Θέμα 1: (30%) Τα (a), (b), και (c) είναι ανεξάρτητα ερωτήματα. Απαντήστε αναλυτικά.

(a, 8%) Δίνεται το σήμα: $x[n] = \delta[n] - \cos(\pi n/8)$.

(i, 3%) Είναι το σήμα άρτιο ή περιττό;

(ii, 5%) Πρόκειται για σήμα ισχύος ή ενέργειας και ποια είναι η ισχύς και ενέργειά του;

(b, 7%) Βρείτε την θεμελιώδη περίοδο του σήματος $x(t) = \sin(2t) + [\cos(2t - \pi/3)]^2$.

(c, 15%) Δίνεται το σύστημα με απόκριση $y(t) = x(t/2) + 3$ σε είσοδο $x(t)$.

(i, 4%) Είναι το σύστημα αιτιατό;

(ii, 4%) Είναι το σύστημα Γ.Χ.Α.;

(iii, 4%) Είναι το σύστημα ευσταθές;

(iv, 3%) Είναι το σύστημα αντιστρέψιμο, και αν ναι, ποιο είναι το αντίστροφό του;

Λύση:

(a.i) Το σήμα είναι **άρτιο**, γιατί: $x[-n] = \delta[-n] - \cos(-\pi n/8) = \delta[n] - \cos(\pi n/8) = x[n]$.

(a.ii) Το σήμα είναι σήμα **ισχύος**, όπως αποδεικνύουμε παρακάτω. Αυτό είναι αναμενόμενο, γιατί είναι άθροισμα ενός περιοδικού σήματος (του $\cos(\bullet)$) και ενός σήματος με τοπική ενέργεια (το $\delta[n]$ είναι μονάδα μόνο στο μηδέν). Πράγματι, χρησιμοποιώντας και την σχέση $2\cos^2(\theta) = (1 + \cos(2\theta))$, έχουμε:

$$\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}|x[n]|^2 = -\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}\cos^2(\pi n/8)$$

$$= \frac{1}{2N+1}\left(-1 + \sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{2}\cos(\pi n/4)$$

$$= \frac{1}{2N+1}\,\frac{2N-2}{2} + \frac{1}{2N+1}\sum_{n=0}^{N}\cos(\pi n/4)$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{2N-2}{2N+1} + \frac{1}{2N+1}\sum_{n=0}^{8\lfloor N/8\rfloor}\cos(\pi n/4) + \frac{1}{2N+1}\sum_{8\lfloor N/8\rfloor+1}^{N}\cos(\pi n/4) \; .$$

Παρατηρούμε πως ο δεύτερος όρος του παραπάνω αθροίσματος είναι μηδέν, ενώ το όριο του τρίτου όρου με $N \to +\infty$ γίνεται επίσης μηδέν, καθόσον φράσσεται από το $\pm 8/(2N+1)$. Το όριο τέλος του πρώτου όρου όταν $N \to +\infty$ είναι προφανώς $1/2$. Συνεπώς πρόκειται για σήμα ισχύος με $P_\infty = 1/2$ (και προφανώς $E_\infty = \infty$).

(b) Χρησιμοποιούμε την σχέση $2\cos^2\theta = 1 + \cos(2\theta)$ και ξαναγράφουμε το σήμα ως:

$$x(t) = \sin(2t) + \frac{1}{2}\cos(4t - 2\pi/3) + \frac{1}{2} .$$

Ο πρώτος όρος είναι περιοδικό σήμα με $\Omega_o = 2$, άρα $T_o = \pi$, ο δεύτερος όρος περιοδικό σήμα με $\Omega_o = 4$, άρα $T_o = \pi/2$, ενώ ο τρίτος όρος είναι σταθερά. Κατά συνέπεια το άθροισμά τους είναι περιοδικό με θεμελιώδη περίοδο $T_o = \pi$ ($\Omega_o = 2$) [αφού ο δεύτερος όρος έχει θεμελιώδη περίοδο $T_o = \pi/2$ θα έχει περίοδο και την $2T_o = \pi$].

(c.i) Το σύστημα είναι **μη αιτιατό**, καθόσον για $t = -2$, η έξοδός του είναι $y(-2) = x(-1) + 3$, δηλαδή εξαρτάται από την τιμή εισόδου στην μελλοντική χρονική στιγμή $t = -1$.

(c.ii) Το σύστημα **δεν είναι Γ.Χ.Α.**, καθόσον δεν είναι ούτε γραμμικό (λόγω της σταθερής 3), ούτε χρονικά αναλλοίωτο (λόγω του $t/2$). Πιο αναλυτικά:

Το σύστημα δεν είναι γραμμικό, λόγω της σταθερής 3, καθόσον ισχύει γενικά ότι:

$$(\alpha\, x_1(t/2) + \beta\, x_2(t/2)) + 3 \neq \alpha\,[\, x_1(t/2) + 3\,] + \beta\,[\, x_2(t/2) + 3\,] ,$$

για $\alpha + \beta \neq 1$.

Το σύστημα επίσης είναι χρονικά μεταβαλλόμενο, λόγω του όρου $t/2$ επί του σήματος εισόδου. Πράγματι, εάν θεωρήσουμε ως σήμα εισόδου το $x_1(t) = u(t+1) - u(t-1)$, δηλαδή τον παλμό με τιμή 1 στο διάστημα $[-1, 1]$, παίρνουμε ως έξοδο το $y_1(t) = u(t+2) - u(t-2) + 3$, δηλαδή τον παλμό με τιμή 4 στο διάστημα $[-2, 2]$. Εάν τώρα θεωρήσουμε ως σήμα εισόδου το $x_2(t) = x_1(t-1) = u(t) - u(t-2)$, δηλαδή τον παλμό με τιμή 1 στο διάστημα $[0, 2]$, παίρνουμε ως έξοδο το $y_2(t) = u(t) - u(t-4) + 3$, δηλαδή τον παλμό με τιμή 4 στο διάστημα $[0, 4]$. Παρατηρούμε κατά συνέπεια ότι $y_2(t) \neq y_1(t-1)$, καθόσον $y_1(t-1) = u(t-1) - u(t-3) + 3$, δηλαδή παλμός με τιμή 4 στο διάστημα $[-1, 3]$.

(c.iii) Το σύστημα είναι **ευσταθές** (κατά BIBO), καθόσον για φραγμένη είσοδο $|x(t)| < M$ για όλα τα t,

$$|\, y(t)\,| = |\, x(t/2) + 3\,| \leq |\, x(t/2)\,| + 3 = M + 3 ,$$

για όλα τα t, έχουμε κατά συνέπεια φραγμένη έξοδο.

(c.iv) Το σύστημα είναι **αντιστρέψιμο**, με το αντίστροφο σύστημα να δίνεται από την εξίσωση εισόδου-εξόδου: $y(t) = x(2t) - 3$. Αυτό είναι εύκολο να το διαπιστώσει κανείς, εάν θεωρήσει το αντίστροφο ως συνδεδεμένο σειριακά με το αρχικό σύστημα. Η είσοδος στο αντίστροφο σύστημα θα είναι το σήμα $y(t) = x(t/2) + 3$, οπότε η έξοδός του θα είναι $w(t) = y(2t) - 3 = x(2t/2) + 3 - 3 = x(t)$, δηλαδή το αρχικό σήμα $x(t)$.

Θέμα 2: (20%) Υπολογίστε αναλυτικά την συνέλιξη $y[n] = x[n] * h[n]$, όπου:

$$x[n] = 3^n u[1-n] \quad , \qquad h[n] = u[n] \ .$$

Σχεδιάστε και τα τρία σήματα ($x[n]$, $h[n]$, και $y[n]$), σημειώνοντας κρίσιμες τιμές στους άξονες.

Λύση:

Στο σχήμα (αριστερά) φαίνονται σχεδιασμένα τα σήματα $x[k]$ και $h[n-k]$. Είναι προφανές ότι τα σήματα έχουνε μη μηδενική επικάλυψη για όλα τα n. Για $n \geq 1$, το πεδίο επικάλυψης παραμένει σταθερό και είναι το διάστημα $k \leq 1$. Άρα για $n \geq 1$:

$$y[n] \ = \sum_{k=-\infty}^{k=1} 3^{\,k} \ = \ 3 \ + \sum_{k=-\infty}^{0} 3^{\,k} \ = \ 3 \ + \sum_{r=0}^{+\infty} (\frac{1}{3})^{\,r} \ = \ 3 \ + \ \frac{1}{1-(1/3)} \ = \ \frac{9}{2} \ ,$$

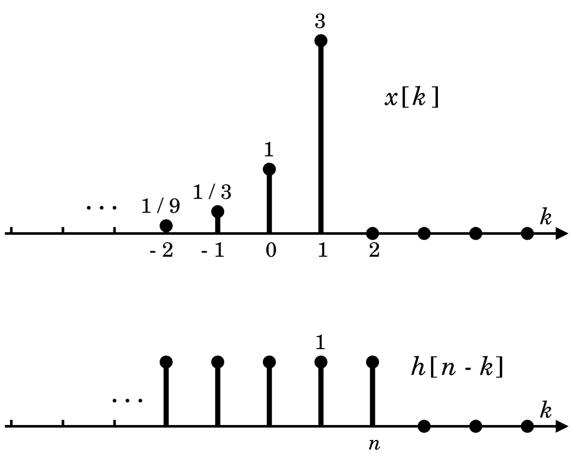
δηλαδή το $y[n]$ κρατάει σταθερή τιμή 4.5 για $n \geq 1$.
Για $n < 1$ επικάλυψη των σημάτων λαμβάνει χώρα μόνο για $k \leq n$. Συνεπώς:

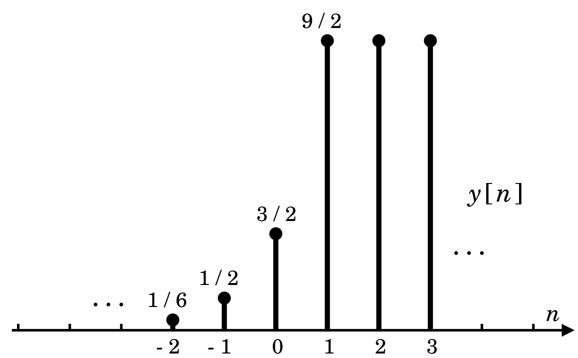
$$y[n] \ = \sum_{k=-\infty}^{n} 3^{\,k} \ = \sum_{l=-n}^{+\infty} (\frac{1}{3})^{\,l} \ = \sum_{m=0}^{+\infty} (\frac{1}{3})^{\,m-n} \ = (\frac{1}{3})^{-n} \sum_{m=0}^{+\infty} (\frac{1}{3})^{m} \ = \ 3^{\,n} \ \frac{3}{2} \ = \ \frac{3^{\,n+1}}{2} \ .$$

Συνεπώς:

$$y[n] = \begin{cases} 9/2\,, & \text{για } n \geq 1 \\ 3^{n+1}/2\,, & \text{αλλού} \end{cases} \ .$$

Η συνέλιξη είναι σχεδιασμένη στο δεξιό μέρος του σχήματος.





Θέμα 3: (25%) Τα (a) και (b) είναι ανεξάρτητα ερωτήματα. Απαντήστε αναλυτικά.

(a, 12%) Υπολογίστε τον μετασχηματισμό Fourier $X(\Omega)$ του σήματος $x(t) = 3\,t\,e^{2t}\cos(\frac{\pi}{4}\,t\,)u(-\,t)$.

(b, 13%) Υπολογίστε τον μετασχηματισμό Fourier $X(\Omega)$ του σήματος $x(t) = \dfrac{1}{\pi\,t^2}\sin(t)\sin(3t/2)$.

Λύση:

(a) Το πρόβλημα μπορεί να λυθεί με δύο τρόπους. Και οι δύο απαιτούν χρήση του ζεύγους μετασχηματισμού Fourier $t\,e^{-at}u(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 1/(a+j\Omega)^2$, εάν $Re\{a\} > 0$, η ισοδύναμα λόγω της ιδιότητας αντιστροφής στον χρόνο ($x(-t) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(-\Omega)$), $t\,e^{at}u(-\,t) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} -\,1/(a-j\Omega)^2$, εάν $Re\{a\} > 0$.

Ο πρώτος τρόπος υπολογισμού χρησιμοποιεί τον τύπο του Euler για το συνημίτονο, οπότε έχουμε:

$$3\,t\,e^{2t}\cos(\frac{\pi}{4}\,t\,)\,u(-t) \;=\; 3\,t\,e^{2t}\,\frac{e^{j\pi t/4}+e^{-j\pi t/4}}{2}\,u(-t) \;=\; \frac{3}{2}\,t\,e^{t\,(2+j\pi/4)}u(-t) + \frac{3}{2}\,t\,e^{t\,(2-j\pi/4)}u(-t)\;\;,$$

κατά συνέπεια,

$$\begin{aligned} X(\Omega) \;&=\; -\,\frac{3}{2}\,\frac{1}{(2+j\pi/4-j\Omega)^2} \;-\; \frac{3}{2}\,\frac{1}{(2-j\pi/4-j\Omega)^2} \\ &=\; -\,\frac{3}{2}\,\frac{1}{(2-j(\Omega-\pi/4))^2} \;-\; \frac{3}{2}\,\frac{1}{(2-j(\Omega+\pi/4))^2}\;\;. \end{aligned}$$

Τα παραπάνω ισχύουν καθόσον $Re\{2 \pm j\,\pi/4\} = 2 > 0$.

Εναλλακτικά, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι $x(t) = x_1(t)\,x_2(t)$, όπου $x_1(t) = 3\,t\,e^{2t}u(-t)$ και $x_2(t) = \cos(\,\pi\,t/4\,)$. Κατά συνέπεια,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{x(\Omega)\} \;&=\; \frac{1}{2\pi}[\,\mathcal{F}\{x_1(\Omega)\}*\mathcal{F}\{x_2(\Omega)\}] \;=\; \frac{1}{2\pi}[-\,\frac{3}{(2-j\Omega)^2}*\pi(\delta(\Omega-\pi/4)+\delta(\Omega+\pi/4))] \\ &=\; -\,\frac{3}{2}\,\frac{1}{(2-j\Omega)^2}*\delta(\Omega-\pi/4) \;-\; \frac{3}{2}\,\frac{1}{(2-j\Omega)^2}*\delta(\Omega+\pi/4) \\ &=\; -\,\frac{3}{2}\,\frac{1}{(2-j(\Omega-\pi/4))^2} \;-\; \frac{3}{2}\,\frac{1}{(2-j(\Omega+\pi/4))^2}\;\;, \end{aligned}$$

από την γνωστή ιδιότητα συνέλιξης με την κρουστική συνάρτηση.

(b) Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα του μετασχηματισμών Fourier όσον αφορά πολλαπλασιασμό στο πεδίο του χρόνου / συνέλιξη στο πεδίο της συχνότητας, παίρνουμε:

$$\mathcal{F}\{\,x(t)\,\} \;=\; \pi\mathcal{F}\{\,\frac{\sin(t)}{\pi\,t}\frac{\sin(3\,t/2)}{\pi\,t}\,\} \;=\; \pi\frac{1}{2\,\pi}\mathcal{F}\{\,\frac{\sin(t)}{\pi\,t}\,\}*\mathcal{F}\{\,\frac{\sin(3\,t/2)}{\pi\,t}\,\} \;=\; \frac{1}{2}\,(\,X_1(\Omega)*X_2(\Omega)\,)\;\;,$$

όπου:

$$X_1(\Omega) \;=\; \begin{cases} 1\,, & \text{για } |\Omega| < 1 \\ 0\,, & \text{για } |\Omega| > 1 \end{cases} \qquad \text{και} \qquad X_2(\Omega) \;=\; \begin{cases} 1\,, & \text{για } |\Omega| < 3/2 \\ 0\,, & \text{για } |\Omega| > 3/2 \end{cases}\qquad .$$

Προχωράμε στην συνέχεια στον υπολογισμό της συνέλιξης $X_1(\Omega) * X_2(\Omega)$ $= \int_{-\infty}^{+\infty} X_1(\Theta)\, X_2(\Omega - \Theta)\, d\Theta$. Στο αριστερό τμήμα του παρακάτω σχήματος έχουμε σχεδιάσει τα $X_1(\Theta)$ και $X_2(\Omega - \Theta)$.

Είναι προφανές ότι αυτά δεν έχουνε επικάλυψη, όταν $3/2+\Omega < -1$, ισοδύναμα $\Omega < -5/2$, όπως και όταν $-3/2+\Omega > 1$, ισοδύναμα $\Omega > 5/2$. Στις δύο αυτές περιπτώσεις η συνέλιξη είναι μηδενική.

Συνεχίζοντας, βλέπουμε ότι όπως το $X_2(\Omega - \Theta)$ αρχίζει και μετακινείται προς τα δεξιά (αυξάνεται δηλαδή η τιμή του Ω), μερική επικάλυψη λαμβάνει χώρα στο διάστημα $-1 < 3/2 + \Omega < 1$, ισοδύναμα για $-5/2 < \Omega < -1/2$. Στο διάστημα αυτό η συνέλιξη θα ισούται με:

$$\int_{\Theta=-1}^{\Theta=3/2+\Omega} 1\,.\,1\,.\,d\Theta \;=\; 3/2+\Omega+1 \;=\; \Omega \,+\, 5/2 \;.$$

Παρόμοια, βλέπουμε ότι όπως το $X_2(\Omega - \Theta)$ αρχίζει και μετακινείται προς τα αριστερά της δεξιάς περιοχής μη επικάλυψης (μειώνεται δηλαδή η τιμή του Ω σε σχέση με το $5/2$), μερική επικάλυψη λαμβάνει χώρα στο διάστημα $-1 < -3/2 + \Omega < 1$, ισοδύναμα για $1/2 < \Omega < 5/2$. Στο διάστημα αυτό η συνέλιξη θα ισούται με:

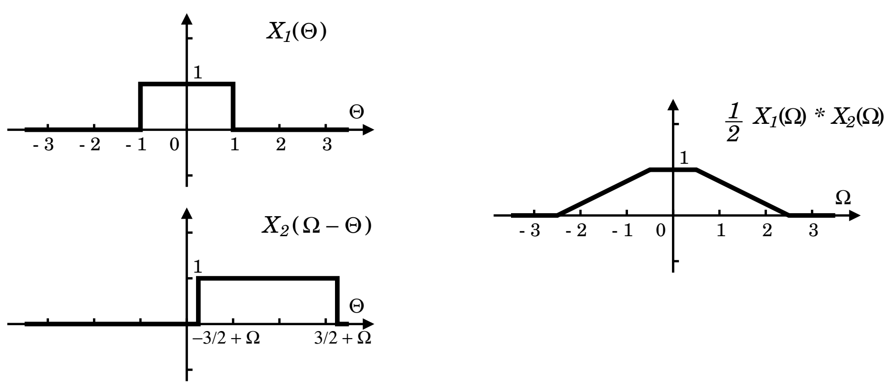
$$\int_{\Theta=-3/2+\Omega}^{\Theta=1} 1\,.\,1\,.\,d\Theta \;=\; 1-(\Omega-3/2) \;=\; 5/2 \,-\, \Omega \;.$$

Τέλος, παραμένει μία περιοχή όπου όλο το $X_1(\Theta)$ επικαλύπτεται από τμήματα του $X_2(\Omega - \Theta)$. Αυτό προφανώς συμβαίνει για το διάστημα για το οποίο ισχύουν οι εξής δύο ανισότητες ταυτόχρονα: $3/2+\Omega > 1$ και $-3/2+\Omega < -1$, ισοδύναμα δηλαδή $-1/2 < \Omega < 1/2$. Για το διάστημα αυτό η συνέλιξη δίνεται από το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{1} d\Theta \,=\, 2$.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω, και πολλαπλασιάζοντας και με τον συντελεστή $1/2$ της πρώτης εξίσωσης που είχαμε αμελήσει στα παραπάνω, παίρνουμε την ζητούμενη απάντηση:

$$\mathcal{F}\{\, x(t)\,\} \;=\; \begin{cases} 0\,, & \text{για } \Omega \le -5/2 \\ \Omega/2+5/4\,, & \text{για } -5/2 < \Omega < -1/2 \\ 1\,, & \text{για } -1/2 \le \Omega \le 1/2 \\ -\Omega/2+5/4\,, & \text{για } 1/2 < \Omega < 5/2 \\ 0\,, & \text{για } \Omega \ge 5/2 \end{cases} \;.$$

Ο μετασχηματισμός φαίνεται στο δεξιό τμήμα του σχήματος.



Θέμα 4: (25%) Βρείτε την απόκριση συχνότητας $H(\Omega)$ και την κρουστική απόκριση $h(t)$ του αιτιατού, Γ.Χ.Α. συστήματος συνεχούς χρόνου που ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 6\frac{dy(t)}{dt} + 9y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + x(t) \ .$$

Ποια είναι η έξοδος του παραπάνω συστήματος $y(t)$, όταν η είσοδός του είναι $x(t) = e^{-t}u(t)$;

Λύση:

Η απόκριση συχνότητας δίνεται από:

$$H(\Omega) \ = \ \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} \ = \ \frac{j\Omega + 1}{(j\Omega)^2 + 6j\Omega + 9} \ = \ \frac{1 + j\Omega}{9 - \Omega^2 + 6j\Omega} \ .$$

Αναλύοντας την παραπάνω σε μερικά κλάσματα, παίρνουμε:

$$H(\Omega) \ = \ \frac{1 + j\Omega}{(3 + j\Omega)^2} \ = \ \frac{1}{3 + j\Omega} - \frac{2}{(3 + j\Omega)^2} \ .$$

Κατά συνέπεια,

$$h(t) \ = \ \mathcal{F}^{-1}\{\, H(\Omega)\,\} \ = \ e^{-3t}u(t) \ - \ 2\,t\,e^{-3t}u(t) \ .$$

Ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος εισόδου είναι:

$$X(\Omega) \ = \ \mathcal{F}\{\, x(t)\,\} \ = \ \frac{1}{1 + j\Omega} \ .$$

Κατά συνέπεια,

$$Y(\Omega) \ = \ X(\Omega)\,H(\Omega) \ = \ \frac{1 + j\Omega}{(1 + j\Omega)(3 + j\Omega)^2} \ = \ \frac{1}{(3 + j\Omega)^2} \ ,$$

οπότε το ζητούμενο σήμα είναι το

$$y(t) \ = \ \mathcal{F}^{-1}\{\, Y(\Omega)\,\} \ = \ t\,e^{-3t}u(t) \ .$$

Θέμα 1: (30%) Τα (a), (b), και (c) είναι ανεξάρτητα ερωτήματα. Απαντήστε αναλυτικά.

(a, 8%) Δίνεται το σήμα: $x(t) = e^{-3t}u(t) - e^{3t}u(-t)$.

(i, 3%) Είναι το σήμα άρτιο ή περιττό;

(ii, 5%) Πρόκειται για σήμα ισχύος ή ενέργειας και ποια είναι η ισχύς και ενέργειά του;

(b, 7%) Βρείτε την θεμελιώδη περίοδο του σήματος $x[n] = \cos(\pi n/2)\cos(\pi n/4) + \sin(\pi n/8)$.

(c, 15%) Δίνεται το σύστημα με απόκριση $y[n] = (n+1)\,x[n]$ σε είσοδο $x[n]$.

(i, 4%) Είναι το σύστημα αιτιατό;

(ii, 4%) Είναι το σύστημα Γ.Χ.Α.;

(iii, 4%) Είναι το σύστημα ευσταθές;

(iv, 3%) Είναι το σύστημα αντιστρέψιμο, και, αν ναι, ποιο είναι το αντίστροφό του;

Λύση:

(a.i) Το σήμα είναι **περιττό**, γιατί:

$$x(-t) = e^{3t}u(-t) - e^{-3t}u(t) = -\left(e^{-3t}u(t) - e^{3t}u(-t)\right) = -x(t) \ .$$

(a.ii) Υποψιαζόμαστε ότι λόγω της μορφής του (φθίνον εκθετικό σήμα προς τα $\pm\infty$) πρόκειται για σήμα **ενέργειας**. Πράγματι:

$$E_\infty = \int_{t=-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_0^{+\infty} (e^{-3t})^2 dt + \int_{-\infty}^{0} (e^{3t})^2 dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-6t} dt = -\frac{2}{6}e^{-6t}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{3} \ .$$

Κατά συνέπεια το σήμα είναι όντως σήμα ενέργειας με $E_\infty = 1/3$ (και προφανώς με $P_\infty = 0$).

(b) Χρησιμοποιούμε την σχέση $2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$ και ξαναγράφουμε το σήμα ως:

$$x[n] = \frac{1}{2}\cos(3\pi n/4) + \frac{1}{2}\cos(\pi n/4) + \sin(\pi n/8) \ .$$

Δεν είναι δύσκολο να δούμε πως και οι τρεις όροι του αθροίσματος αντιστοιχούν σε περιοδικά σήματα με θεμελιώδη περίοδο $N_o = 8$ $(= m\,(8/3)$ με $m = 3)$, $N_o = 8$, και $N_o = 16$ αντίστοιχα. Άρα τα άθροισμά τους έχει θεμελιώδη περίοδο $N_o = 16$ [αφού οι δύο πρώτοι όροι έχουν θεμελιώδη περίοδο $N_o = 8$, θα έχουν περίοδο και την $2N_o = 16$].

(c.i) Το σύστημα είναι προφανώς **αιτιατό**, καθόσον η έξοδός του για κάθε τιμή n εξαρτάται μόνο από την είσοδο του στην ίδια τιμή n .

(c.ii) Το σύστημα είναι γραμμικό, ωστόσο δεν είναι χρονικά αναλλοίωτο, καθόσον για παράδειγμα όταν η είσοδός του είναι $x[n] = \delta[n]$, η έξοδός του είναι $y[n] = \delta[n]$, ενώ όταν η είσοδός του είναι $x[n] = \delta[n+1]$, η έξοδός του είναι $y[n] = (-1+1)\,\delta[n+1] = 0 \neq \delta[n+1]$. Άρα το σύστημα **δεν είναι Γ.Χ.Α.**

(c.iii) Το σύστημα είναι **ασταθές** (κατά BIBO) καθόσον για παράδειγμα η έξοδός του στο φραγμένο σήμα εισόδου $x[n] = u[n]$ είναι η μη φραγμένη $y[n] = (n+1)\,u[n]$, που τείνει στο άπειρο, όταν $n \to +\infty$.

(c.iv) Το σύστημα είναι **μη αντιστρέψιμο** καθόσον για παράδειγμα δύο διαφορετικά σήματα εισόδου, τα $x[n] = \delta[n+1]$ και $x[n] = 0$ δίνουν την ίδια έξοδο $y[n] = 0$.

Θέμα 2: (20%) Υπολογίστε αναλυτικά την συνέλιξη $y(t) = x(t) * h(t)$, όπου:

$$x(t) = e^{-at}u(t) \;\;, \qquad h(t) = u(t) - u(t-T) \;\;,$$

με $a > 0$ και $T > 0$. Σχεδιάστε τα $x(t)$, $h(t)$, και $y(t)$, σημειώνοντας κρίσιμες τιμές στους άξονες.

Λύση:

Παρατηρώντας την περιοχή επικάλυψης του $x(\tau)$ και του $h(t-\tau)$, βλέπουμε πως αυτή είναι μηδενική για $t \leq 0$. Εκεί προφανώς έχουμε $y(t) = 0$.
Στην συνέχεια βλέπουμε πως για $0 < t \leq T$ η περιοχή επικάλυψης είναι το $\tau \in [0, t]$, άρα:

$$y(t) \;=\; \int_0^t e^{-\alpha\tau}\, d\tau \;=\; -\frac{1}{\alpha}\, e^{-\alpha\tau}\Big|_0^t \;=\; \frac{1 \,-\, e^{-\alpha t}}{\alpha} \quad .$$

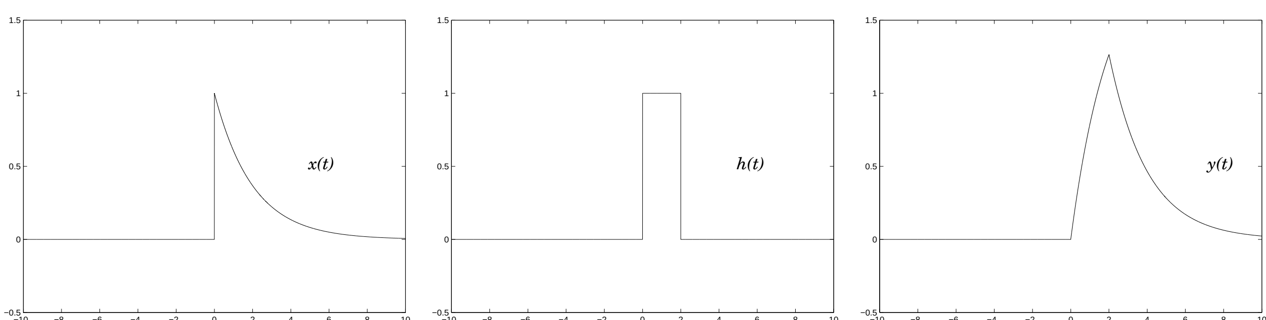
Τέλος, για $t > T$ η περιοχή επικάλυψης είναι το $\tau \in [\,t-T, t\,]$, συνεπώς:

$$y(t) \;=\; \int_{t-T}^t e^{-\alpha\tau}\, d\tau \;=\; -\frac{1}{\alpha}\, e^{-\alpha\tau}\Big|_{t-T}^t \;=\; \frac{e^{\alpha T} - 1}{a}\, e^{-\alpha t} \quad .$$

Συνοψίζοντας, έχουμε:

$$y(t) \;=\; \begin{cases} 0\,, & \text{για } \; t \leq 0 \\ \dfrac{1 \,-\, e^{-\alpha t}}{\alpha}\,, & \text{για } \; 0 < t \leq T \\ \dfrac{e^{\alpha T} - 1}{a}\, e^{-\alpha t}\,, & \text{για } \; t > T \quad . \end{cases}$$

Τα σήματα είναι σχεδιασμένα στο παρακάτω σχήμα για $\alpha = 1/2$ και $T = 2$.



Θέμα 3: (25%) Τα (a) και (b) είναι ανεξάρτητα ερωτήματα. Απαντήστε αναλυτικά.

(a, 12%) Υπολογίστε το σήμα $x(t)$ από τον μετασχηματισμό Fourier του: $X(\Omega) = \dfrac{3\,\Omega}{\Omega^4 + 8\,\Omega^2 + 16}$.

(b, 13%) Υπολογίστε τον μετασχηματισμό Fourier $X(\Omega)$ του σήματος $x(t) = \dfrac{2}{\pi\, t^2}\sin(t)\sin(t/2)$.

Λύση:

(a) Ως γνωστό, ο μετασχηματισμός Fourier του $x(t) = e^{-a\,|t|}$ είναι ο $X(\Omega) = 2\,a/(a^2 + \Omega^2)$ (για $a > 0$). Κατά συνέπεια, παρατηρώντας ότι ο παρανομαστής του δοθέντος $X(\Omega)$ μπορεί να γραφεί ως $\Omega^4 + 8\Omega^2 + 16 \;=\; (\,\Omega^2 + 2^2\,)^2$, έχουμε: $e^{-2\,|t|} \;\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}\; 4/\,(\,\Omega^2 + 2^2\,)$. Χρησιμοποιώντας στην συνέχεια την ιδιότητα της παραγώγισης στο πεδίο της συχνότητας, παίρνουμε:

$$t\;e^{-2\,|t|} \;\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}\; 4\;j\;\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\Omega}\,\frac{1}{(\,\Omega^2 + 2^2\,)} \;=\; -\,\frac{8\,j\,\Omega}{(\,\Omega^2 + 2^2\,)^2} \;=\; \frac{8}{3\,j}\;\frac{3\,\Omega}{\Omega^4 + 8\,\Omega^2 + 16}\quad .$$

Κατά συνέπεια, το ζητούμενο σήμα είναι:

$$x(t) \;=\; \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{3\,\Omega}{\Omega^4 + 8\,\Omega^2 + 16}\right\} \;=\; \frac{3\,j}{8}\;t\;e^{-2\,|t|}\quad .$$

(b) Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα του μετασχηματισμών Fourier όσον αφορά πολλαπλασιασμό στο πεδίο του χρόνου / συνέλιξη στο πεδίο της συχνότητας, παίρνουμε:

$$\mathcal{F}\{\,x(t)\,\} \;=\; 2\,\pi\mathcal{F}\{\,\frac{\sin(t)}{\pi\,t}\frac{\sin(t/2)}{\pi\,t}\,\} \;=\; 2\,\pi\frac{1}{2\,\pi}\mathcal{F}\{\,\frac{\sin(t)}{\pi\,t}\,\}*\mathcal{F}\{\,\frac{\sin(t/2)}{\pi\,t}\,\} \;=\; X_1(\Omega) * X_2(\Omega)\quad ,$$

όπου:

$$X_1(\Omega) \;=\; \begin{cases} 1\,, & \text{για } |\Omega| < 1 \\ 0\,, & \text{για } |\Omega| > 1 \end{cases} \qquad \text{και} \qquad X_2(\Omega) \;=\; \begin{cases} 1\,, & \text{για } |\Omega| < 1/2 \\ 0\,, & \text{για } |\Omega| > 1/2 \end{cases}\quad .$$

Προχωράμε στην συνέχεια στον υπολογισμό της συνέλιξης $X_1(\Omega) * X_2(\Omega)$ $= \int_{-\infty}^{+\infty} X_1(\Theta)\,X_2(\Omega - \Theta)\,d\Theta$. Στο αριστερό τμήμα του παρακάτω σχήματος έχουμε σχεδιάσει τα $X_1(\Theta)$ και $X_2(\Omega - \Theta)$.

Είναι προφανές ότι αυτά δεν έχουνε επικάλυψη, όταν $1/2 + \Omega < -1$, ισοδύναμα $\Omega < -3/2$, όπως και όταν $-1/2 + \Omega > 1$, ισοδύναμα $\Omega > 3/2$. Στις δύο αυτές περιπτώσεις η συνέλιξη είναι μηδενική.

Συνεχίζοντας, βλέπουμε ότι όπως το $X_2(\Omega - \Theta)$ αρχίζει και μετακινείται προς τα δεξιά (αυξάνεται δηλαδή η τιμή του Ω), μερική επικάλυψη λαμβάνει χώρα στο διάστημα $-1 < 1/2 + \Omega < 0$, ισοδύναμα για $-3/2 < \Omega < -1/2$. Στο διάστημα αυτό η συνέλιξη θα ισούται με:

$$\int_{\Theta\,=\,-1}^{\Theta\,=\,1/2+\Omega} 1\,.\,1\,.\,d\Theta \;=\; 1/2 + \Omega + 1 \;=\; \Omega \,+\, 3/2\quad .$$

Παρόμοια, βλέπουμε ότι όπως το $X_2(\Omega-\Theta)$ αρχίζει και μετακινείται προς τα αριστερά της δεξιάς περιοχής μη επικάλυψης (μειώνεται δηλαδή η τιμή του Ω σε σχέση με το $3/2$), μερική επικάλυψη λαμβάνει χώρα στο διάστημα $0 < -1/2+\Omega < 1$, ισοδύναμα για $1/2 < \Omega < 3/2$. Στο διάστημα αυτό η συνέλιξη θα ισούται με:

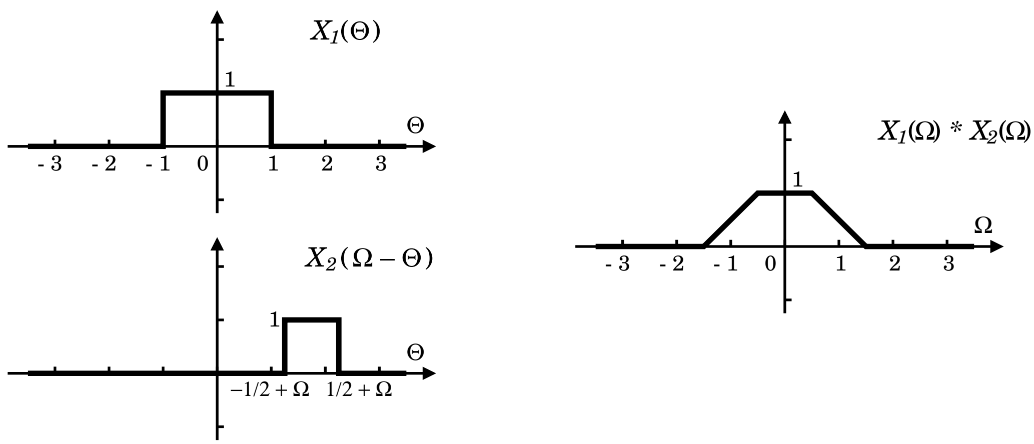
$$\int_{\Theta=-1/2+\Omega}^{\Theta=1} 1\,.\,1\,.\,d\Theta \;=\; 1-(\Omega-1/2) \;=\; 3/2\,-\,\Omega\ \ .$$

Τέλος, παραμένει μία περιοχή όπου τμήματα του $X_1(\Theta)$ επικαλύπτουν πλήρως το $X_2(\Omega-\Theta)$. Αυτό προφανώς συμβαίνει για το διάστημα για το οποίο ισχύουν οι εξής δύο ανισότητες ταυτόχρονα: $1/2+\Omega<1$ και $-1/2+\Omega>-1$, ισοδύναμα δηλαδή $-1/2<\Omega<1/2$. Για το διάστημα αυτό η συνέλιξη δίνεται από το ολοκλήρωμα $\int_{-1/2}^{1/2} d\Theta \,=\, 1$.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω, παίρνουμε την ζητούμενη απάντηση:

$$\mathcal{F}\,\{\,x(t)\,\} \;=\; \begin{cases} 0\,, & \text{για } \Omega \le -3/2 \\ \Omega+3/2\,, & \text{για } -3/2 < \Omega < -1/2 \\ 1\,, & \text{για } -1/2 \le \Omega \le 1/2 \\ -\Omega+3/2\,, & \text{για } 1/2 < \Omega < 3/2 \\ 0\,, & \text{για } \Omega \ge 3/2 \end{cases} \ \ .$$

Ο μετασχηματισμός φαίνεται στο δεξιό τμήμα του σχήματος.



Θέμα 4: (25%) Βρείτε την απόκριση συχνότητας $H(\Omega)$ και την κρουστική απόκριση $h(t)$ του αιτιατού, Γ.Χ.Α. συστήματος συνεχούς χρόνου που ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + x(t) \ \ .$$

Ποια είναι η έξοδος του παραπάνω συστήματος $y(t)$, όταν η είσοδός του είναι $x(t) = e^{-t}\, u(t)$;

Λύση:

Η απόκριση συχνότητας δίνεται από:

$$H(\Omega) \ = \ \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} \ = \ \frac{j\Omega + 1}{(j\Omega)^2 + 4j\Omega + 4} \ = \ \frac{1 + j\Omega}{4 - \Omega^2 + 4j\Omega} \ \ .$$

Αναλύοντας την παραπάνω σε μερικά κλάσματα, παίρνουμε:

$$H(\Omega) \ = \ \frac{1 + j\Omega}{(2 + j\Omega)^2} \ = \ \frac{1}{2 + j\Omega} - \frac{1}{(2 + j\Omega)^2} \ \ .$$

Κατά συνέπεια,

$$h(t) \ = \ \mathcal{F}^{-1}\{\, H(\Omega)\,\} \ = \ e^{-2\,t}u(t) \ - \ t\, e^{-2\,t}u(t) \ \ .$$

Ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος εισόδου είναι:

$$X(\Omega) \ = \ \mathcal{F}\{\, x(t)\,\} \ = \ \frac{1}{1 + j\Omega} \ \ .$$

Κατά συνέπεια,

$$Y(\Omega) \ = \ X(\Omega)\, H(\Omega) \ = \ \frac{1 + j\Omega}{(1 + j\Omega)(2 + j\Omega)^2} \ = \ \frac{1}{(2 + j\Omega)^2} \ \ ,$$

οπότε το ζητούμενο σήμα είναι το

$$y(t) \ = \ \mathcal{F}^{-1}\{\, Y(\Omega)\,\} \ = \ t\, e^{-2\,t}u(t) \ \ .$$