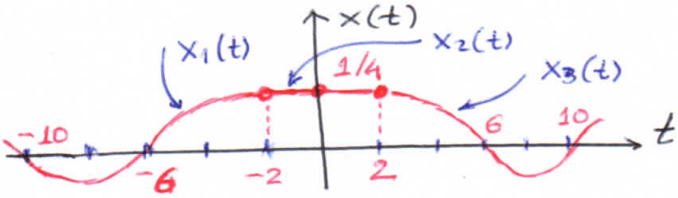
Π.Θ. | **ΗΥ241: ΣΗΜΑΤΑ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ** | **ΕΞ. 2018-19**

ΤΗΜΜΥ | **ΛΥΣΕΙΣ 1ου ΣΕΤ ΑΣΚΗΣΕΩΝ** | **ΕΑΡΙΝΟ**

1.1.A

$$x(t) = \frac{\sin(\pi(t+2)/4)}{\pi(t+2)}\,u(-t-2) + \frac{u(t+2)-u(t-2)}{4} + \frac{\sin[\pi(t-2)/4]}{\pi(t-2)}\,u(t-2)$$

$\to P_\infty, E_\infty$?



Έστω:

$$x_1(t) = \frac{\sin(\pi(t+2)/4)}{\pi(t+2)}\,u(-t-2)$$

$$x_2(t) = \frac{u(t+2)-u(t-2)}{4}$$

$$x_3(t) = \frac{\sin(\pi(t-2)/4)}{\pi(t-2)}\,u(t-2)$$

Τότε: $x(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$

Επειδή τα σήματα δεν έχουν επικάλυψη:

$$E_\infty = \int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt = \int_{-\infty}^{-2}x_1^2(t)dt + \int_{-2}^{2}x_2^2(t)dt + \int_{2}^{+\infty}x_3^2(t)dt =$$

λόγω αρτιότητας των κεντραρισμένων sync functions & Parseval

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|X_1'(j\Omega)|^2d\Omega + \frac{1}{16}\cdot 4 + \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|X_1'(j\Omega)|^2d\Omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{P_\infty = 0}$$

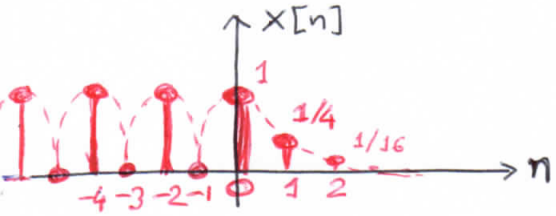
(ΣΗΜΑ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ)

, όπου $X_1'(j\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < \frac{\pi}{4} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

$\leftrightarrow x_1'(t) = \frac{\sin(\pi t/4)}{\pi t}$

1.1.B

$$x[n] = \left(\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\cdot u[-n] + 2^{-n}u[n-1]\right)^2 \Rightarrow P_\infty, E_\infty = ?$$



$$P_{2N+1} = \frac{\sum_{n=-N}^{N}|x[n]|^2}{2N+1} = \frac{1}{2N+1}\left(\left\lfloor\frac{N}{2}\right\rfloor + \sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{16}\right)^n\right)$$

$$= \underbrace{\frac{\lfloor N/2\rfloor}{2N+1}}_{\xrightarrow{N\to\infty} 1/4} + \underbrace{\frac{1}{2N+1}\cdot\frac{(1/16)^{N+1}-1}{1/16-1}}_{\xrightarrow{N\to\infty} 0} \xrightarrow{N\to\infty} \frac{1}{4}$$

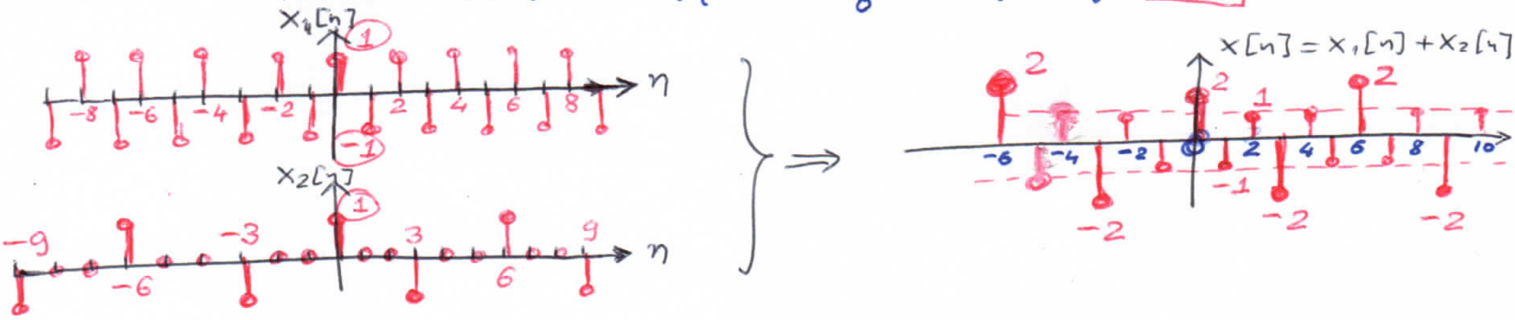
Άρα $\boxed{P_\infty = \frac{1}{4},\ E_\infty = \infty}$

ΣΗΜΑ ΙΣΧΥΟΣ

1.2 A

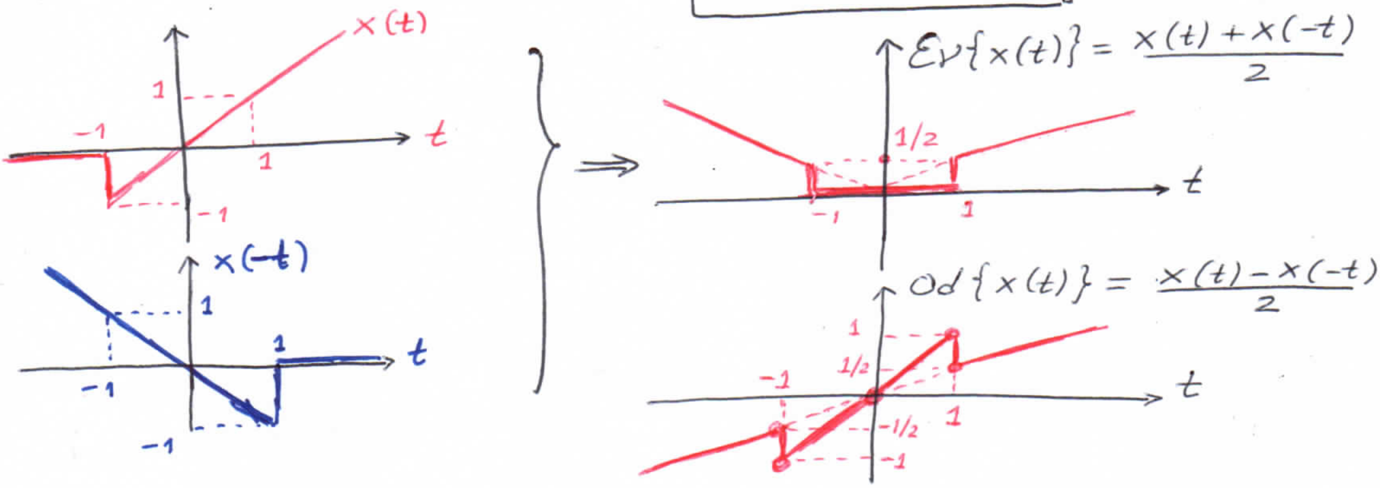
$$\underbrace{x[n] = \cos(3\pi n)}_{x_1[n]} + \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^k \delta[n-3k]}_{x_2[n]} \Longrightarrow \boxed{\text{ΠΕΡΙΟΔΟΣ } N_0 = ?}$$

- Σημειώνεται ότι $\cos(3\pi n) = \cos(2\pi n + \pi n) = \cos(\pi n) \Rightarrow N_{1,0} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$
- Επίσης το $x_2[n]$ έχει περίοδο $N_{2,0} = 6$ (βλέπε σχήμα)
- Άρα το $x_1[n] + x_2[n]$ έχει περίοδο $N_0 = \text{ΕΚΠ}\{2,6\} = \boxed{6}$



1.2.B

$$\boxed{x(t) = t\,u(t+1)} \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} \mathcal{E}v\{x(t)\} = ? \\ \mathcal{O}d\{x(t)\} = ? \end{array}}$$



Εύκολα βλέπουμε πως:

$$x(t) = t\,u(t-1) + t\big(u(t+1) - u(t-1)\big)$$

$$x(-t) = -t\,u(-t-1) - t\underbrace{\big(u(t+1) - u(t-1)\big)}_{= u(-t+1) - u(-t-1)}$$

Συνεπώς: $$\mathcal{E}v\{x(t)\} = \frac{x(t)+x(-t)}{2} = \frac{t}{2}u(t-1) - \frac{t}{2}u(-t-1)$$

$$\mathcal{O}d\{x(t)\} = \frac{x(t)-x(-t)}{2} = \frac{t}{2}u(t-1) + \frac{t}{2}u(-t-1) + t\big(u(t+1)-u(t-1)\big)$$

1.3.A $y(t)=\int_{t-2}^{t+2} x(\tau)d\tau \Rightarrow$ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

• ΓΡΑΜΜΙΚΟ? $\Rightarrow$ ΝΑΙ γιατί αν $y_1(t)=\int_{t-2}^{t+2} x_1(\tau)d\tau$, $y_2(t)=\int_{t-2}^{t+2} x_2(\tau)d\tau$, τότε

$$y(t)=\int_{t-2}^{t+2}(ax_1(\tau)+\beta x_2(\tau))d\tau = a\int_{t-2}^{t+2} x_1(\tau)d\tau + \beta\int_{t-2}^{t+2} x_2(\tau)d\tau = ay_1(t)+\beta y_2(t)$$

• ΧΡΟΝΙΚΑ ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΟ? $\Rightarrow$ ΝΑΙ, γιατί αν γίνει shifted η είσοδος $x(t)\to x(t-t_0)$, η έξοδος θα είναι $y'(t)=\int_{t-2}^{t+2} x'(t)dt=\int_{t-2}^{t+2} x(\tau-t_0)d\tau=\int_{t-t_0-2}^{t-t_0+2} x(\tau)d\tau = y(t-t_0)$

• ΑΙΤΙΑΤΟ? $\Rightarrow$ ΟΧΙ

γιατί το $y(t)$ εξαρτάται από τιμές του $x(t)$ στο $(t, t+2]$ (μελλοντικές τιμές εισόδου)

• ΕΥΣΤΑΘΕΣ? $\Rightarrow$ ΝΑΙ, γιατί φραγμένη είσοδος μας δίνει φραγμένη έξοδο, λόγω του:

$$|x(t)|<B_x \Rightarrow |y(t)|=\left|\int_{t-2}^{t+2} x(\tau)d\tau\right| \leq \int_{t-2}^{t+2}|x(\tau)|d\tau < \int_{t-2}^{t+2} B_x d\tau = 4B_x \equiv B_y$$

• ΑΝΤΙΣΤΡΕΨΙΜΟ? $\Rightarrow$ ΟΧΙ, γιατί διαφορετικές είσοδοι δίνουν την ίδια έξοδο,

$x_1(t)=1/4 \Rightarrow y_1(t)=1$; $x_2(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-4k) \Rightarrow y_2(t)=1$

1.3.B $y[n]=n\,x[-n] \Rightarrow$ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

• ΓΡΑΜΜΙΚΟ? $\Rightarrow$ ΝΑΙ γιατί αν $y_1[n]=n x_1[-n]$, $y_2[n]=n x_2[-n]$, τότε η έξοδος σε είσοδο $\alpha x_1[n]+\beta x_2[n]$ θα είναι η

$$y[n]=n(\alpha x_1[-n]+\beta x_2[-n]) = \alpha\cdot n x_1[-n]+\beta\cdot n x_2[-n] = \alpha y_1[n]+\beta y_2[n]$$

• ΧΡΟΝΙΚΑ ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΟ? $\Rightarrow$ ΟΧΙ γιατί (με αντιπαράδειγμα):

$x[n]=\delta[n] \Rightarrow y[n]=0$; $x'[n]=x[n-1]=\delta[n-1] \Rightarrow y'[n]=-\delta[n+1]\neq y[n-1]$

• ΑΙΤΙΑΤΟ? $\Rightarrow$ ΟΧΙ, γιατί πχ για $n=-1$, $y[-1]=-x[1]$, δηλαδή η έξοδος εξαρτάται από μελλοντική τιμή εισόδου.

• ΕΥΣΤΑΘΕΣ? $\Rightarrow$ ΟΧΙ, γιατί (με αντιπαράδειγμα) φραγμένη είσοδος μπορεί να μας δώσει μη φραγμένη έξοδο, πχ: $x[n]=1 \Rightarrow y[n]=n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

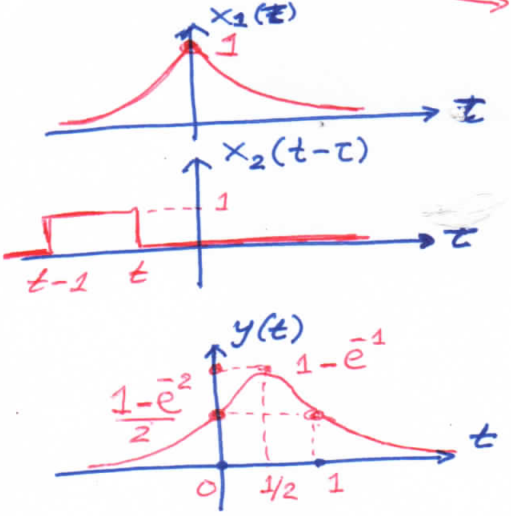
• ΑΝΤΙΣΤΡΕΨΙΜΟ? $\Rightarrow$ ΟΧΙ, γιατί διαφορετικές είσοδοι δίνουν την ίδια έξοδο

$x_1[n]=\delta[n] \Rightarrow y_1[n]=0$; $x_2[n]=2\delta[n] \Rightarrow y_2[n]=0$

1.4

$$(e^{-2|t|}) * (u(t)-u(t-1)) = ?$$

$e^{-2|t|} \rightarrow x_1(t)$, $\quad u(t)-u(t-1) \rightarrow x_2(t)$



• Για $\boxed{t<0}$, $y(t)=\int_{t-1}^{t} e^{2\tau}\,d\tau = \frac{1}{2}(e^{2t}-e^{2t-2}) = \frac{1-e^{-2}}{2}\cdot e^{2t}$

• Για $\boxed{0<t<1}$, $y(t)=\int_{t-1}^{0} e^{2\tau}\,d\tau + \int_{0}^{t} e^{-2\tau}\,d\tau =$

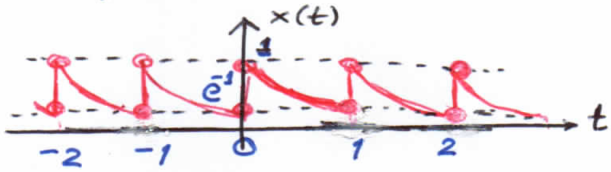
$$= \frac{1}{2}(1-e^{2(t-1)}) + \frac{1}{2}(1-e^{-2t}) = 1-\frac{e^{2t-2}+e^{-2t}}{2}$$

• Για $\boxed{t>1}$, $y(t)=\int_{t-1}^{t} e^{-2\tau}\,d\tau = \frac{1}{2}e^{-2\tau}\Big|_{t}^{t-1} =$

$$= \frac{1}{2}(e^{-2(t-1)}-e^{-2t}) = e^{-2t}\cdot\frac{e^{2}-1}{2}$$

1.5

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{k-t}(u(t-k)-u(t-k-1)) \Rightarrow F.S.\ ?$$



• Το σήμα είναι περιοδικό με $T_0=1$

• Άρα $\Omega_0=\frac{2\pi}{T_0}=2\pi$

• Συνεπώς $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk2\pi t}$ με $c_k=\frac{1}{1}\int_{0}^{1} e^{-t}e^{-jk2\pi t}\,dt$

• Άρα $c_k=\int_{0}^{1} e^{-t(1+j2\pi k)}\,dt = -\frac{e^{-t(1+j2\pi k)}}{1+j2\pi k}\Big|_{0}^{1} = \boxed{\frac{1-e^{-(1+j2\pi k)}}{1+j2\pi k}}$

• Ειδικά για $k=0$, $c_0 = 1-e^{-1}$

$$\boxed{1.6.A} \quad x(t) = \frac{4t}{t^4 + 8t^2 + 16} \xrightarrow{\mathcal{F}} X(j\Omega) = ?$$

Παρατηρούμε πως $\quad x(t) = \dfrac{4t}{(t^2+4)^2} = -\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{4}{4+t^2}\right)$ (1)

Από ιδιότητα δυϊκότητας:

$$e^{-2|t|} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{4}{4+\Omega^2} \Longrightarrow \frac{4}{4+t^2} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi e^{-2|\Omega|}$$

Από ιδιότητα χρονικής παραγώγισης:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{4}{4+t^2}\right) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\, j\Omega\, e^{-2|\Omega|} \overset{(1)}{\Longrightarrow} \boxed{X(j\Omega) = -j\Omega 2\pi\, e^{-2|\Omega|}}$$

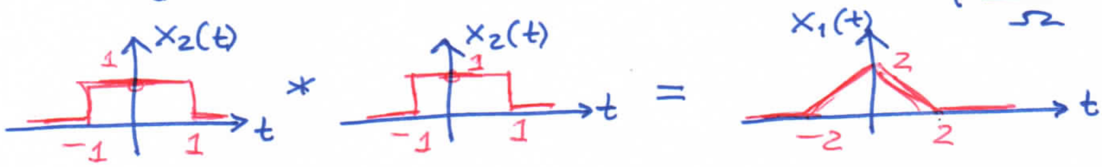
$$\boxed{1.6.B} \quad X(j\Omega) = \frac{8\sin^2(\Omega+2)}{\Omega^2+4\Omega+4} + \frac{8\sin^2(\Omega-2)}{\Omega^2-4\Omega+4} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} x(t) = ?$$

- Παρατηρούμε πως $X(j\Omega) = \dfrac{8\sin^2(\Omega+2)}{(\Omega+2)^2} + \dfrac{8\sin^2(\Omega-2)}{(\Omega-2)^2} = 2\left[X_1(j(\Omega+2)) + X_1(j(\Omega-2))\right]$

 όπου $X_1(j\Omega) = \dfrac{4\sin^2\Omega}{\Omega^2} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} x_1(t)$. • ΑΡΑ, $X(j\Omega) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2(e^{-2jt} + e^{2jt})\cdot x_1(t)$

$= x_1(t)\cdot\cos(2t)$

- Αρκεί λοιπόν να βρούμε τον αντίστροφο μ/σ Fourier του $X_1(j\Omega)$.
- Παρατηρούμε ότι $X_1(j\Omega) = X_2(j\Omega)\cdot X_2(j\Omega)$, όπου $X_2(j\Omega) = \dfrac{2\sin\Omega}{\Omega}$
- Άρα $x_1(t) = x_2(t) * x_2(t)$, όπου $x_2(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\dfrac{2\sin\Omega}{\Omega}\right\} = \begin{cases} 1, & |t|<1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$



- Κάνοντας την συνέλιξη, βρίσκουμε $x_1(t) = (2-|t|)\cdot(u(t+2) - u(t-2))$

- Άρα $\boxed{x(t) = \cos(2t)\cdot(2-|t|)\cdot(u(t+2)-u(t-2))}$

1.7

$$x(t)=\delta(t-1) \longrightarrow \boxed{\dddot{y}+4\ddot{y}+5\dot{y}+2y=\ddddot{x}+7\dddot{x}+16\ddot{x}+18\dot{x}+9x} \longrightarrow y(t)=?$$

Από την διαφορική εξίσωση, με $s=j\Omega$ παίρνουμε:

$$H(s)=\frac{s^4+7s^3+16s^2+18s+9}{s^3+4s^2+5s+2}=As+B+\frac{Cs^2+Es+F}{s^3+4s^2+5s+2}$$

λόγω του ότι βαθμός πολ. αριθμητή μείον βαθμό πολ. παρονομαστή $=1$

Κάνοντας πράξεις:

$$H(s)=\frac{As^4+(4A+B)s^3+(5A+4B+C)s^2+(2A+5B+E)s+(2B+F)}{s^3+4s^2+5s+2},$$

άρα

$$\left.\begin{array}{l} A=1 \\ 4A+B=7 \\ 5A+4B+C=16 \\ 2A+5B+E=18 \\ 2B+F=9 \end{array}\right\} \Rightarrow B=3 \Rightarrow C=-1,\quad E=1,\quad F=3$$

, και στη συνέχεια αναλύουμε το εναπομείναν κλάσμα σε μερικά κλάσματα (αφού βρούμε τις ρίζες του παρανομαστή...)

$$\frac{-s^2+s+3}{s^3+4s^2+5s+2}=\frac{-s^2+s+3}{(s+1)^2(s+2)}=\frac{G}{s+1}+\frac{H}{(s+1)^2}+\frac{I}{s+2}$$

με:

$$I=\left.\frac{-s^2+s+3}{(s+1)^2}\right|_{s=-2}=\frac{-4-2+3}{(-1)^2}=-3$$

$$H=\left.\frac{-s^2+s+3}{s+2}\right|_{s=-1}=\frac{-1-1+3}{1}=1$$

$$G=\left.\left(\frac{d}{ds}\frac{-s^2+s+3}{s+2}\right)\right|_{s=-1}=\left.\frac{(-2s+1)(s+2)-(-s^2+s+3)}{(s+2)^2}\right|_{s=-1}=2$$

Συνεπώς: $\mathcal{H}(j\Omega)=(j\Omega)+3+\dfrac{2}{j\Omega+1}+\dfrac{1}{(j\Omega+1)^2}-\dfrac{3}{j\Omega+2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow h(t)=\frac{d}{dt}\delta(t)+3\delta(t)+\left(2e^{-t}+te^{-t}-3e^{-2t}\right)u(t)$$

και $y(t)=h(t)*\delta(t-1)=h(t-1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{y(t)=\frac{d}{dt}\delta(t-1)+3\delta(t-1)+\left(2e^{-(t-1)}+(t-1)e^{-(t-1)}-3e^{-2(t-1)}\right)u(t-1)}$$