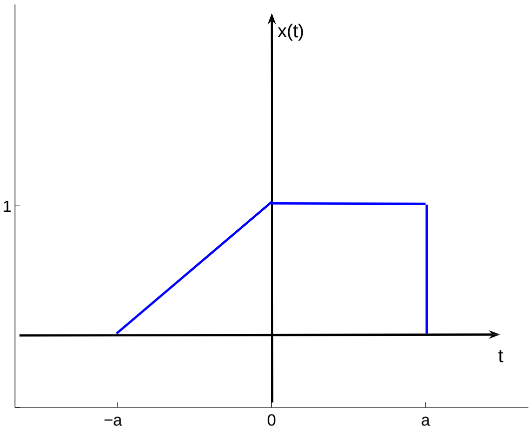
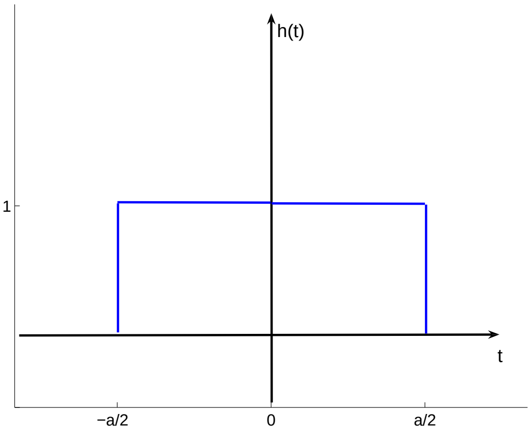
Θέμα 1: (25%) Τα (a) και (b) είναι ανεξάρτητα ερωτήματα. Απαντήστε αναλυτικά.

(a, 10%) Βρείτε εάν το σύστημα με απόκριση $y[n] = x^2[n]\cos(\omega_o n)$ (όπου $\omega_o > 0$) στο σήμα εισόδου $x[n]$ είναι Γ.Χ.Α., αν είναι αιτιατό, αν είναι ευσταθές, και αν είναι αντιστρέψιμο.

(b, 15%) Υπολογίστε και σχεδιάστε την συνέλιξη $y(t) = x(t) * h(t)$, όπου τα $x(t)$ και $h(t)$ δίνονται παρακάτω.





Λύση:

(a) Παρατηρούμε τα παρακάτω:

- Το δοθέν σύστημα δεν είναι χρονικά αναλλοίωτο, καθόσον η έξοδός του στο σήμα $x[n-n_o]$ είναι $x^2[n-n_o]\cos(\Omega_o n)$. Προφανώς αυτή δεν ταυτίζεται με την έξοδο $y[n-n_o] = x^2[n-n_o]\cos(\Omega_o n - \Omega_o n_o)$ (για n_o τέτοιο ώστε $\cos(\Omega_o n - \Omega_o n_o) \neq \cos(\Omega_o n)$).

  Το σήμα επίσης δεν είναι γραμμικό, καθόσον μπορούμε εύκολα να βρούμε α, β, $x_1[n]$, $x_2[n]$, και n για τα οποία ισχύει:

  $$(\alpha\, x_1[n] + \beta\, x_2[n])^2 \cos(\Omega_o n) \neq \alpha\, x_1^2[n]\cos(\Omega_o n) + \beta\, x_2^2[n]\cos(\Omega_o n) \quad .$$

  Άρα το σύστημα **δεν είναι Γ.Χ.Α.**

- Το σύστημα **είναι αιτιατό**, καθόσον η έξοδός του σε κάθε χρονική στιγμή είναι συνάρτηση της τιμής εισόδου του μόνο της ίδιας χρονικής στιγμής.

- Το σύστημα **είναι** BIBO **ευσταθές**, καθόσον εάν ισχύει $|x[n]| < B$, για κάθε n, θα έχουμε και:

  $$|y[n]| \;=\; |x^2[n]\cos(\Omega_o n)| \;=\; |x[n]|^2\, |\cos(\Omega_o n)| \;\leq\; |x[n]|^2 \;<\; B^2 \;\;,$$

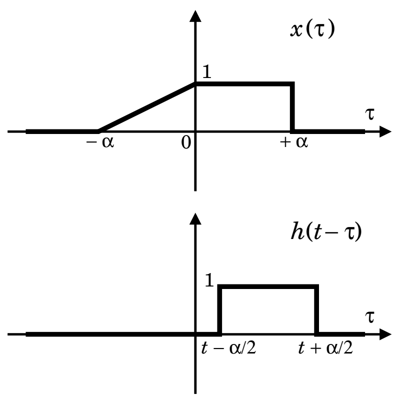
  άρα η έξοδός του θα είναι φραγμένη για κάθε n.

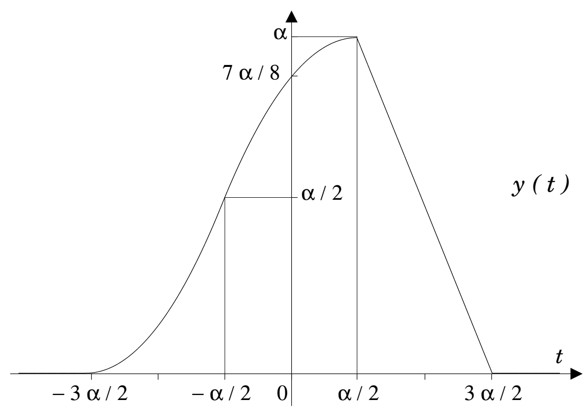
- Το σύστημα **δεν είναι αντιστρέψιμο**. Για παράδειγμα, δύο διαφορετικά σήματα εισόδου, τα $\delta[n]$ και $-\delta[n]$, δίνουνε την ίδια έξοδο $\delta[n]$.

(b) Πριν προχωρήσουμε, γράφουμε και τα δύο σήματα σε κλειστή μορφή, ώστε να διευκολυνθούν οι πράξεις μας στο ολοκλήρωμα της συνέλιξης, ως:

$$x(t) \;=\; \begin{cases} 0\,, & \text{για } \; t < -\alpha \\ 1 + t/\alpha\,, & \text{για } \; -\alpha \le t < 0 \\ 1\,, & \text{για } \; 0 \le t < \alpha \\ 0\,, & \text{για } \; t \ge \alpha \end{cases} \quad , \quad \text{και} \qquad h(t) \;=\; \begin{cases} 1\,, & \text{για } \; |t| \le \alpha/2 \\ 0\,, & \text{για } \; |t| > \alpha/2 \end{cases} \quad ,$$

όπως προκύπτει εύκολα από τα δοθέντα σχήματα. Για να βοηθηθούμε περαιτέρω στον υπολογισμό της συνέλιξης $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$, ξανασχεδιάζουμε αριστερά στο παρακάτω σχήμα το $x(\tau)$ και το μετατοπισμένο σήμα $h(t-\tau)$ ως συνάρτηση του τ, το δεύτερο για κάποιο t.





Στην συνέχεια παρατηρούμε πως τα σήματα δεν έχουνε επικάλυψη για $t + \alpha/2 < -\alpha$, ισοδύναμα δηλαδή για $t < -3\,\alpha/2$, όπως και για $t - \alpha/2 > \alpha$, ισοδύναμα δηλαδή για $t > 3\,\alpha/2$. Για τα παραπάνω διαστήματα κατά συνέπεια έχουμε $y(t) = 0$.

Συνεχίζουμε τώρα, για τα εναπομείναντα $t \in [-3\,\alpha/2\,,\ 3\,\alpha/2]$, από αριστερά προς τα δεξιά, όπου υπάρχει επικάλυψη των δύο σημάτων. Παρατηρούμε πρώτα πως για $-\alpha < t + \alpha/2 < 0$, ισοδύναμα $-3\,\alpha/2 < t < -\alpha/2$, έχουμε επίσης ότι $t - \alpha/2 < -\alpha$, άρα:

$$y(t) \;=\; \int_{\tau=-\alpha}^{\tau=t+\alpha/2} \left(\frac{\tau}{a} + 1\right) d\tau \;=\; \left(\frac{\tau^2}{2\,\alpha} + \tau\right)\Bigg|_{-\alpha}^{t+\alpha/2} \;=\; \frac{(t+\alpha/2)^2}{2\,\alpha} \;-\; \frac{\alpha}{2} \;+\; t \;+\; \frac{\alpha}{2} \;+\; \alpha$$

$$=\; \frac{t^2}{2\,\alpha} \;+\; \frac{3\,t}{2} \;+\; \frac{9\,\alpha}{8}\;.$$

Για το αμέσως επόμενο διάστημα ενδιαφέροντος έχουμε $0 < t + \alpha/2 < \alpha$, ισοδύναμα $-\alpha/2 < t < \alpha/2$, κατά συνέπεια ισχύει επίσης και $-\alpha < t - \alpha/2 < 0$, άρα:

$$y(t) \;=\; \int_{\tau=t-\alpha/2}^{\tau=0} \left(\frac{\tau}{a} + 1\right) d\tau \;+\; \int_{\tau=0}^{\tau=t+\alpha/2} d\tau \;=\; \left(\frac{\tau^2}{2\,\alpha} + \tau\right)\Bigg|_{t-\alpha/2}^{0} \;+\; \tau\,\Big|_0^{t+\alpha/2}$$

$$=\; -\,\frac{t^2}{2\,\alpha} \;+\; \frac{t}{2} \;+\; \frac{7\,\alpha}{8}\;.$$

Τέλος, έχουμε το διάστημα $0 < t - \alpha/2 < \alpha$, ισοδύναμα $\alpha/2 < t < 3\,\alpha/2$, για το οποίο παίρνουμε:

$$y(t) \;=\; \int_{\tau = t - \alpha/2}^{\tau = \alpha} d\,\tau \;\;=\;\; \alpha \;-\; (\,t - \alpha/2\,) \;\;=\;\; 3\,\alpha/2 \;-\; t \;\; .$$

Συνοψίζοντας τα παραπάνω, παίρνουμε:

$$y(t) \;\;=\;\; \begin{cases} 0\;, & \text{για} \;\; t \,\leq -\,3\,\alpha/2 \\ \dfrac{t^2}{2\,\alpha} \;+\; \dfrac{3\,t}{2} \;+\; \dfrac{9\,\alpha}{8}\,, & \text{για} \;\; -\,3\,\alpha/2 < t \leq -\alpha/2 \\ -\,\dfrac{t^2}{2\,\alpha} \;+\; \dfrac{t}{2} \;+\; \dfrac{7\,\alpha}{8}\,, & \text{για} \;\; -\,\alpha/2 < t \leq \alpha/2 \\ -\,t \;+\; \dfrac{3\,\alpha}{2}\,, & \text{για} \;\; \alpha/2 < t \leq 3\,\alpha/2 \\ 0\,, & \text{για} \;\; t > 3\,\alpha/2 \end{cases} \quad ,$$

η γραφική της οποίας δίνεται στα δεξιά του παραπάνω σχήματος.

Θέμα 2: (30%) Τα (a), (b), και (c) είναι ανεξάρτητα ερωτήματα. Απαντήστε αναλυτικά.

(a, 10%) Υπολογίστε τον μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου (DTFT) $X(e^{j\omega})$ του σήματος:

$$x[n] = \delta[n-4] + n\left(\frac{3}{4}\right)^n u[n] - \delta[n+4] \ .$$

(b, 10%) Υπολογίστε το σήμα $x[n]$ από τον αντίστοιχό του μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου (DTFT),

$$X(e^{j\omega}) = \frac{\sin(5\,\omega/2)\ \cos(\pi/2 - 3\,\omega/2)}{\sin^2(\omega/2)} \ .$$

(c, 10%) Βρείτε την κρουστική απόκριση $h(t)$ του αιτιατού, Γ.Χ.Α. συστήματος συνεχούς χρόνου που ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} - 4\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + x(t) \ .$$

Είναι το σύστημα ευσταθές;

Λύση:

(a) Από γνώση ζευγών DTFT, τις ιδιότητες της μετατόπισης στον χρόνο και της παραγώγισης στο πεδίο της συχνότητας, και την σχέση του Euler παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
\mathcal{DF}\{x[n]\} &= \mathcal{DF}\{\delta[n-4]\} - \mathcal{DF}\{\delta[n+4]\} + \mathcal{DF}\{n\left(\frac{3}{4}\right)^n u[n]\} \\
&= e^{-4j\omega} - e^{4j\omega} + j\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\omega}\left(\frac{1}{1-\frac{3}{4}e^{-j\omega}}\right) \\
&= -2\,j\,\sin(4\,\omega) + \frac{\frac{3}{4}e^{-j\omega}}{(1-\frac{3}{4}e^{-j\omega})^2} \ .
\end{aligned}$$

(b) Παρατηρούμε, χρησιμοποιώντας λίγη τριγωνομετρία και την ιδιότητα ότι συνέλιξη στο πεδίο του χρόνου αντιστοιχεί σε πολλαπλασιασμό στο πεδίο της συχνότητας, ότι:

$$\begin{aligned}
\mathcal{DF}^{-1}\{X(e^{j\omega})\} &= \mathcal{DF}^{-1}\left\{\frac{\sin(5\,\omega/2)\ \cos(\pi/2-3\,\omega/2)}{\sin^2(\omega/2)}\right\} \\
&= \mathcal{DF}^{-1}\left\{\frac{\sin(5\,\omega/2)\ \sin(3\,\omega/2)}{\sin^2(\omega/2)}\right\} \\
&= \mathcal{DF}^{-1}\left\{\frac{\sin(3\,\omega/2)}{\sin(\omega/2)}\right\} * \mathcal{DF}^{-1}\left\{\frac{\sin(5\,\omega/2)}{\sin(\omega/2)}\right\} = x_1[n] * x_2[n] \ ,
\end{aligned}$$

όπου

$$x_1[n] = \mathcal{DF}^{-1}\left\{\frac{\sin(3\,\omega/2)}{\sin(\omega/2)}\right\} = \begin{cases} 1\,, & \text{για } |n| \le 1 \\ 0\,, & \text{αλλού} \end{cases} ,$$

και

$$x_2[n] \;=\; \mathcal{DF}^{-1}\left\{\frac{\sin(5\,\omega/2)}{\sin(\omega/2)}\right\} \;=\; \begin{cases} 1\,, & \text{για } |n| \le 2 \\ 0\,, & \text{αλλού}\;. \end{cases}$$

Η ζητούμενη συνέλιξη μπορεί να υπολογιστεί με διάφορους τρόπους. Ένας εξ' αυτών είναι ο τρόπος υπολογισμού της συνέλιξης ως γινομένου πίνακα με διάνυσμα, καθόσον πρόκειται για δύο σήματα διακριτού χρόνου και πεπερασμένης διάρκειας. Έχουμε λοιπόν:

$$\mathbf{x}_1 = [\,x_1[-1]\;x_1[0]\;x_1[1]\,]^T = [1\;1\;1]^T$$

με μήκος 3, και

$$\mathbf{x}_2 = [\,x_2[-2]\;x_2[-1]\;x_2[0]\;x_2[1]\;x_2[2]\,]^T = [1\;1\;1\;1\;1]^T$$

με μήκος 5. Κατά συνέπεια η συνέλιξή τους θα ορίζεται μεταξύ -3 και 3 (δηλαδή έχει μήκος 7), και μπορεί να υπολογιστεί ως:

$$\begin{bmatrix} x[-3] \\ x[-2] \\ x[-1] \\ x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2[-2] & 0 & 0 \\ x_2[-1] & x_2[-2] & 0 \\ x_2[0] & x_2[-1] & x_2[-2] \\ x_2[1] & x_2[0] & x_2[-1] \\ x_2[2] & x_2[1] & x_2[0] \\ 0 & x_2[2] & x_2[1] \\ 0 & 0 & x_2[2] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1[-1] \\ x_1[0] \\ x_1[1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Κατά συνέπεια, το ζητούμενο σήμα είναι το:

$$x[n] = \delta[n+3] + 2\,\delta[n+2] + 3\,\delta[n+1] + 3\,\delta[n] + 3\,\delta[n-1] + 2\,\delta[n-2] + \delta[n-3]\;\;.$$

(c) Εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό Laplace επί της δοθείσας διαφορικής εξίσωσης, και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της γραμμικότητας και παραγώγισης στο πεδίο του χρόνου, παίρνουμε:

$$s^2\,Y(s) \;-\; 4\,s\,Y(s) \;+\; 4\,Y(s) \;\;=\;\; s\,X(s) \;+ X(s)\;\;,$$

συνεπώς:

$$H(s) \;=\; \frac{Y(s)}{X(s)} \;=\; \frac{s+1}{s^2 \;-\; 4\,s \;+\; 4} \;=\; \frac{s+1}{(s-2)^2} \;= \frac{1}{s-2} \;+\; \frac{3}{(s-2)^2}\;\;,$$

όπως προκύπτει εύκολα με ανάλυση σε μερικά κλάσματα.

Παρατηρούμε πως επειδή το σύστημα είναι αιτιατό, η ρητή συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ που είναι ο μετασχηματισμός Laplace μίας δεξιάς κρουστικής απόκρισης $h(t)$ θα έχει περιοχή σύγκλισης στα δεξιά του πιο δεξιού πόλου, δηλαδή θα συγκλίνει για $\mathrm{Re}\{\,s\,\} > 2$. Η περιοχή αυτή σύγκλισης δεν περιλαμβάνει τον φανταστικό άξονα, άρα ο μετασχηματισμός Fourier $H(\Omega)$ (απόκριση συχνότητας) δεν υπάρχει!

Ωστόσο η κρουστική απόκριση υπάρχει και δίνεται από:

$$h(t) \;\;=\;\; \mathcal{L}^{-1}\{\,H(s)\,\} \;\;=\;\; \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2} \;+\; \frac{3}{(s-2)^2}\right\} \;\;=\;\; e^{2\,t}\,u(t) \;+\; 3\,t\,e^{2\,t}\,u(t)\;\;,$$

λόγω της περιοχής σύγκλισης που ορίσαμε παραπάνω (λόγω αιτιατότητας).

Προφανώς το σύστημα δεν είναι ευσταθές, όπως εύκολα φαίνεται από την περιοχή σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς ή από την μη φραγμένη κρουστική απόκριση.

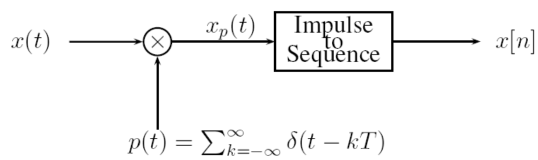
Θέμα 3: (25%) Τα (a) και (b) είναι ανεξάρτητα ερωτήματα. Απαντήστε αναλυτικά.

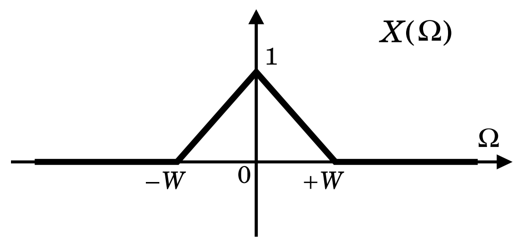
(a, 10%) Υποθέστε ότι έχουμε δύο ζωνοπεριορισμένα (bandlimited) σήματα $x(t)$ και $y(t)$ για τα οποία ισχύει $X(\Omega) = 0$ για $|\Omega| > 100\,\pi$ rad/sec και $Y(\Omega) = 0$ για $|\Omega| > 200\,\pi$ rad/sec, αντίστοιχα. Ποια είναι η μέγιστη περίοδος δειγματοληψίας T_s ώστε να μπορεί να ανακατασκευαστεί πλήρως από τα δείγματά του το νέο σήμα $z(t)$ που ορίζεται ως: $z(t) = 3\,x(2\,t) * y(t/5)$;

(b, 15%) Έστω το ακόλουθο σύστημα και ζωνοπεριορισμένο (bandlimited) σήμα εισόδου ($X(\Omega) = 0$ για $|\Omega| \geq W$), που δίνονται στο σχήμα.

(i, 8%) Απεικονίστε γραφικά τα φάσματα των σημάτων $x_p(t)$ και $x[n]$ (δηλ. τα $X_p(\Omega)$ και $X(e^{j\,\omega})$ αντίστοιχα), όταν $T = \pi/\,\mathrm{W}$, σημειώνοντας τις κρίσιμες τιμές στους άξονες.

(ii, 7%) Υπολογίστε τις ποσότητες $\int_{t=-\infty}^{+\infty} |\,x(t)|^2\,\mathrm{d}\,t$ και $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]$.





Λύση:

(a) Με βάση τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier, δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι το δοθέν σήμα $z(t) = 3\,x\,(2\,t) * y\,(t/5)$ έχει φάσμα:

$$Z(\Omega) \;=\; 3\,\frac{X(\Omega/2)}{2}\,5\,Y(5\,\Omega) \;=\; \frac{15}{2}\,X(\Omega/2)\,Y(5\,\Omega) \;\;.$$

Στον παραπάνω τύπο το $X(\Omega/2)$ είναι μηδενικό για $|\,\Omega\,| \;>\; 2\,(100\,\pi) \;=\; 200\,\pi$ (καθόσον το $X(\Omega)$ είναι μηδενικό για $|\,\Omega\,| > 100\,\pi\,)$, και το $Y(5\,\Omega)$ είναι μηδενικό για $|\Omega| > 200\pi/5 = 40\pi$ (καθόσον το $Y(\Omega)$ είναι μηδενικό για $|\Omega| > 200\pi$). Συνεπώς το $Z(\Omega)$ ως γινόμενο των παραπάνω θα έχει μηδενικό φάσμα για $|\,\Omega\,| > \min\,(\,200\,\pi\,,\,40\,\pi\,) \;=\; 40\,\pi$.

Σύμφωνα με το θεώρημα δειγματοληψίας Shannon, ο ρυθμός δειγματοληψίας πρέπει να ξεπερνάει το όριο Nyquist, δηλαδή, ισοδύναμα, $T_s < \pi/\Omega_{\max}$, όπου $\Omega_{\max} \;=\; 40\,\pi$ είναι η μέγιστη συχνότητα που περιλαμβάνει το ζωνοπεριορισμένο σήμα ενδιαφέροντος. Συνεπώς, το T_s θα πρέπει να είναι μικρότερο της τιμής $\pi/(40\,\pi) \;=\; 0.025\,\mathrm{sec}$.

(b.i) Για το φάσμα του $x_p(t)$ παρατηρούμε πως:

$$x_p(t) \;=\; [\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(t-nT)]\;.\;x(t) \;\;\Rightarrow\;\; \mathcal{F}\{\,x_p(t)\,\} \;=\; \frac{1}{2\,\pi}\,\mathcal{F}\{\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(t-nT)\} * X(\Omega)$$

$$\Rightarrow\;\; X_p(\Omega) \;=\; \frac{1}{2\,\pi}\,\frac{2\,\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(\Omega - \frac{2\,\pi\,n}{T}) * X(\Omega) \;\;=\;\; \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} [X(\Omega) * \delta(\Omega - 2\,n\,\mathrm{W}\,)]$$

$$=\;\; \frac{\mathrm{W}}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} X(\Omega \;-\; 2\,n\,\mathrm{W}) \;\;,$$

το διάγραμμα του οποίου δίνεται παρακάτω. Παρατηρούμε πως λόγω των δεδομένων της άσκησης δεν υπάρχει φαινόμενο αναδίπλωσης ($\Omega_s = 2\pi/T = 2\,\mathrm{W}$).

Συνεχίζουμε τώρα με το φάσμα του διακριτού σήματος $x_d[n]$. Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι:

$$X_d(e^{j\omega}) = X_p(\omega/T) \ \Rightarrow\ X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} X(\frac{\omega}{T} - 2\,n\,\mathrm{W}) = \frac{\mathrm{W}}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} X(\frac{\mathrm{W}}{\pi}\,\omega - 2\,n\,\mathrm{W}) \ ,$$

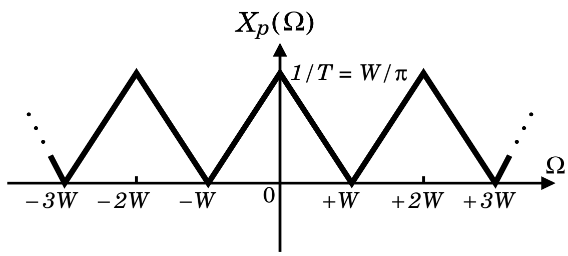
το διάγραμμα του οποίου δίνεται παρακάτω. Παρατηρούμε φυσικά ότι το φάσμα έχει περίοδο 2π.

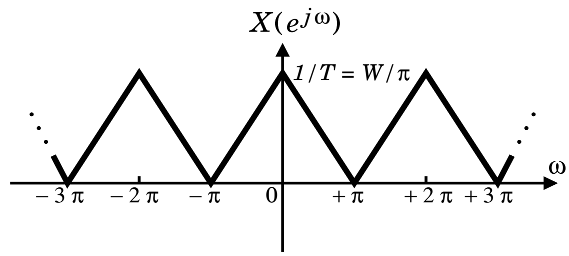
Το ότι $X_d(e^{j\omega}) = X_p(\omega/T)$ μπορεί να δειχθεί εύκολα επειδή $x_d[n] = x(nT)$ και αν συγκρίνουμε το:

$$x_p(t) = [\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\delta(t - n\,T)\,]\,.\,x(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x(n\,T)\,\delta(t - n\,T) \ \Rightarrow\ X_p(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x(n\,T)\,e^{-j\,\Omega\,n\,T}$$

με το:

$$X_d(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x_d[n]\,e^{-j\,\omega\,n} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x(n\,T)\,e^{-j\,\omega\,n} \ .$$





(b.ii) Από το φάσμα (όπως δίνεται στην εκφώνηση) είναι προφανές ότι το $x(t)$ είναι μη περιοδικό σήμα. Άρα, χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Parseval παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} |\,x(t)|^2\,\mathrm{d}\,t &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\,X(\Omega)\,|^2\,\mathrm{d}\,\Omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{0}(\frac{\Omega}{W} + 1)^2\,\mathrm{d}\,\Omega + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+W}(-\frac{\Omega}{W} + 1)^2\,\mathrm{d}\,\Omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\,(\frac{\Omega^3}{3\,W^2} + \Omega + \frac{\Omega^2}{W})\Big|_{-W}^{0} + \frac{1}{2\pi}\,(\frac{\Omega^3}{3\,W^2} + \Omega - \frac{\Omega^2}{W})\Big|_{0}^{W} \\
&= \frac{W}{3\pi} = \frac{1}{3\,T} \ .
\end{aligned}$$

Για το δεύτερο ζητούμενο του ερωτήματος, παρατηρούμε ότι:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\,e^{-j\,\omega\,n}\Big|_{\omega=0} = X(e^{j\,0}) = \frac{1}{T} = \frac{W}{\pi} \ ,$$

χρησιμοποιώντας και το παραπάνω σχήμα της $X(e^{j\omega})$.

Θέμα 4: (20%) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ένα σύστημα ανατροφοδότησης διακριτού χρόνου με μηδενικές αρχικές συνθήκες, όπου τα δύο υπο-συστήματα διακριτού χρόνου, H_1 και H_2, έχουν σχέσεις εισόδου / εξόδου που δίνονται από τις:

$$H_1 : \qquad y_1[n] = 2\, x_1[n]$$

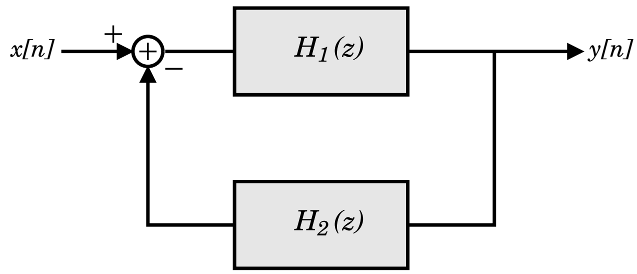
και

$$H_2 : \qquad y_2[n] = -\,\frac{1}{4}\, x_2[n-1] \ ,$$

αντίστοιχα.

(a, 13%) Ποια είναι η κρουστική απόκριση που περιγράφει το όλο σύστημα, $h[n]$;

(b, 7%) Ποια είναι η έξοδος $y[n]$ του συστήματος σε είσοδο $x[n] = 2^{\,1-n}\, u[n-1]$;



Λύση:

Το θέμα μπορεί να λυθεί στο πεδίο του διακριτού χρόνου ή συχνότητας / μετασχηματισμού Z. Διαλέγουμε τον δεύτερο τρόπο και έχουμε:

(a) Από την εκφώνηση έχουμε για το πρώτο υποσύστημα:

$$y_1[n] = 2\, x_1[n] \;\;\Rightarrow\;\; h_1[n] = 2\, \delta[n] \;\;\Rightarrow\;\; H_1(z) = 2 \ ,$$

και για το δεύτερο:

$$y_2[n] = -\,\frac{1}{4}\, x_2[n-1] \;\;\Rightarrow\;\; h_2[n] = -\,\frac{1}{4}\, \delta[n-1] \;\;\Rightarrow\;\; H_2(z) = -\,\frac{1}{4}\, z^{\,-1} \ .$$

Εισάγοντας την βοηθητική μεταβλητή / σήμα $e[n]$ ως την έξοδο του αθροιστή, έχουμε στο πεδίο του μετασχηματισμού Z:

$$\frac{Y(z)}{H_1(z)} \;=\; E(z) \;=\; X(z) \,-\, H_2(z)\, Y(z) \;\;\Rightarrow\;\; \frac{Y(z)}{X(z)} = H_1(z) \,-\, H_1(z)\, H_2(z)\, \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$\Rightarrow\;\; \frac{Y(z)}{X(z)}\, [\, 1 \,+\, H_1(z)\, H_2(z)\,] \;=\; H_1(z) \;\;\Rightarrow\;\; H(z) \;=\; \frac{H_1(z)}{1 \,+\, H_1(z)\, H_2(z)} \ .$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω τις συναρτήσεις μεταφοράς των δύο υποσυστημάτων, παίρνουμε:

$$H(z) \;=\; \frac{2}{1 \,-\, 2\,\frac{1}{4}\, z^{\,-1}} \;=\; \frac{2}{1 \,-\, \frac{1}{2}\, z^{\,-1}} \;\;\Rightarrow\;\; h(n) \;=\; 2\, (\frac{1}{2})^{\,n}\, u[n] \ ,$$

λόγω και του ότι η περιοχή σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς είναι η $|z| > 1/2$, επειδή το όλο σύστημα είναι αιτιατό.

(b) Παρατηρούμε ότι:

$$x[n] = 2^{1-n}\, u[n-1] = (\frac{1}{2})^{n-1} u[n-1] \;\;\Rightarrow\;\; X(z) = \frac{z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}\, z^{-1}} \;\; ,$$

με περιοχή σύγκλισης $|z| > 1/2$, όπου χρησιμοποιήσαμε και την ιδιότητα της χρονικής ολίσθησης. Συνεχίζοντας, παίρνουμε την ζητούμενη έξοδο του συστήματος ως εξής:

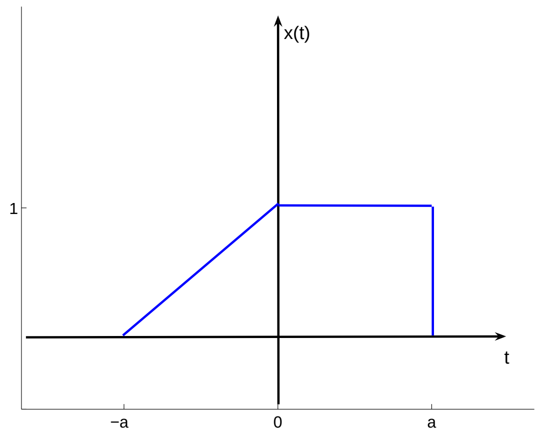
$$Y(z) = X(z)\, H(z) = \frac{2\, z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}\, z^{-1})^2} = 4\, \frac{\frac{1}{2}\, z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}\, z^{-1})^2} \;\;\Rightarrow\;\; y[n] = 4\, n\, (\frac{1}{2})^n\, u[n] \;\; ,$$

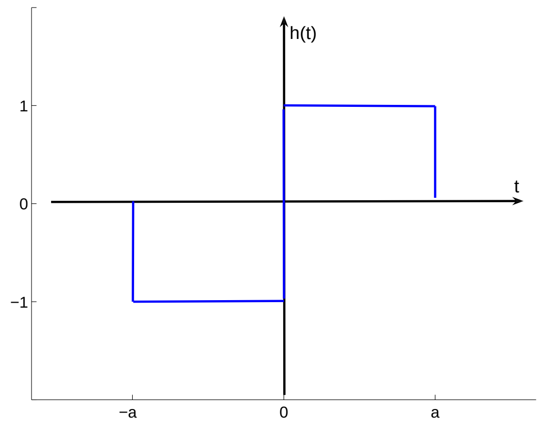
καθόσον η περιοχή σύγκλισης της $Y(z)$ είναι η $|z| > 1/2$.

Θέμα 1: (25%) Τα (a) και (b) είναι ανεξάρτητα ερωτήματα. Απαντήστε αναλυτικά.

(a, 10%) Βρείτε εάν το σύστημα με απόκριση $y(t) = x(t+2)\,\sin(\omega_o t - \pi/3)\, +\, 5$ (όπου $\omega_o \neq 0$) σε είσοδο $x(t)$ είναι Γ.Χ.Α., αν είναι αιτιατό, αν είναι ευσταθές, και αν είναι αντιστρέψιμο.

(b, 15%) Υπολογίστε και σχεδιάστε την συνέλιξη $y(t) = x(t) * h(t)$, όπου τα $x(t)$ και $h(t)$ δίνονται παρακάτω.





Λύση:

(a) Παρατηρούμε τα παρακάτω:

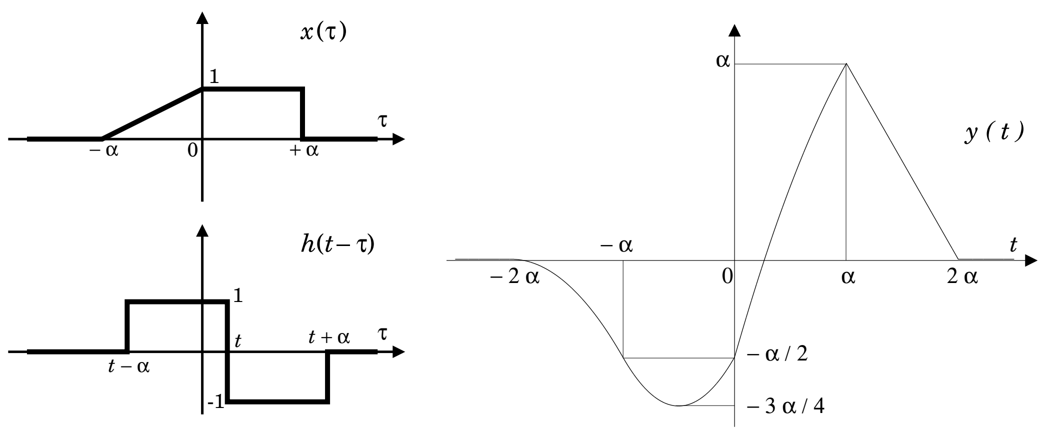
- Το δοθέν σύστημα δεν είναι χρονικά αναλλοίωτο, καθόσον η έξοδός του στο σήμα $x(t-2)$ είναι $x(t)\sin(\omega_o t - \pi/3)\, +\, 5$ και δεν ταυτίζεται με την έξοδο $y(t-2) = x(t)\sin(\omega_o t - 2\,\omega_o - \pi/3)$ (θεωρώντας ότι $\sin(\omega_o t - 2\,\omega_o - \pi/3) \neq \sin(\omega_o t - \pi/3)$, αλλιώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε κάποια άλλη κατάλληλη χρονική μετατόπιση).
  Το σήμα επίσης δεν είναι γραμμικό, λόγω της σταθερής 5, καθόσον ισχύει γενικά ότι:
  $$(\alpha\, x_1(t+2) + \beta\, x_2(t+2)\,)\,\sin(\omega_o t - \pi/3)\, +\, 5 \,\neq$$
  $$\neq\, \alpha\,[\,x_1(t{+}2)\,\sin(\omega_o t{-}\pi/3)\, +\, 5\,] + \beta\,[\,x_2(t{+}2)\,\sin(\omega_o t{-}\pi/3)\, +\, 5\,]\ ,$$
  για $\alpha\, +\, \beta \neq 1$.
  Άρα το σύστημα **δεν είναι Γ.Χ.Α.**
- Το σύστημα **δεν είναι αιτιατό**, καθόσον για παράδειγμα η έξοδός του την χρονική στιγμή $t = 0$ είναι συνάρτηση μελλοντικής τιμής εισόδου του στο $t = 2$.
- Το σύστημα **είναι** BIBO **ευσταθές**, καθόσον εάν ισχύει $|x(t)| < B$, για κάθε t, θα έχουμε και:
  $$|y(t)| \,=\, |x(t+2)\sin(\omega_o - \pi/3)\, +\, 5| \,\leq\, |x(t+2)\sin(\omega_o - \pi/3)|\, +\, 5$$
  $$\leq\, |x(t+2)|\, +\, 5 \,\leq\, B+5\ ,$$
  άρα η έξοδός του θα είναι φραγμένη για κάθε t.

- Το σύστημα **δεν είναι αντιστρέψιμο** γιατί η έξοδός του στα διαφορετικά σήματα $x_1(t) = \delta(t - \pi/3\omega_o)$ και $x_2(t) = \delta(t - 4\,\pi/3\omega_o)$ είναι η ίδια, δηλαδή $y_1(t) = y_2(t) = 5$.

(b) Πριν προχωρήσουμε, γράφουμε και τα δύο σήματα σε κλειστή μορφή, ώστε να διευκολυνθούν οι πράξεις μας στο ολοκλήρωμα της συνέλιξης, ως:

$$x(t) \;=\; \begin{cases} 0\,, & \text{για } t < -\alpha \\ 1 + t/\alpha\,, & \text{για } -\alpha \le t < 0 \\ 1\,, & \text{για } 0 \le t < \alpha \\ 0\,, & \text{για } t \ge \alpha \end{cases}, \quad \text{και} \quad h(t) \;=\; \begin{cases} 0\,, & \text{για } t < -\alpha \\ -1\,, & \text{για } -\alpha \le t < 0 \\ 1\,, & \text{για } 0 \le t < \alpha \\ 0\,, & \text{για } t > \alpha \end{cases},$$

όπως προκύπτει εύκολα από τα δοθέντα σχήματα. Για να βοηθηθούμε περαιτέρω στον υπολογισμό της συνέλιξης $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$, ξανασχεδιάζουμε αριστερά στο παρακάτω σχήμα το $x(\tau)$ και το μετατοπισμένο σήμα $h(t-\tau)$ ως συνάρτηση του τ, το δεύτερο για κάποιο t.



Στην συνέχεια παρατηρούμε πως τα σήματα δεν έχουνε επικάλυψη για $t + \alpha < -\alpha$, ισοδύναμα δηλαδή για $t < -2\alpha$, όπως και για $t - \alpha > \alpha$, ισοδύναμα δηλαδή για $t > 2\alpha$. Για τα παραπάνω διαστήματα κατά συνέπεια έχουμε $y(t) = 0$.

Συνεχίζουμε τώρα, για τα εναπομείναντα $t \in [-2\alpha\,,\, 2\alpha]$, από αριστερά προς τα δεξιά, όπου υπάρχει επικάλυψη των δύο σημάτων. Παρατηρούμε πρώτα πως για $-\alpha < t + \alpha < 0$, ισοδύναμα $-2\alpha < t < -\alpha$, έχουμε:

$$\begin{aligned} y(t) \;&=\; -\int_{\tau=-\alpha}^{\tau=t+\alpha} \Big(\frac{\tau}{a} + 1\Big)\, d\tau \;=\; \Big(\frac{\tau^2}{2\alpha} + \tau\Big)\Bigg|_{t+\alpha}^{-\alpha} = \frac{\alpha}{2} - \frac{(t+\alpha)^2}{2\alpha} - \alpha - t - \alpha \\ &= -\frac{t^2}{2\alpha} - 2t - 2\alpha\,. \end{aligned}$$

Για το αμέσως επόμενο διάστημα ενδιαφέροντος έχουμε $0 < t + \alpha < \alpha$, ισοδύναμα $-\alpha < t < 0$ (κατά συνέπεια ισχύει επίσης και $t - \alpha < -\alpha$), άρα:

$$\begin{aligned} y(t) \;&=\; \int_{\tau=-\alpha}^{\tau=t} \Big(\frac{\tau}{a} + 1\Big)\, d\tau \;-\; \int_{\tau=t}^{\tau=0} \Big(\frac{\tau}{a} + 1\Big)\, d\tau \;-\; \int_{\tau=0}^{\tau=t+\alpha} d\tau \\ &= \Big(\frac{\tau^2}{2\alpha} + \tau\Big)\Bigg|_{-\alpha}^{t} + \Big(\frac{\tau^2}{2\alpha} + \tau\Big)\Bigg|_{0}^{t} + \tau\,\Big|_{t+\alpha}^{0} \;=\; \frac{t^2}{\alpha} + t - \frac{\alpha}{2}\,. \end{aligned}$$

Συνεχίζοντας για $0 < t < \alpha$ βλέπουμε πως $-\alpha < t-\alpha < 0$ και $t+a > a$, οπότε:

$$y(t) \;=\; \int_{\tau=t-\alpha}^{\tau=0} (\frac{\tau}{a}+1)\,d\tau \;+\; \int_{\tau=0}^{\tau=t} d\tau \;-\; \int_{\tau=t}^{\tau=\alpha} d\tau \;=\; (\frac{\tau^{2}}{2\,\alpha}+\tau)\Big|_{t-\alpha}^{0} + \;\tau\,\Big|_{0}^{t} + \;\tau\,\Big|_{\alpha}^{t}$$

$$= \;-\frac{t^2}{2\,\alpha} \;+\; 2\,t \;-\; \frac{\alpha}{2} \;.$$

Τέλος, μένει ένα ακόμη διάστημα μη μηδενικής επικάλυψης μεταξύ των δύο σημάτων, αυτό για το οποίο ισχύει $0 < t-\alpha < \alpha$, ισοδύναμα $\alpha < t < 2\,\alpha$, και για το οποίο παίρνουμε:

$$y(t) \;=\; \int_{\tau=t-\alpha}^{\tau=\alpha} d\tau \;=\; 2\,\alpha \;-\; t \;.$$

Συνοψίζοντας τα παραπάνω, παίρνουμε:

$$y(t) \;=\; \begin{cases} 0\,, & \text{για} \;\; t \le -2\,\alpha \\ -\dfrac{t^2}{2\,\alpha} \;-\; 2\,t \;-\; 2\,\alpha\,, & \text{για} \;\; -2\,\alpha < t \le -\alpha \\ \dfrac{t^2}{\alpha} \;+\; t \;-\; \dfrac{\alpha}{2}\,, & \text{για} \;\; -\alpha < t \le 0 \\ -\dfrac{t^2}{2\,\alpha} \;+\; 2\,t \;-\; \dfrac{\alpha}{2}\,, & \text{για} \;\; 0 < t \le \alpha \\ -\,t \;+\; 2\,\alpha\,, & \text{για} \;\; \alpha < t \le 2\,\alpha \\ 0\,, & \text{για} \;\; t > 2\,\alpha \end{cases} \quad ,$$

η γραφική της οποίας δίνεται στα δεξιά του παραπάνω σχήματος.

Θέμα 2: (30%) Τα (a), (b), και (c) είναι ανεξάρτητα ερωτήματα. Απαντήστε αναλυτικά.

(a, 10%) Υπολογίστε το σήμα $x[n]$ από τον αντίστοιχό του μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου (DTFT),

$$X(e^{j\omega}) \;=\; \frac{\sin(3\,\omega/2)\;\sin(5\,\omega/2)}{1-\cos^2(\omega/2)} \;\;.$$

(b, 10%) Υπολογίστε τον μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου (DTFT) $X(e^{j\omega})$ του σήματος:

$$x[n] = \delta[n-3] + n\left(\frac{2}{3}\right)^n u[n] + \delta[n+3] \;\;.$$

(c, 10%) Βρείτε την κρουστική απόκριση $h(t)$ του αιτιατού, Γ.Χ.Α. συστήματος συνεχούς χρόνου που ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} - 6\frac{dy(t)}{dt} + 9y(t) = \frac{dx(t)}{dt} - x(t) \;\;.$$

Είναι το σύστημα ευσταθές;

Λύση:

(a) Παρατηρούμε, χρησιμοποιώντας λίγη τριγωνομετρία και την ιδιότητα ότι συνέλιξη στο πεδίο του χρόνου αντιστοιχεί σε πολλαπλασιασμό στο πεδίο της συχνότητας, ότι:

$$\begin{aligned}\mathcal{DF}^{-1}\{X(e^{j\omega})\} &= \mathcal{DF}^{-1}\left\{\frac{\sin(3\,\omega/2)\;\sin(5\,\omega/2)}{1-\cos^2(\omega/2)}\right\} = \mathcal{DF}^{-1}\left\{\frac{\sin(3\,\omega/2)\;\sin(5\,\omega/2)}{\sin^2(\omega/2)}\right\}\\ &= \mathcal{DF}^{-1}\left\{\frac{\sin(3\,\omega/2)}{\sin(\omega/2)}\right\} * \mathcal{DF}^{-1}\left\{\frac{\sin(5\,\omega/2)}{\sin(\omega/2)}\right\} = x_1[n] * x_2[n] \;\;,\end{aligned}$$

όπου

$$x_1[n] \;=\; \mathcal{DF}^{-1}\left\{\frac{\sin(3\,\omega/2)}{\sin(\omega/2)}\right\} \;=\; \begin{cases}1\,, & \text{για } |n|\le 1\\ 0\,, & \text{αλλού}\end{cases} \;,$$

και

$$x_2[n] \;=\; \mathcal{DF}^{-1}\left\{\frac{\sin(5\,\omega/2)}{\sin(\omega/2)}\right\} \;=\; \begin{cases}1\,, & \text{για } |n|\le 2\\ 0\,, & \text{αλλού}\end{cases} \;.$$

Η ζητούμενη συνέλιξη μπορεί να υπολογιστεί με διάφορους τρόπους. Ένας εξ' αυτών είναι ο τρόπος υπολογισμού της συνέλιξης ως γινομένου πίνακα με διάνυσμα, καθόσον πρόκειται για δύο σήματα διακριτού χρόνου και πεπερασμένης διάρκειας. Έχουμε λοιπόν:

$$\mathbf{x}_1 = [\,x_1[-1]\;x_1[0]\;x_1[1]\,]^T = [1\;1\;1]^T$$

με μήκος 3, και

$$\mathbf{x}_2 = [\,x_2[-2]\;x_2[-1]\;x_2[0]\;x_2[1]\;x_2[2]\,]^T = [1\;1\;1\;1\;1]^T$$

με μήκος 5. Κατά συνέπεια η συνέλιξή τους θα ορίζεται μεταξύ -3 και 3 (δηλαδή έχει μήκος 7), και μπορεί να υπολογιστεί ως:

$$\begin{bmatrix}x[-3]\\x[-2]\\x[-1]\\x[0]\\x[1]\\x[2]\\x[3]\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_2[-2] & 0 & 0\\ x_2[-1] & x_2[-2] & 0\\ x_2[0] & x_2[-1] & x_2[-2]\\ x_2[1] & x_2[0] & x_2[-1]\\ x_2[2] & x_2[1] & x_2[0]\\ 0 & x_2[2] & x_2[1]\\ 0 & 0 & x_2[2]\end{bmatrix} . \begin{bmatrix}x_1[-1]\\x_1[0]\\x_1[1]\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix} . \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\\3\\3\\2\\1\end{bmatrix} \;.$$

Κατά συνέπεια, το ζητούμενο σήμα είναι το:

$$x[n] = \delta[n+3] + 2\,\delta[n+2] + 3\,\delta[n+1] + 3\,\delta[n] + 3\,\delta[n-1] + 2\,\delta[n-2] + \delta[n-3] \ .$$

(b) Από γνώση ζευγών DTFT , τις ιδιότητες της μετατόπισης στον χρόνο και της παραγώγισης στο πεδίο της συχνότητας, και την σχέση του Euler παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
\mathcal{DF}\{\, x[n] \,\} \;&=\; \mathcal{DF}\{\, \delta[n-3] \,\} \;+\; \mathcal{DF}\{\, \delta[n+3] \,\} \;+\; \mathcal{DF}\{\, n \left(\frac{2}{3}\right)^{n} u[n] \,\} \\
&=\; e^{-3j\omega} \;+\; e^{3j\omega} \;+\; j\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\omega} \left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}\,e^{-j\omega}} \right) \\
&=\; 2\,\cos(3\,\omega) \;+\; \frac{\frac{2}{3}\,e^{-j\omega}}{(\,1-\frac{2}{3}\,e^{-j\omega}\,)^{2}} \ .
\end{aligned}$$

(c) Εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό Laplace επί της δοθείσας διαφορικής εξίσωσης, και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της γραμμικότητας και παραγώγισης στο πεδίο του χρόνου, παίρνουμε:

$$s^{2}\,Y(s) \;-\; 6\,s\,Y(s) \;+\; 9\,Y(s) \;=\; s\,X(s) \;-X(s) \ ,$$

συνεπώς:

$$H(s) \;=\; \frac{Y(s)}{X(s)} \;=\; \frac{s-1}{s^{2}\;-\;6\,s\;+\;9} \;=\; \frac{s-1}{(s-3)^{2}} \;=\frac{1}{s-3} \;+\; \frac{2}{(s-3)^{2}} \ ,$$

όπως προκύπτει εύκολα με ανάλυση σε μερικά κλάσματα.

Παρατηρούμε πως επειδή το σύστημα είναι αιτιατό, η ρητή συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ που είναι ο μετασχηματισμός Laplace μίας δεξιάς κρουστικής απόκρισης $h(t)$ θα έχει περιοχή σύγκλισης στα δεξιά του πιο δεξιού πόλου, δηλαδή θα συγκλίνει για $\mathrm{Re}\{\,s\,\} > 3$. Η περιοχή αυτή σύγκλισης δεν περιλαμβάνει τον φανταστικό άξονα, άρα ο μετασχηματισμός Fourier $H(\Omega)$ (απόκριση συχνότητας) δεν υπάρχει!

Ωστόσο η κρουστική απόκριση υπάρχει και δίνεται από:

$$h(t) \;=\; \mathcal{L}^{-1}\{\, H(s) \,\} \;=\; \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{s-3} \;+\; \frac{2}{(s-3)^{2}} \right\} \;=\; e^{3\,t}\,u(t) \;+\; 2\,t\,e^{3\,t}\,u(t) \ ,$$

λόγω της περιοχής σύγκλισης που ορίσαμε παραπάνω (λόγω αιτιατότητας).

Προφανώς το σύστημα δεν είναι ευσταθές, όπως εύκολα φαίνεται από την περιοχή σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς ή από την μη φραγμένη κρουστική απόκριση.

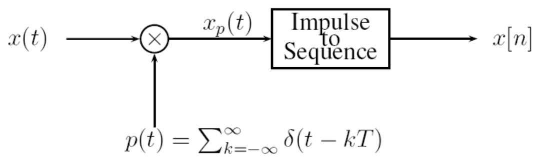
Θέμα 3: (25%) Τα (a) και (b) είναι ανεξάρτητα ερωτήματα. Απαντήστε αναλυτικά.

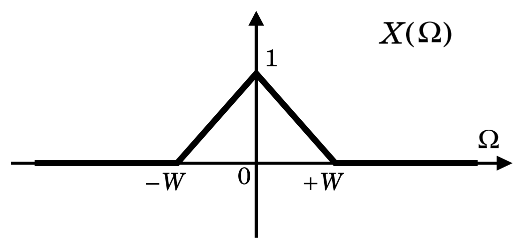
(a, 10%) Υποθέστε ότι έχουμε δύο ζωνοπεριορισμένα (bandlimited) σήματα $x(t)$ και $y(t)$ για τα οποία ισχύει $X(\Omega) = 0$ για $|\Omega| > 100\,\pi$ rad/sec και $Y(\Omega) = 0$ για $|\Omega| > 200\,\pi$ rad/sec, αντίστοιχα. Ποια είναι η μέγιστη περίοδος δειγματοληψίας T_s ώστε να μπορεί να ανακατασκευαστεί πλήρως από τα δείγματά του το νέο σήμα $z(t)$ που ορίζεται ως: $z(t) = 5\,y(t)\,\cos(300\,\pi\,t) + x(t/2)$;

(b, 15%) Έστω το ακόλουθο σύστημα και ζωνοπεριορισμένο (bandlimited) σήμα εισόδου ($X(\Omega) = 0$ για $|\Omega| \geq W$), που δίνονται στο σχήμα.

(i, 8%) Απεικονίστε γραφικά τα φάσματα των σημάτων $x_p(t)$ και $x[n]$ (δηλ. τα $X_p(\Omega)$ και $X(e^{j\omega})$ αντίστοιχα), όταν $T = \pi/\mathrm{W}$, σημειώνοντας τις κρίσιμες τιμές στους άξονες.

(ii, 7%) Υπολογίστε τις ποσότητες $\int_{t=-\infty}^{+\infty} x(t)\,\mathrm{d}\,t$ και $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\,x[n]\,|^2$.





Λύση:

(a) Με βάση τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier, δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι το δοθέν σήμα $z(t) = 5\,y(t)\,\cos(300\,\pi\,t) + x(t/2)$ έχει φάσμα:

$$\begin{aligned} Z(\Omega) &= 5\,Y(\Omega) * \mathcal{F}\{\cos(300\,\pi\,t)\} + 2\,X(2\,\Omega) \\ &= 5\,\pi\,Y(\Omega) * (\delta(\Omega - 300\,\pi) + \delta(\Omega + 300\,\pi)) + 2\,X(2\,\Omega) \\ &= 5\,\pi\,(Y(\Omega - 300\,\pi) + Y(\Omega + 300\,\pi)) + 2\,X(2\,\Omega)\ . \end{aligned}$$

Στον παραπάνω τύπο το $X(2\,\Omega)$ είναι μηδενικό για $|\,\Omega\,| > 100\,\pi/2 = 50\,\pi$ (καθόσον το $X(\Omega)$ είναι μηδενικό για $|\,\Omega\,| > 100\,\pi$), και τα $Y(\Omega \pm 300\,\pi)$ είναι μηδενικά για $|\,\Omega\,| > 200\,\pi + 300\,\pi = 500\,\pi$ (καθόσον έχουμε μετατόπιση των φασμάτων στο πεδίο της συχνότητας). Συνεπώς το $Z(\Omega)$ ως άθροισμα των παραπάνω θα έχει μηδενικό φάσμα για $|\,\Omega\,| > \max(50\,\pi\,, 500\,\pi) = 500\,\pi$.

Σύμφωνα με το θεώρημα δειγματοληψίας Shannon, ο ρυθμός δειγματοληψίας πρέπει να ξεπερνάει το όριο Nyquist, δηλαδή, ισοδύναμα, $T_s < \pi/\Omega_{\max}$, όπου $\Omega_{\max} = 500\,\pi$ είναι η μέγιστη συχνότητα που περιλαμβάνει το ζωνοπεριορισμένο σήμα ενδιαφέροντος. Συνεπώς, το T_s θα πρέπει να είναι μικρότερο της τιμής $\pi/(500\,\pi) = 0.002\,\mathrm{sec}$.

(b.i) Για το φάσμα του $x_p(t)$ παρατηρούμε πως:

$$x_p(t) = [\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(t - nT)]\,.\,x(t) \;\Rightarrow\; \mathcal{F}\{\,x_p(t)\,\} = \frac{1}{2\,\pi}\,\mathcal{F}\{\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(t - nT)\} * X(\Omega)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow\; X_p(\Omega) = \frac{1}{2\,\pi}\,\frac{2\,\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(\Omega - \frac{2\,\pi\,n}{T}) * X(\Omega) \;&=\; \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} [X(\Omega) * \delta(\Omega - 2\,n\,\mathrm{W})] \\ &=\; \frac{\mathrm{W}}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} X(\Omega - 2\,n\,\mathrm{W})\ , \end{aligned}$$

το διάγραμμα του οποίου δίνεται παρακάτω. Παρατηρούμε πως λόγω των δεδομένων της άσκησης δεν υπάρχει φαινόμενο αναδίπλωσης ($\Omega_s = 2\,\pi/T = 2\,\mathrm{W}$).

Συνεχίζουμε τώρα με το φάσμα του διακριτού σήματος $x_d[n]$. Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι:

$$X_d(e^{j\,\omega}) = X_p(\omega/T) \;\Rightarrow\; X_d(e^{j\,\omega}) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} X(\frac{\omega}{T} - 2\,n\,\mathrm{W}) = \frac{\mathrm{W}}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} X(\frac{\mathrm{W}}{\pi}\,\omega - 2\,n\,\mathrm{W}) \;\;,$$

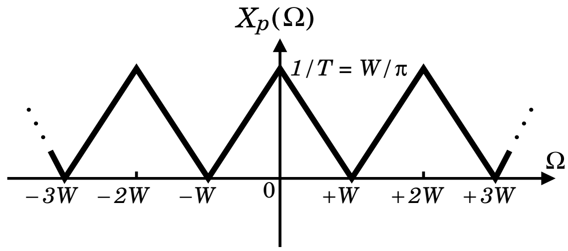
το διάγραμμα του οποίου δίνεται παρακάτω. Παρατηρούμε φυσικά ότι το φάσμα έχει περίοδο $2\,\pi$.

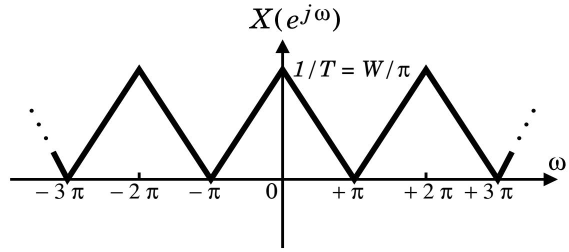
Το ότι $X_d(e^{j\,\omega}) \;=\; X_p(\omega/T)$ μπορεί να δειχθεί εύκολα επειδή $x_d[n] = x(n\,T)$ και αν συγκρίνουμε το:

$$x_p(t) = [\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(t - n\;T)\;]\;.\;x(t) \;=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x(n\,T)\;\delta(t-n\;T) \;\;\Rightarrow\;\; X_p(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x(n\,T)\;e^{-j\,\Omega\,n\,T}$$

με το:

$$X_d(e^{j\,\omega}) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x_d[n]\;e^{-j\,\omega\,n} \;=\; \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x(n\,T)\;e^{-j\,\omega\,n} \;\;.$$





(b.ii) Για το πρώτο ζητούμενο του ερωτήματος, παρατηρούμε ότι:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\mathrm{d}\,t \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\;e^{-j\,\Omega\,t}\mathrm{d}\,t\,\Big|_{\Omega=0} \;=\; X(\Omega=0) \;=\; 1 \;\;,$$

όπως φαίνεται εύκολα από το δοθέν φάσμα στο σχήμα της εκφώνησης της άσκησης.

Για το δεύτερο ζητούμενο του ερωτήματος, χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Parseval, παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
\sum_{-\infty}^{+\infty} |\,x[n]\,|^2 \;&=\; \frac{1}{2\,\pi}\;\int_{-\pi}^{+\pi} |\,X(e^{j\,\omega})\,|^2\,\mathrm{d}\,\omega \\
&=\; \frac{1}{2\,\pi}\;\int_{-\pi}^{0}\frac{W}{\pi}\;(\,\frac{\omega}{\pi}\;+\;1\,)^2\,\mathrm{d}\,\omega \;\;+\;\; \frac{1}{2\,\pi}\;\int_{0}^{+\pi}\frac{W}{\pi}\;(-\,\frac{\omega}{\pi}\;+\;1\,)^2\,\mathrm{d}\,\omega \\
&=\; \frac{W}{2\,\pi^2}\,(\,\frac{\omega^3}{3\,\pi^2}\;+\;\omega\;+\;\frac{\omega^2}{\pi}\,)\,\Big|_{-\pi}^{0} +\;\; \frac{W}{2\,\pi^2}\,(\,\frac{\omega^3}{3\,\pi^2}\;+\;\omega\;-\;\frac{\omega^2}{\pi}\,)\,\Big|_{0}^{\pi} \\
&=\; \frac{W}{3\,\pi} \;\;=\;\; \frac{1}{3\,T}\;\;.
\end{aligned}$$

Θέμα 4: (20%) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ένα σύστημα ανατροφοδότησης διακριτού χρόνου με μηδενικές αρχικές συνθήκες, όπου τα δύο υπο-συστήματα διακριτού χρόνου, H_1 και H_2, έχουν σχέσεις εισόδου / εξόδου που δίνονται από τις:

$$H_1 : \qquad y_1[n] = 2\,x_1[n]$$

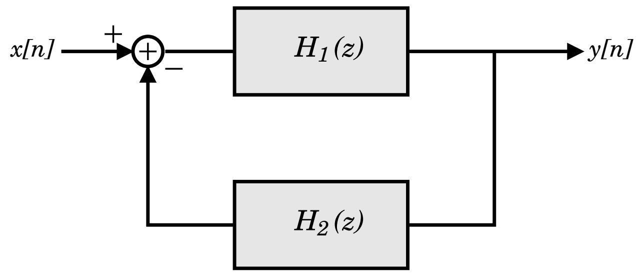
και

$$H_2 : \qquad y_2[n] = -\,\frac{1}{6}\,x_2[n-1] \;\; ,$$

αντίστοιχα.

(a, 13%) Ποια είναι η κρουστική απόκριση που περιγράφει το όλο σύστημα, $h[n]$;

(b, 7%) Ποια είναι η έξοδος $y[n]$ του συστήματος σε είσοδο $x[n] = 3^{\,1-n}\,u[n-1]$;



Λύση:

Το θέμα μπορεί να λυθεί στο πεδίο του διακριτού χρόνου ή συχνότητας / μετασχηματισμού Z. Διαλέγουμε τον δεύτερο τρόπο και έχουμε:

(a) Από την εκφώνηση έχουμε για το πρώτο υποσύστημα:

$$y_1[n] = 2\,x_1[n] \;\;\Rightarrow\;\; h_1[n] = 2\,\delta[n] \;\;\Rightarrow\;\; H_1(z) = 2 \;\; ,$$

και για το δεύτερο:

$$y_2[n] = -\,\frac{1}{6}\,x_2[n-1] \;\;\Rightarrow\;\; h_2[n] = -\,\frac{1}{6}\,\delta[n-1] \;\;\Rightarrow\;\; H_2(z) = -\,\frac{1}{6}\,z^{\,-1} \;\; .$$

Εισάγοντας την βοηθητική μεταβλητή / σήμα $e[n]$ ως την έξοδο του αθροιστή, έχουμε στο πεδίο του μετασχηματισμού Z:

$$\frac{Y(z)}{H_1(z)} \;=\; E(z) \;=\; X(z) \,-\, H_2(z)\,Y(z) \;\;\Rightarrow\;\; \frac{Y(z)}{X(z)} = H_1(z) \,-\, H_1(z)\,H_2(z)\,\frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$\Rightarrow\;\; \frac{Y(z)}{X(z)}\,[\,1 \,+\, H_1(z)\,H_2(z)\,] \;=\; H_1(z) \;\;\Rightarrow\;\; H(z) \;=\; \frac{H_1(z)}{1 \,+\, H_1(z)\,H_2(z)} \;\; .$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω τις συναρτήσεις μεταφοράς των δύο υποσυστημάτων, παίρνουμε:

$$H(z) \;=\; \frac{2}{1 \,-\, 2\,\frac{1}{6}\,z^{\,-1}} \;=\; \frac{2}{1 \,-\, \frac{1}{3}\,z^{\,-1}} \;\;\Rightarrow\;\; h(n) \;=\; 2\,(\frac{1}{3})^{\,n}\,u[n] \;\; ,$$

λόγω και του ότι η περιοχή σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς είναι η $|z| > 1/3$, επειδή το όλο σύστημα είναι αιτιατό.

(b) Παρατηρούμε ότι:

$$x[n] = 3^{1-n}\, u[n-1] = (\frac{1}{3})^{n-1}\, u[n-1] \;\; \Rightarrow \;\; X(z) = \frac{z^{-1}}{1 \,-\, \frac{1}{3}\, z^{-1}} \;\; ,$$

με περιοχή σύγκλισης $|z| > 1/3$, όπου χρησιμοποιήσαμε και την ιδιότητα της χρονικής ολίσθησης. Συνεχίζοντας, παίρνουμε την ζητούμενη έξοδο του συστήματος ως εξής:

$$Y(z) \,=\, X(z)\, H(z) \,=\, \frac{2\, z^{-1}}{(1 \,-\, \frac{1}{3}\, z^{-1})^2} \,=\, 6\, \frac{\frac{1}{3}\, z^{-1}}{(1 \,-\, \frac{1}{3}\, z^{-1})^2} \;\; \Rightarrow \;\; y[n] \,=\, 6\, n\, (\frac{1}{3})^n\, u[n] \;\; ,$$

καθόσον η περιοχή σύγκλισης της $Y(z)$ είναι η $|z| > 1/3$.