Π.Θεσσαλίας, ΤΗΜΜΥ: ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ «ΘΕΩΡΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ»

Τριγωνομετρία:

Σχέση Euler: $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta, \quad \theta \in R$

$2\cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$

$2\sin a \cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$

Δυναμοσειρές:

$$\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \frac{1-a^N}{1-a} \; (\forall\, a \neq 1) \;\stackrel{N\to+\infty}{\longrightarrow}\; \frac{1}{1-a} \; (\text{για } |a|<1)$$

Ενέργεια/ισχύς: $E_\infty = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \mathrm{d}t$, $E_\infty = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |x[n]|^2$, $P_\infty = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2\mathrm{d}t$, $P_\infty = \lim_{N\to+\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{n=N}|x[n]|^2$

Συνέλιξη σημάτων συνεχούς και διακριτού χρόνου:

$$x(t) * y(t) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, y(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \qquad x[n] * y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, y[n-k]$$

Σειρές Fourier συνεχούς χρόνου:

Αν $x(t+T_o) = x(t)$, $\forall\, t$ (όπου T_o είναι η θεμελιώδης περίοδος και $\Omega_o = 2\pi/T_o$ η θεμελιώδης συχνότητα):

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\, e^{jk\Omega_o t} \quad \longleftrightarrow \quad c_k = \frac{1}{T_o}\int_{T_o} x(t)\, e^{-jk\Omega_o t}\,\mathrm{d}t$$

Ιδιότητες:

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t) \leftrightarrow \{ jk\Omega_o c_k \}$ $\qquad x(t-t_o) \leftrightarrow \{ c_k e^{-jk\Omega_o t_o} \}$

$x(t) \leftrightarrow \{a_k\}, \; y(t) \leftrightarrow \{b_k\} \;\Rightarrow\; x(t)\,y(t) \leftrightarrow \{ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m b_{k-m} \}$

Μετασχηματισμοί Fourier συνεχούς χρόνου:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega=-\infty}^{+\infty} X(\Omega)\, e^{j\Omega t}\,\mathrm{d}\Omega \quad \longleftrightarrow \quad X(\Omega) = \int_{t=-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\Omega t}\,\mathrm{d}t$$

Ιδιότητες:

$a\,x(t) + b\,y(t) \leftrightarrow a\,X(\Omega) + b\,Y(\Omega)$

$x(t-t_o) \leftrightarrow e^{-j\Omega t_o} X(\Omega)$

$e^{j\Omega_o t} x(t) \leftrightarrow X(\Omega - \Omega_o)$

$x^*(t) \leftrightarrow X^*(-\Omega)$

$x(-t) \leftrightarrow X(-\Omega)$

$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\Omega}{a}\right)$

$X(t) \leftrightarrow 2\pi\, x(-\Omega)$ (δυϊκότητα)

$x(t) * y(t) \leftrightarrow X(\Omega)\, Y(\Omega)$

$x(t)\,y(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{\theta=-\infty}^{+\infty} X(\theta)\, Y(\Omega-\theta)\,\mathrm{d}\theta$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t) \leftrightarrow j\Omega\, X(\Omega)$

$t\,x(t) \leftrightarrow j\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\Omega} X(\Omega)$

$\int_{\tau=-\infty}^{t} x(\tau)\,\mathrm{d}\tau \leftrightarrow \frac{1}{j\Omega} X(\Omega) + \pi X(0)\,\delta(\Omega)$

$\int_{t=-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega=-\infty}^{+\infty} |X(\Omega)|^2\,\mathrm{d}\Omega$
(για μη περιοδικό $x(t)$).

Ζεύγη μετα/σμών:

$\delta(t) \leftrightarrow 1$ $\qquad \delta(t-t_o) \leftrightarrow e^{-j\Omega t_o}$

$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\Omega} + \pi\,\delta(\Omega)$

$1 \leftrightarrow 2\pi\,\delta(\Omega)$ $\qquad e^{j\Omega_o t} \leftrightarrow 2\pi\,\delta(\Omega - \Omega_o)$

$\cos(\Omega_o t) \leftrightarrow \pi\,[\,\delta(\Omega-\Omega_o) + \delta(\Omega+\Omega_o)\,]$

$\sin(\Omega_o t) \leftrightarrow \frac{\pi}{j}\,[\,\delta(\Omega-\Omega_o) - \delta(\Omega+\Omega_o)\,]$

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \leftrightarrow \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\Omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$

$e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{a+j\Omega}, \quad Re\{a\} > 0$

$e^{-a|t|} \leftrightarrow \frac{2a}{a^2+\Omega^2}, \quad Re\{a\} > 0$

$t\,e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{(a+j\Omega)^2}, \quad Re\{a\} > 0$

$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{(a+j\Omega)^n}, \quad Re\{a\} > 0$

$\frac{\sin(\Omega_1 t)}{\pi t} \leftrightarrow X(\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < \Omega_1 \\ 0, & |\Omega| > \Omega_1 \end{cases}$

$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases} \leftrightarrow \frac{2\sin(\Omega T_1)}{\Omega}$

Μετασχηματισμοί Fourier διακριτού χρόνου (DTFT):

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})\, e^{j\omega n}\,\mathrm{d}\omega \qquad \longleftrightarrow \qquad X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-j\omega n}$$

Ιδιότητες:

$$a\,x[n] + b\,y[n] \leftrightarrow a\,X(e^{j\omega}) + b\,Y(e^{j\omega})$$

$$x[n-n_o] \leftrightarrow e^{-j\omega n_o} X(e^{j\omega})$$

$$e^{j\omega_o n} x[n] \leftrightarrow X(e^{j(\omega-\omega_o)})$$

$$x^*[n] \leftrightarrow X^*(e^{-j\omega})$$

$$x[-n] \leftrightarrow X(e^{-j\omega})$$

$$n\,x[n] \leftrightarrow j\,\frac{\mathrm{d}X(e^{j\omega})}{\mathrm{d}\omega}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \leftrightarrow \frac{1}{1-e^{-j\omega}} X(e^{j\omega}) + \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

$$x[n] * y[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega})\, Y(e^{j\omega})$$

$$x[n]\, y[n] \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\theta})\, Y(e^{j(\omega-\theta)})\,\mathrm{d}\theta$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} |X(e^{j\omega})|^2 \mathrm{d}\omega \quad (\text{απεριοδικά } x[n])$$

Ζεύγη μετασχηματισμών:

$$1 \leftrightarrow 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

$$e^{j\omega_o n} \leftrightarrow 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \omega_o - 2\pi k)$$

$$\cos(\omega_o n) \leftrightarrow \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [\delta(\omega-\omega_o-2\pi k) + \delta(\omega+\omega_o-2\pi k)]$$

$$\sin(\omega_o n) \leftrightarrow \frac{\pi}{j} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [\delta(\omega-\omega_o-2\pi k) - \delta(\omega+\omega_o-2\pi k)]$$

$$\delta[n] \leftrightarrow 1 \qquad \delta[n-n_o] \leftrightarrow e^{-j\omega n_o}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - kN] \leftrightarrow \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$$

$$u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

$$a^n u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1 - a\,e^{-j\omega}}, \qquad |a| < 1$$

$$(n+1)\, a^n u[n] \leftrightarrow \frac{1}{(1 - a\,e^{-j\omega})^2}, \qquad |a| < 1$$

$$\frac{(n+r-1)!}{n!\,(r-1)!} a^n u[n] \leftrightarrow \frac{1}{(1 - a\,e^{-j\omega})^r}, \quad |a| < 1$$

$$x[n] = \begin{cases} 1, & |n| \le N_1 \\ 0, & |n| > N_1 \end{cases} \leftrightarrow \frac{\sin[\omega(N_1 + \frac{1}{2})]}{\sin(\omega/2)}$$

$$\frac{\sin(Wn)}{\pi n} \leftrightarrow X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & 0 \le |\omega| \le W \\ 0, & W < |\omega| \le \pi \end{cases}$$

(για $0 < W < \pi$. Το $X(e^{j\omega})$ είναι περιοδικό.)

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier (DFT):

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\, W_N^{-kn}, \; 0 \le n \le N-1 \longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, W_N^{kn}, \; 0 \le k \le N-1$$

(όπου $W_N = e^{-j2\pi/N}$)

Δίπλευροι μετασχηματισμοί Laplace:

$$x(t) \leftrightarrow X(s) = \int_{t=-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-st}\,\mathrm{d}t$$

Ιδιότητες:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t) \leftrightarrow s\,X(s)$$

$$-t\,x(t) \leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} X(s)$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,\mathrm{d}\tau \leftrightarrow \frac{1}{s} X(s)$$

$$x(t-t_o) \leftrightarrow e^{-st_o} X(s)$$

$$e^{s_o t} x(t) \leftrightarrow X(s - s_o)$$

$$x(a\,t) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right)$$

$$x^*(t) \leftrightarrow X^*(s^*)$$

$$x(t) * y(t) \leftrightarrow X(s) Y(s)$$

Ζεύγη:

$$\delta(t) \leftrightarrow 1 \qquad \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\delta(t) \leftrightarrow s^n \qquad \delta(t-T) \leftrightarrow e^{-sT}$$

$$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s}, \; \Re\{s\} > 0 \qquad - u(-t) \leftrightarrow \frac{1}{s}, \; \Re\{s\} < 0$$

$$e^{-at} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a}, \; \Re\{s+a\} > 0 \qquad - e^{-at} u(-t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a}, \; \Re\{s+a\} < 0$$

$$t\,e^{-at} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{(s+a)^2}, \; \Re\{s+a\} > 0 \qquad - t\,e^{-at} u(-t) \leftrightarrow \frac{1}{(s+a)^2}, \; \Re\{s+a\} < 0$$

$$t^{n-1} e^{-at} u(t) \leftrightarrow \frac{(n-1)!}{(s+a)^n}, \; \Re\{s+a\} > 0 \qquad - t^{n-1} e^{-at} u(-t) \leftrightarrow \frac{(n-1)!}{(s+a)^n}, \; \Re\{s+a\} < 0$$

$$[\cos(\Omega_o t)]\, u(t) \leftrightarrow \frac{s}{s^2 + \Omega_o^2}, \; \Re\{s\} > 0 \qquad [e^{-at}\cos(\Omega_o t)]\, u(t) \leftrightarrow \frac{s+a}{(s+a)^2 + \Omega_o^2}, \; \Re\{s+a\} > 0$$

$$[\sin(\Omega_o t)]\, u(t) \leftrightarrow \frac{\Omega_o}{s^2 + \Omega_o^2}, \; \Re\{s\} > 0 \qquad [e^{-at}\sin(\Omega_o t)]\, u(t) \leftrightarrow \frac{\Omega_o}{(s+a)^2 + \Omega_o^2}, \; \Re\{s+a\} > 0$$

Μονόπλευροι μετασχηματισμοί Laplace: $x(t) \leftrightarrow \mathcal{X}(s) = \int_{t=0}^{+\infty} x(t)\, e^{-st}\, \mathrm{d}\, t$

Ιδιότητες (ισχύουν και για μη αιτιατά σήματα):

$e^{s_o t}\, x(t) \;\leftrightarrow\; \mathcal{X}(s - s_o)$

Για $a > 0:\; x(a\,t) \;\leftrightarrow\; \frac{1}{a}\, \mathcal{X}(\frac{s}{a})$

$\frac{x(t)}{t} \;\leftrightarrow\; \int_s^{+\infty} \mathcal{X}(u)\, \mathrm{d}\, u$

$\int_{0^-}^{t} x(\tau)\, \mathrm{d}\, \tau \;\leftrightarrow\; \frac{1}{s}\, \mathcal{X}(s)$

$-\, t\, x(t) \;\leftrightarrow\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, s}\, \mathcal{X}(s)$

$(-\, t)^{\,n}\, x(t) \;\leftrightarrow\; \frac{\mathrm{d}^{\,n}}{\mathrm{d}\, s^{\,n}}\, \mathcal{X}(s)$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t}\, x(t) \;\leftrightarrow\; s\, \mathcal{X}(s) \,-\, x(0^-)$

$\frac{\mathrm{d}^{\,n}}{\mathrm{d}\, t^{\,n}}\, x(t) \leftrightarrow s^n \mathcal{X}(s) - s^{n-1} x(0^-) - s^{n-2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t} x(t)|_{t=0^-} - \ldots - \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}\, t^{n-1}} x(t)|_{t=0^-}$

Για ΑΙΤΙΑΤΑ σήματα:

$\mathcal{X}(s) \;=\; X(s)$

Για $t_o > 0:\; x(t - t_o) \;\leftrightarrow\; e^{-\, s\, t_o}\, \mathcal{X}(s)$

$x_1(t) * x_2(t) \;\leftrightarrow\; \mathcal{X}_1(s)\, \mathcal{X}_2(s)$

Θεωρήματα αρχικής & τελικής τιμής (για σήματα $x(t)$ που πληρούν συγκεκριμένες συνθήκες στο $t = 0$):

$\lim_{s \to \infty} s\, \mathcal{X}(s) \;=\; x(0^+)$

$\lim_{t \to \infty} x(t) \;=\; \lim_{s \to 0} s\, \mathcal{X}(s)$

Δίπλευροι μετασχηματισμοί Z: $x[n] \;\leftrightarrow\; X(z) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, z^{-\, n}$

Ιδιότητες:

$x[n - n_o] \leftrightarrow z^{-\, n_o}\, X(z)$

$z_o^n\, x[n] \;\leftrightarrow\; X(\frac{z}{z_o})$

$x[-\, n] \;\leftrightarrow\; X(z^{-\,1})$

$x^*[n] \;\leftrightarrow\; X^*(z^*)$

$x_1[n] * x_2[n] \leftrightarrow X_1(z) X_2(z)$

$x[n] - x[n-1] \leftrightarrow (1 - z^{-1}) X(z)$

$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \;\leftrightarrow\; \frac{X(z)}{1 - z^{-1}}$

$n\, x[n] \;\leftrightarrow\; -\, z\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, z}\, X(z)$

Αιτιατά $x[n]$: $x[0] = \lim_{z \to \infty} X(z)$

Ζεύγη:

$\delta[n] \;\leftrightarrow\; 1$

$\delta[n - m] \;\leftrightarrow\; z^{-\, m}$

$u[n] \;\leftrightarrow\; \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}\,,\; |z| > 1$

$-\; u[-n-1] \;\leftrightarrow\; \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}\,,\; |z| < 1$

$a^n u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1 - a z^{-1}} = \frac{z}{z - a}\,,\; |z| > |a|$

$-\; a^n u[-n-1] \leftrightarrow \frac{1}{1 - a z^{-1}} = \frac{z}{z - a}\,,\; |z| < |a|$

$n\, a^n u[n] \leftrightarrow \frac{a\, z^{-\,1}}{(1 - a z^{-1})^2} = \frac{a\, z}{(z - a)^2}\,, |z| > |a|$

$-\, n\, a^n u[-n-1] \leftrightarrow \frac{a\, z^{-\,1}}{(1 - a z^{-1})^2} = \frac{a\, z}{(z - a)^2}\,, |z| < |a|$

$n\,(n-1) \ldots (n-k+1)\, a^n u[n] \;\leftrightarrow\; \frac{k!\, a^k\, z}{(z - a)^{k+1}}\,,\; |z| > |a|\,,\; k \geq 1$

$[\, a^n \cos{(\omega_o n)}\,]\, u[n] \;\leftrightarrow\; \frac{z^{\,2} -\, a\, z \cos \omega_o}{z^{\,2} -\, 2\, a\, z \cos \omega_o \,+\, a^{\,2}}\,,\; |z| > |a|$

$[\, a^n \sin{(\omega_o n)}\,]\, u[n] \;\leftrightarrow\; \frac{a\, z \sin \omega_o}{z^{\,2} -\, 2\, a\, z \cos \omega_o \,+\, a^{\,2}}\,,\; |z| > |a|$

Μονόπλευροι μετασχηματισμοί Z: $x[n] \;\leftrightarrow\; \mathcal{X}(z) \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} x[n]\, z^{-\, n}$

Ιδιότητες:

Για αιτιατά $x[n]$: $\mathcal{X}(z) = X(z)$

Για αιτιατά $x_1[n],\; x_2[n]$: $x_1[n] * x_2[n] \;\leftrightarrow\; \mathcal{X}_1(z)\, \mathcal{X}_2(z)$

$x[n+1] \;\leftrightarrow\; z\, \mathcal{X}(z) \,-\, z\, x[0]$

$x[n-1] \;\leftrightarrow\; z^{-\,1}\, \mathcal{X}(z) \,+\, x[-1]$

$x[n-k] \;\leftrightarrow\; z^{-k}\, \mathcal{X}(z) \,+\, \sum_{m=0}^{k-1} z^{-\, m}\, x[m-k]$ (για $k > 0$)