τα δύο συστήματα, παίρνουμε:

$$w(t) \;=\; \frac{y(5\,t) \;-\; 3}{2} \;=\; \frac{(2\,x(t) \;+\; 3) \;-\; 3}{2} \;=\; x(t) \;\;.$$

---

**Θέμα 1:** (b) (14%) Υπολογίστε και σχεδιάστε την συνέλιξη $y[n] = x[n] * h[n]$ , όπου

$$x[n] \;=\; 2^{\,n} u[2-n] \;\;, \quad h[n] \;=\; u[n] \;\; .$$

**Λύση:** Στο παρακάνω σχήμα (αριστερά) φαίνονται σχεδιασμένα τα σήματα $x[k]$ και $h[n-k]$. Είναι προφανές ότι τα σήματα έχουνε μη μηδενική επικάλυψη για όλα τα $n$. Για $n \geq 2$, το πεδίο επικάλυψης παραμένει σταθερό και είναι το διάστημα $k \leq 2$. Άρα για $n \geq 2$:

$$y[n] \;=\; \sum_{k=-\infty}^{k=2} 2^{\,k} \;=\; 4 \;+\; 2 \;+ \sum_{k=-\infty}^{0} 2^{\,k} \;=\; 6 \;+\; \sum_{r=0}^{+\infty} (\frac{1}{2})^{\,r} \;=\; 6 \;+\; \frac{1}{1-(1/2)} \;=\; 8 \;\;,$$

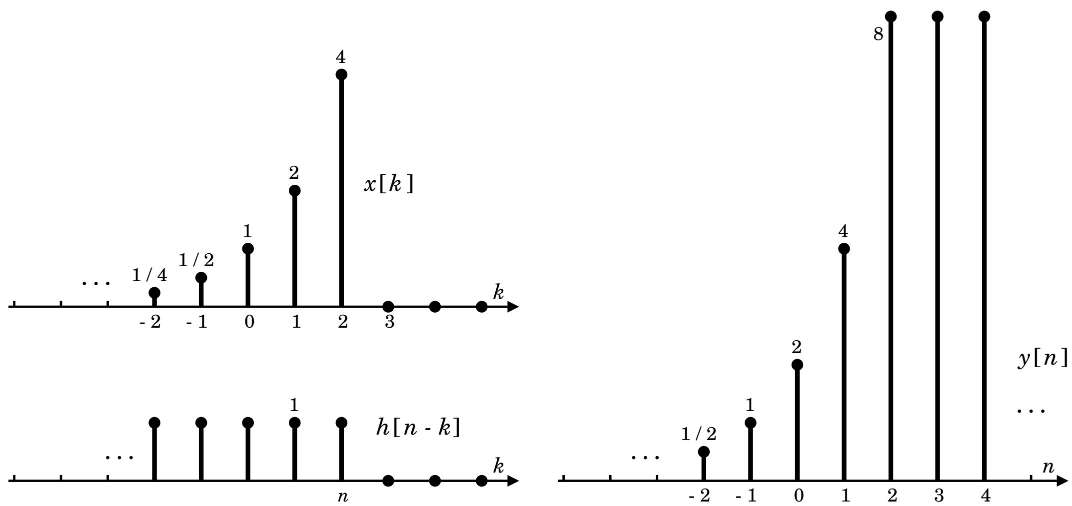
δηλαδή το $y[n]$ κρατάει σταθερή τιμή 8 για $n \geq 2$.
Για $n < 2$ επικάλυψη των σημάτων λαμβάνει χώρα μόνο για $k \leq n$. Έχουμε λοιπόν:

$$y[n] \;= \sum_{k=-\infty}^{n} 2^{\,k} \;=\; \sum_{l=-n}^{+\infty} (\frac{1}{2})^{\,l} \;=\; \sum_{m=0}^{+\infty} (\frac{1}{2})^{m-n} \;= (\frac{1}{2})^{-n} \sum_{m=0}^{+\infty} (\frac{1}{2})^{m} \;=\; 2^{\,n}\, 2 \;=\; 2^{\,n+1} \;\; .$$

Συνεπώς, τελικά έχουμε:

$$y[n] = \begin{cases} 8\,, & \text{για } \; n \geq 2 \\ 2^{\,n+1}\,, & \text{αλλού } \; . \end{cases}$$

Η συνέλιξη είναι σχεδιασμένη στο δεξιό μέρος του σχήματος.



**Θέμα 2:** (a) (9%) Υπολογίστε το σήμα $x(t)$ από τον μετασχηματισμό Fourier του,

$$X(\Omega) = \cos^2(3\,\Omega + \pi/4) \ .$$

**Λύση:** Παρατηρούμε πως επειδή $2\cos^2(\theta) = 1 + \cos(2\,\theta)$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}\{\cos^2(3\,\Omega + \pi/4)\} &= \mathcal{F}^{-1}\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(6\ \Omega + \pi/2)\} \\
&= \mathcal{F}^{-1}\{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(e^{j\,(6\ \Omega + \pi/2)} + e^{-j\,(6\ \Omega + \pi/2)})\} \\
&= \mathcal{F}^{-1}\{\frac{1}{4}e^{-j\,\pi/2}\,e^{-6\,j\,\Omega} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{j\,\pi/2}\,e^{6\,j\,\Omega}\} \\
&= -\frac{j}{4}\delta(t-6) + \frac{1}{2}\delta(t) + \frac{j}{4}\delta(t+6) \ .
\end{aligned}$$

---

**Θέμα 2:** (b) (9%) Υπολογίστε τον μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου $X(e^{j\,\omega})$ του

$$x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^{|n|} u[-n-1] \ .$$

**Λύση:** Παρατηρούμε πως:

$$\begin{aligned}
x[n] &= \left(\frac{1}{3}\right)^{-n} u[-n-1] = \left(\frac{1}{3}\right)^{-n} u[-n-1] + \left(\frac{1}{3}\right)^{0} \delta[n] - \left(\frac{1}{3}\right)^{0} \delta[n] \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^{-n} u[-n] - \delta[n] \ .
\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας την ιδιότητα $\mathcal{DF}\{\,x_1[-n]\,\} = X_1(e^{-j\,\omega})$ στον πρώτο όρο του αθροίσματος της παραπάνω, καταλήγουμε στο:

$$\mathcal{DF}\{\,x[n]\,\} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\,(-\omega)}} - 1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{e^{j\,\omega}}{1 - \frac{1}{3}e^{j\,\omega}} \ .$$

---

**Θέμα 2:** (c) (9%) Δίνονται οι συντελεστές της σειράς Fourier

$$c_k \;=\; \begin{cases} j\,k\,, & \text{για } |k| < 3 \\ 0\,, & \text{αλλού} \end{cases}$$

ενός περιοδικού σήματος $x(t)$ συνεχούς χρόνου με περίοδο $4$. Προσδιορίστε το σήμα $x(t)$ σε όσο το δυνατόν απλούστερη μορφή.

**Λύση:** Από τα δεδομένα της άσκησης έχουμε $T_o \;=\; 4$, συνεπώς $\Omega_o \;=\; 2\,\pi/T_o \;=\; \pi/2$ . Εκφράζοντας το σήμα σε ανάπτυγμα εκθετικών, έχουμε (καθώς μόνο οι συντελεστές $c_{\pm 2}$, $c_{\pm 1}$ είναι μη μηδενικοί):

$$\begin{aligned} x(t) \;=\; \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\, e^{\,j\,k\,\Omega_o\,t} \;&=\; c_{-2}\, e^{-j\,2\,(\pi/2)\,t} \;+\; c_{-1}\, e^{-j\,(\pi/2)\,t} \;+\; c_1\, e^{\,j\,(\pi/2)\,t} \;+\; c_2\, e^{\,j\,2\,(\pi/2)\,t} \\ &=\; -\,2\,j\, e^{-j\,\pi\,t} \;+\; 2\,j\, e^{\,j\,\pi\,t} \;-\; j\, e^{-j\,\pi\,t/2} \;+\; j\, e^{\,j\,\pi\,t/2} \\ &=\; 2\,j\,(\, e^{\,j\,\pi\,t} \;-\; e^{-j\,\pi\,t}\,) \;+\; j\,(\, e^{\,j\,\pi\,t/2} \;-\; e^{-j\,\pi\,t/2}\,) \\ &=\; 2\,j\,2\,j\;\sin\,(\pi\,t) \;+\; j\,2\,j\;\sin\,(\pi\,t/2) \\ &=\; -\,4\,\sin\,(\pi\,t) \;-\; 2\,\sin\,(\frac{\pi}{2}\,t)\;\; . \end{aligned}$$

---

**Θέμα 2:** (d) (9%) Υπολογίστε τον αντίστροφο μετασχηματισμό $\mathcal{Z}$ του

$$X(z) \;=\; \log\,(\,1 \;-\; \frac{1}{2}\,z^{\,-1}\,) \;\; ,$$

με περιοχή σύγκλισης το $|z| \;>\; 1/2$.

**Λύση:** Παραγωγίζουμε το $X(z)$ και πολλαπλασιάζουμε με $-\,z$, οπότε παίρνουμε:

$$Y(z) \;=\; -\,z\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,z}\,X(z) \;=\; -\,\frac{\frac{1}{2}\,z^{\,-1}}{1 \;-\; \frac{1}{2}\,z^{\,-1}} \;\; .$$

Από το τυπολόγιο, και με βάση την δοθείσα περιοχή σύγκλισης, έχουμε:

$$y[n] \;=\; \mathcal{Z}^{\,-1}\{Y(z)\} \;=\; -\,(\,\frac{1}{2}\,)^{\,n}\;u[n-1]\;\; .$$

Επίσης, με βάση την ιδιότητα της παραγώγισης, έχουμε ότι το ζητούμενο $x[n]$ συνδέεται με το παραπάνω $y[n]$ μέσω της σχέσης $y[n] = n\,x[n]$. Άρα, κατά συνέπεια, το ζητούμενο σήμα είναι το:

$$x[n] \;=\; \mathcal{Z}^{\,-1}\{X(z)\} \;=\; -\,\frac{1}{n}\,(\,\frac{1}{2}\,)^{\,n}\;u[n-1]\;\; .$$

---

**Θέμα 3:** (20%) Ένα Γ.Χ.Α., αιτιατό, και ευσταθές σύστημα έχει απόκριση συχνότητας:

$$H(\Omega) \;=\; \frac{j\,\Omega \;+\; 4}{6 \;-\; \Omega^2 \;+ 5\,j\,\Omega} \;\; .$$

(a, 6%) Υπολογίστε μία διαφορική εξίσωση που να συνδέει την είσοδο $x(t)$ και έξοδο $y(t)$ του συστήματος.

(b, 7%) Υπολογίστε την κρουστική απόκριση $h(t)$ του συστήματος.

(c, 7%) Υπολογίστε την έξοδο του συστήματος, όταν η είσοδός του είναι η:

$$x(t) \;=\; e^{-4t}\,u(t) \;-\; t\,e^{-4t}\,u(t) \;\; .$$

**Λύση:**

(a) Έχουμε από την δεδομένη απόκριση συχνότητας

$$H(\Omega) \;=\; \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} \;=\; \frac{j\Omega+4}{(-j\Omega)^2+5j\Omega+6} \;\;\Rightarrow\;\; [\,(-j\Omega)^2{+}5j\Omega{+}6\,]\,Y(\Omega) \;=\; [\,j\Omega{+}4\,]\,X(\Omega) \;\; ,$$

και συνεπώς μία ζητούμενη διαφορική εξίσωση εισόδου/εξόδου είναι η

$$\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}\,t^2} + 5\,\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}\,t} + 6\,y(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}\,t} + 4\,x(t) \;\; .$$

(b) Αναλύοντας την απόκριση συχνότητας σε μερικά κλάσματα, παίρνουμε:

$$H(\Omega) \;=\; \frac{4+j\Omega}{(2+j\Omega)(3+j\Omega)} \;=\; \frac{2}{2+j\Omega} \;-\; \frac{1}{3+j\Omega} \;\; .$$

Κατά συνέπεια,

$$h(t) \;=\; \mathcal{F}^{-1}\{\,H(\Omega)\,\} \;=\; 2\,e^{-2t}u(t) \;-\; e^{-3t}u(t) \;\; .$$

(c) Ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος εισόδου είναι:

$$X(\Omega) \;=\; \mathcal{F}\{\,x(t)\,\} \;=\; \frac{1}{4+j\Omega} \;-\; \frac{1}{(4+j\Omega)^2} \;=\; \frac{3+j\Omega}{(4+j\Omega)^2} \;\; .$$

Κατά συνέπεια,

$$Y(\Omega) \;=\; X(\Omega)\,H(\Omega) \;=\; \frac{4+j\Omega}{(2+j\Omega)(3+j\Omega)}\,\frac{3+j\Omega}{(4+j\Omega)^2} \;=\; \frac{1}{(2+j\Omega)(4+j\Omega)} \;\; .$$

Αναλύοντας την παραπάνω σε μερικά κλάσματα, παίρνουμε:

$$Y(\Omega) \;=\; \frac{1}{2}\,\frac{1}{2+j\Omega} \;-\; \frac{1}{2}\,\frac{1}{4+j\Omega} \;\; .$$

Κατά συνέπεια,

$$x(t) \;=\; \mathcal{F}^{-1}\{\,X(\Omega)\,\} \;=\; \frac{1}{2}\,e^{-2t}u(t) \;-\; \frac{1}{2}\,e^{-4t}u(t) \;\; .$$

---

**Θέμα 4:** (20%) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ένα σύστημα ανατροφοδότησης διακριτού χρόνου με μηδενικές αρχικές συνθήκες, όπου τα δύο υπο-συστήματα διακριτού χρόνου, $H_1$ και $H_2$, έχουν σχέσεις εισόδου / εξόδου που δίνονται από τις:

$$H_1: \qquad y_1[n] = 2\, x_1[n]$$

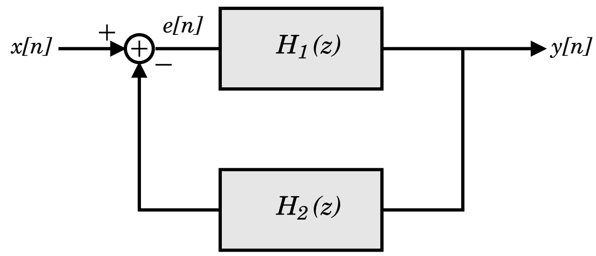
και

$$H_2: \qquad y_2[n] = -\,\frac{1}{6}\, x_2[n-1] \ ,$$

αντίστοιχα.

(a, 13%) Ποια είναι η κρουστική απόκριση που περιγράφει το όλο σύστημα, $h[n]$;

(b, 7%) Ποια είναι η έξοδος $y[n]$ του συστήματος σε είσοδο $x[n] = 3^{\,1-n}\, u[n-1]$;




**Λύση:** Το θέμα μπορεί να λυθεί στο πεδίο του διακριτού χρόνου ή συχνότητας / μετασχηματισμού $Z$. Διαλέγουμε τον δεύτερο τρόπο και έχουμε:

(a) Από την εκφώνηση έχουμε για το πρώτο υποσύστημα:

$$y_1[n] = 2\, x_1[n] \ \Rightarrow\ h_1[n] = 2\,\delta[n] \ \Rightarrow\ H_1(z) = 2 \ ,$$

και για το δεύτερο:

$$y_2[n] = -\,\frac{1}{6}\, x_2[n-1] \ \Rightarrow\ h_2[n] = -\,\frac{1}{6}\,\delta[n-1] \ \Rightarrow\ H_2(z) = -\,\frac{1}{6}\, z^{-1} \ .$$

Εισάγοντας την βοηθητική μεταβλητή / σήμα $e[n]$ ως την έξοδο του αθροιστή, έχουμε στο πεδίο του μετασχηματισμού $Z$:

$$\frac{Y(z)}{H_1(z)} \ = \ E(z) \ = \ X(z) \ - \ H_2(z)\, Y(z) \ \Rightarrow\ \frac{Y(z)}{X(z)} = H_1(z) \ - \ H_1(z)\, H_2(z)\, \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$\Rightarrow\ \frac{Y(z)}{X(z)}\, [\, 1 \ + \ H_1(z)\, H_2(z)\,] \ = \ H_1(z) \ \Rightarrow\ H(z) \ = \ \frac{H_1(z)}{1 \ + \ H_1(z)\, H_2(z)} \ .$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω τις συναρτήσεις μεταφοράς των δύο υποσυστημάτων, παίρνουμε:

$$H(z) \ = \ \frac{2}{1 \ - \ 2\,\frac{1}{6}\, z^{-1}} \ = \ \frac{2}{1 \ - \ \frac{1}{3}\, z^{-1}} \ \Rightarrow\ h[n] \ = \ 2\,(\frac{1}{3})^{\,n}\, u[n] \ ,$$

λόγω και του ότι η περιοχή σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς είναι η $|z| > 1/3$, επειδή το όλο σύστημα είναι αιτιατό.

(b) Παρατηρούμε ότι:

$$x[n] = 3^{1-n}\, u[n-1] = (\frac{1}{3})^{n-1} u[n-1] \quad \Rightarrow \quad X(z) = \frac{z^{-1}}{1 \,-\, \frac{1}{3}\, z^{-1}} \ \ ,$$

με περιοχή σύγκλισης $|z| > 1/3$, όπου χρησιμοποιήσαμε και την ιδιότητα της χρονικής ολίσθησης. Συνεχίζοντας, παίρνουμε την ζητούμενη έξοδο του συστήματος ως εξής:

$$Y(z) \,=\, X(z)\, H(z) \,=\, \frac{2\, z^{-1}}{(1 \,-\, \frac{1}{3}\, z^{-1})^{2}} \,=\, 6\, \frac{\frac{1}{3}\, z^{-1}}{(1 \,-\, \frac{1}{3}\, z^{-1})^{2}} \ \Rightarrow\ y[n] \,=\, 6\, n\, (\frac{1}{3})^{n}\, u[n] \ \ ,$$

καθόσον η περιοχή σύγκλισης της $Y(z)$ είναι η $|z| > 1/3$.

---