ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

ΘΕΩΡΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Γεράσιμος Ποταμιάνος

Αναπλ. Καθηγητής,
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

http://www.inf.uth.gr/~gpotamianos

ΘΕΩΡΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Ενότητα 7: *ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ*

7.0. Εισαγωγή
7.1. Δειγματοληψία Σημάτων Συνεχούς Χρόνου
7.2. Ανακατασκευή Σημάτων Συνεχούς Χρόνου από τα Δείγματά του
7.3. Το Φαινόμενο της Αναδίπλωσης
7.4. Επεξεργασία Σημάτων Συνεχούς Χρόνου σε Διακριτό Χρόνο

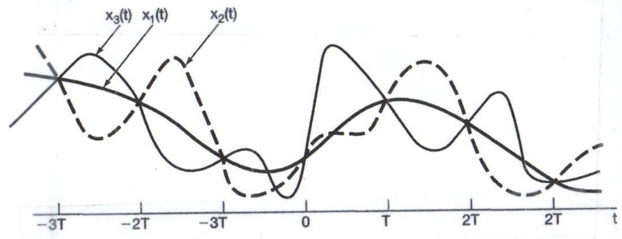
7.0. Εισαγωγή

- Μέχρι τώρα έχουμε μελετήσει **συνεχή χρόνο** και **διακριτό χρόνο** ξεχωριστά.
- Στο κεφάλαιο αυτό θα δούμε πως:
  - ✓ Σήματα διακριτού χρόνου προκύπτουν από σήματα συνεχούς χρόνου (**δειγματοληψία** / **sampling**).
  - ✓ Σήματα συνεχούς χρόνου προκύπτουν από σήματα διακριτού χρόνου (**ανακατασκευή** / **reconstruction**).
- Οι δύο διαδικασίες (σε σειρά) λαμβάνουν χώρα:
  - ✓ Χωρίς απώλεια πληροφορίας εάν τηρούνται οι συνθήκες του **θεωρήματος δειγματοληψίας** (**sampling theorem**).
  - ✓ Αλλιώς παρατηρείται το φαινόμενο της **αναδίπλωσης** (**aliasing**).
- Μεγάλη πρακτική σημασία, π.χ., γιατί επιτρέπει την **επεξεργασία** σημάτων συνεχούς χρόνου στο πεδίο του **διακριτού χρόνου** (**discrete-time signal processing**).

7.1. Δειγματοληψία Σημάτων Συνεχούς Χρόνου – Γενικά

- Δειγματοληψία (Sampling): Διαδικασία παραγωγής δειγμάτων ενός σήματος συνεχούς χρόνου.
- Συνεπάγεται την παραγωγή ενός σήματος διακριτού χρόνου.
- Εν γένει, άπειρα σήματα συνεχούς χρόνου μπορούν να δημιουργήσουν μία συγκεκριμένη ακολουθία δειγμάτων
- Υπό ορισμένες συνθήκες τα δείγματα αυτά μπορούν να καθορίσουν πλήρως το αρχικό σήμα συνεχούς χρόνου.

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1(kT) = x_2(kT) = x_3(kT) \\ \not\Rightarrow x_1(t) = x_2(t) = x_3(t) \end{array}}$$



Σχ. 7.1 από βιβλίο Oppenheim-Willsky

7.1. Δειγματοληψία με Σειρά Κρουστικών (Ι)

- IMPULSE TRAIN SAMPLING

$$\boxed{p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT)}$$

ΑΚΟΛΟΥΘΙΑ ΚΡΟΥΣΤΙΚΩΝ (IMPULSE TRAIN)

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑΣ (SAMPLING FUNCTION)

ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑΣ (SAMPLING PERIOD)

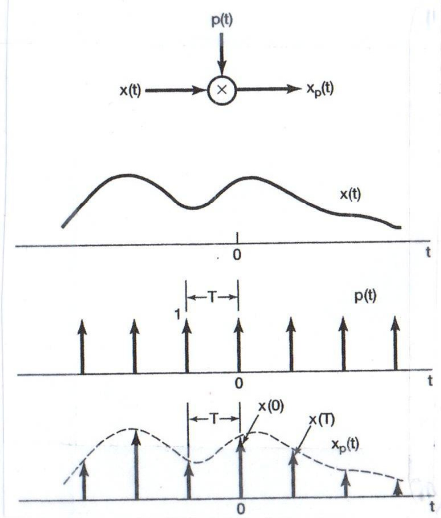
$$\boxed{\Omega_s = \frac{2\pi}{T}}$$

ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑΣ (SAMPLING FREQ.)

ΣΗΜΑ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΧΡΟΝΟΥ

$$\boxed{x_p(t) = x(t).p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{x(nT)}_{x_d[n]}\delta(t-nT)}$$

- Τι συμβαίνει στο πεδίο της συχνότητας;



Σχ. 7.2 από βιβλίο Oppenheim-Willsky

7.1. Δειγματοληψία με Σειρά Κρουστικών (II)

- Πεδίο συχνότητας:

$$x_p(t) = x(t)\,p(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X_p(j\Omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\theta)P(j(\Omega-\theta))\,d\theta \qquad (1)$$

$$= \frac{1}{2\pi} X(j\Omega) * P(j\Omega)$$

ΣΥΝΕΛΙΞΗ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΤΗΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(j\Omega) = \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s) \qquad (2)$$

$$\Omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

$$(1),(2) \Rightarrow \boxed{X_p(j\Omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(j(\Omega - k\Omega_s))}$$

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΦΑΣΜΑ

7.1. Δειγματοληψία με Σειρά Κρουστικών (ΙΙΙ)

- Ας υποθέσουμε ότι το $x(t)$ είναι ζωνοπεριορισμένο (bandlimited) σήμα, δηλαδή:

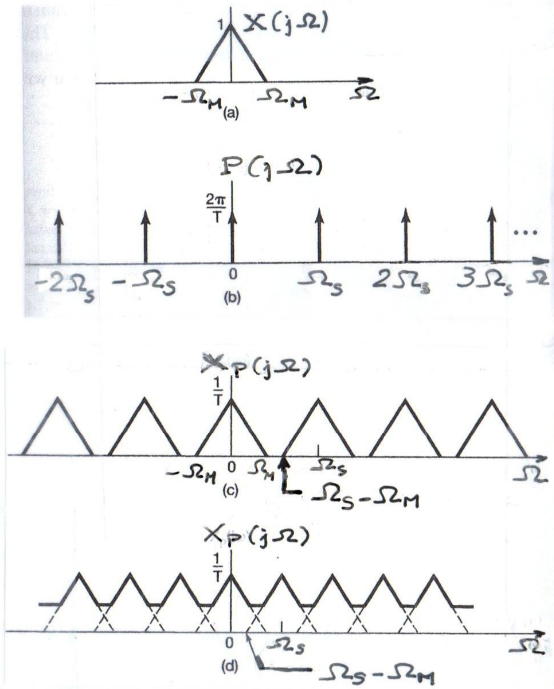
$$\boxed{X(j\Omega) = 0 \,, \quad \forall \; |\Omega| > \Omega_M}$$

- Τότε, για:

$$\Omega_s - \Omega_M > \Omega_M \iff \boxed{\Omega_s > 2\Omega_M}$$

ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ ΕΠΙΚΑΛΥΨΗ των μετατοπισμένων φασμάτων

- Ωστόσο, για $\Omega_s < 2\Omega_M$ ΥΠΑΡΧΕΙ ΕΠΙΚΑΛΥΨΗ και δεν είναι δυνατή η ανάκτηση του αρχικού φάσματος.



Σχ. 7.3 από βιβλίο Oppenheim-Willsky (τροποποιημένο)

7.1. Δειγματοληψία με Σειρά Κρουστικών (IV)

- ΘΕΩΡΗΜΑ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑΣ / SAMPLING THEOREM:

Αν $\boxed{x(t)}$ είναι ζωνοπεριορισμένο σήμα με

$$\boxed{X(j\Omega) = 0, \text{ για } |\Omega| > \Omega_M}$$

τότε το $x(t)$ καθορίζεται πλήρως από τα δείγματά του

$$\boxed{x(nT), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots}$$

εάν

$$\boxed{\frac{2\pi}{T} = \Omega_s > \underbrace{2\,\Omega_M}_{\text{NIQUIST RATE}}}$$

NIQUIST FREQUENCY

(Shannon, 1949)

7.2. Ανακατασκευή Σημάτων Συνεχούς Χρόνου (Ι)

- Ιδανική ανακατασκευή / ideal reconstruction

- Ιδανικό κατωπερατό φίλτρο (lowpass filter)

ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ ΑΠΟΚΟΠΗΣ:

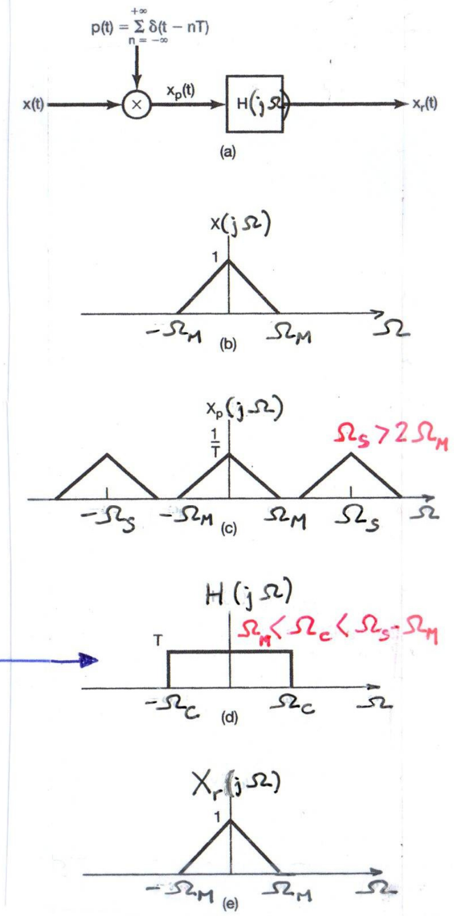
$$\Omega_M < \Omega_c < \Omega_s - \Omega_M$$

↑ CUTOFF FREQUENCY

$(\Omega_s/2)$

ΚΕΡΔΟΣ:

T ← GAIN



Σχ. 7.4 από βιβλίο Oppenheim-Willsky (τροποποιημένο)

7.2. Ανακατασκευή Σημάτων Συνεχούς Χρόνου (ΙΙ)

- Στο πεδίο του χρόνου

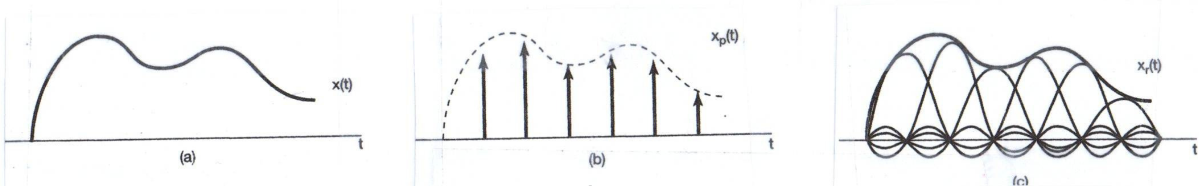
$$\left.\begin{aligned} h(t) &= T \cdot \frac{\sin(\Omega_c t)}{\pi t} \\ x_p(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\,\delta(t-nT) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x_r(t) = h(t) * x_p(t) =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) \frac{\Omega_c T}{\pi} \frac{\sin(\Omega_c (t-nT))}{\Omega_c (t-nT)}$$

ΟΛΑ ΤΑ ΔΕΙΓΜΑΤΑ

1 για $\Omega_c = \frac{\Omega_s}{2}$



Σχ. 7.10 από βιβλίο Oppenheim-Willsky

7.3. Φαινόμενο Αναδίπλωσης (Ι)

- Όταν τα μετατοπισμένα φάσματα έχουν επικάλυψη τότε το αρχικό σήμα δεν μπορεί να ανακατασκευαστεί με κατωπερατό φιλτράρισμα $\Longrightarrow$ ΑΝΑΔΙΠΛΩΣΗ / ALIASING

- ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

$x(t) = \cos \Omega_0 t$

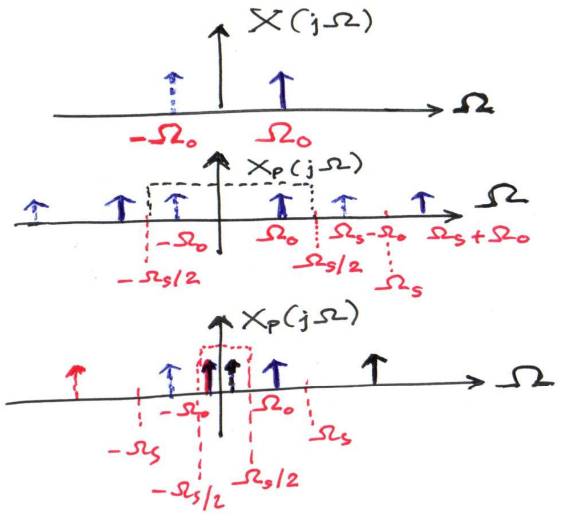
$\Omega_s > 2\Omega_0$ ⇝

ΟΧΙ ΑΝΑΔΙΠΛΩΣΗ

$x_r(t) = \cos(\Omega_s - \Omega_0)t$

$\Omega_s < 2\Omega_0$ ⇝

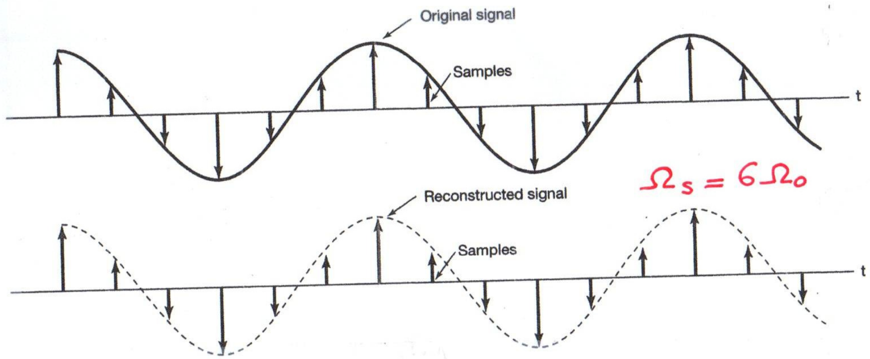
ΑΝΑΔΙΠΛΩΣΗ



7.3. Φαινόμενο Αναδίπλωσης (II)

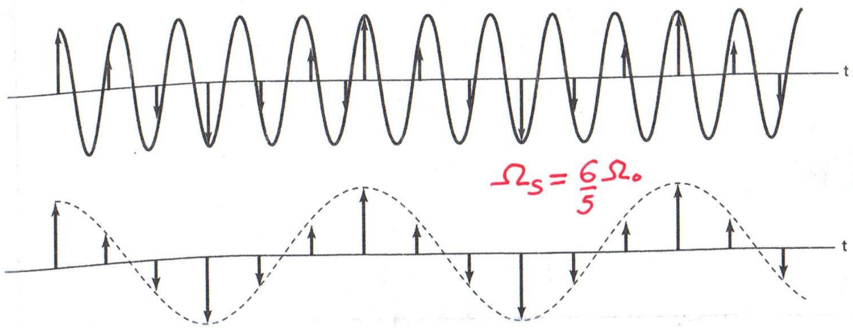
• ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

NO ALIASING →



Σχ. 7.16(a) από βιβλίο Oppenheim-Willsky (τροποποιημένο)

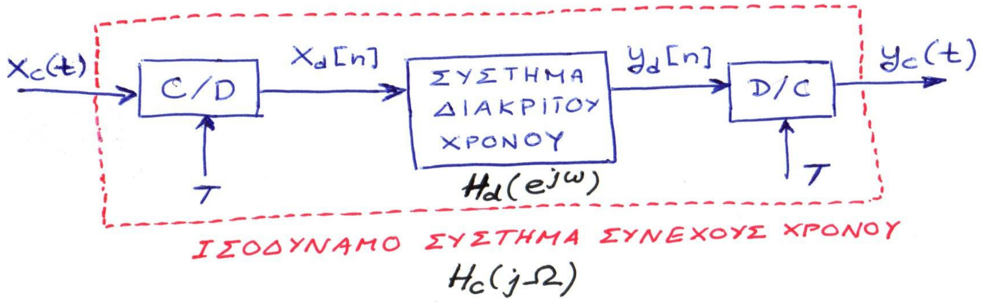
ALIASING →



Σχ. 7.16(d) από βιβλίο Oppenheim-Willsky (τροποποιημένο)

7.4. Επεξεργασία Σημάτων Συνεχούς Χρόνου σε Διακριτό Χρόνο (I)

- Πολύ συχνά, η επεξεργασία σήματος στον <u>διακριτό</u> χρόνο είναι πιο επιθυμητή από ότι στον <u>συνεχή</u>.

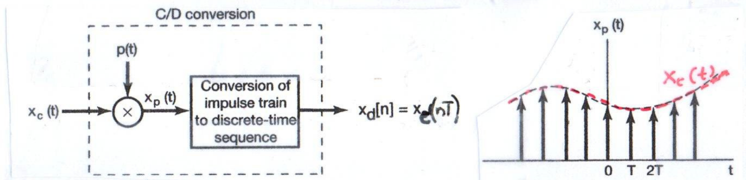


- <u>Πρέπει:</u>
  - $x_c(t)$ <u>ΖΩΝΟΠΕΡΙΟΡΙΣΜΕΝΟ</u>
  - T <u>ΝΑ ΠΛΗΡΕΙ ΤΗ ΣΥΝΘΗΚΗ NIQUIST</u>

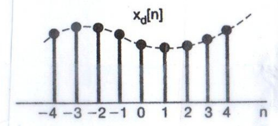
<u>Τότε:</u>

$$H_c(j\Omega) = \begin{cases} H_d(e^{j\Omega T}), & |\Omega| < \Omega_s/2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

7.4. Επεξεργασία Σημάτων Συνεχούς Χρόνου σε Διακριτό Χρόνο (ΙΙ)



Σχ. 7.21 από βιβλίο Oppenheim-Willsky (μερικό, τροποποιημένο)



- Μετατροπή C/D

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT)\,\delta(t-nT)$$

$$\xrightarrow{\mathcal{F}} X_p(j\Omega) = \boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT)\,e^{-j\Omega nT}} \quad (1)$$

$$\mathrm{DTFT}\{x_d[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_d[n]\,e^{-j\omega n} = \boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT)\,e^{-j\omega n}} \quad (2)$$

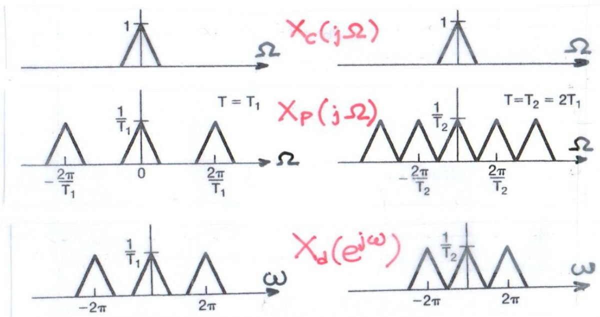
$\hookrightarrow X_d(e^{j\omega})$ $\qquad x_d[n] = x_c(nT)$

$$(1),(2) \Rightarrow \boxed{X_d(e^{j\omega}) = X_p\left(j\frac{\omega}{T}\right) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c\left(j\left(\frac{\omega-2\pi k}{T}\right)\right)}$$

→ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ με περίοδο 2π

$$\boxed{\omega = \Omega T}$$

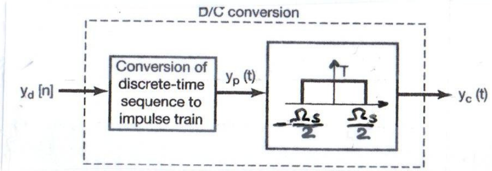
ΚΛΙΜΑΚΩΣΗ



7.4. Επεξεργασία Σημάτων Συνεχούς Χρόνου σε Διακριτό Χρόνο (ΙΙΙ)

- Μετατροπή D/C

Αντίστροφη διαδικασία του προηγούμενου βήματος
(με κατωπερατό φιλτράρισμα)



Σχ. 7.23 από βιβλίο Oppenheim-Willsky (τροποποιημένο)

- Επεξεργασία με σύστημα διακριτού χρόνου

$$x_d[n] \rightarrow \boxed{H(e^{j\omega})} \rightarrow y_d[n]$$

$$\boxed{Y_d(e^{j\omega}) = X_d(e^{j\omega})\,H_d(e^{j\omega})}$$

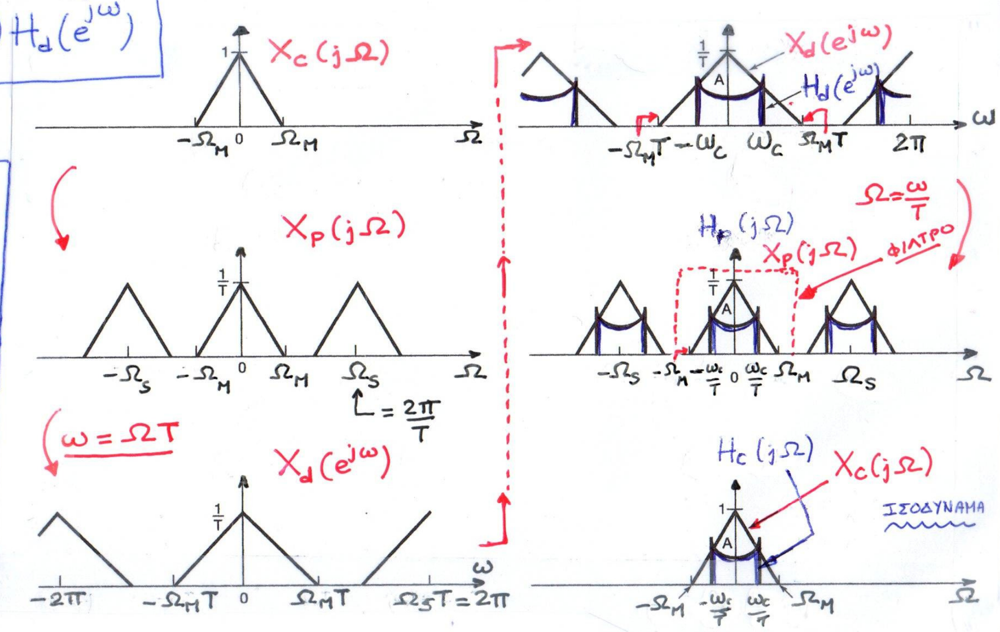
$$\Downarrow$$

$$\boxed{Y_c(j\Omega) = X_c(j\Omega)\cdot H_d(e^{j\Omega T}) \quad \boxed{\text{για } |\Omega| < \Omega_s/2}}$$

$$\Downarrow$$

για

$$H_c(j\Omega) = \begin{cases} H_d(e^{j\Omega T}) \\ 0, \ \text{αλλού} \end{cases}$$



Σχ. 7.25 από βιβλίο Oppenheim-Willsky (τροποποιημένο)