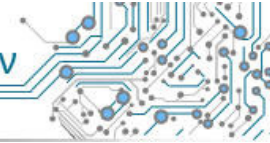




ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών



ΘΕΩΡΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Γεράσιμος Ποταμιάνος

*Αναπλ. Καθηγητής,
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών*

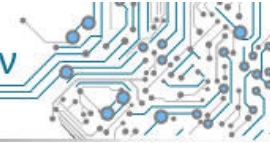
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

<http://www.inf.uth.gr/~gpotamianos>



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών



ΘΕΩΡΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Ενότητα 6: ΣΗΜΑΤΑ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ: ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΣΤΟΝ ΧΡΟΝΟ & ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ

6.0. Εισαγωγή

6.1. Μέτρο / Φάση M/Σ Fourier

6.2. Μέτρο / Φάση Απόκρισης Συχνότητας Γ.Χ.Α. Συστημάτων

6.3. Ιδανικά και Μή Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων

6.4. Γ.Χ.Α. Συνεχή Συστήματα 1^{ης} & 2^{ης} Τάξης

6.5. Γ.Χ.Α. Συστήματα Διακριτού Χρόνου 1^{ης} & 2^{ης} Τάξης



6.0. Εισαγωγή

- Εφαρμογή των βασικών εργαλείων / εννοιών στο πεδίο του **χρόνου** και της **συχνότητας** (μ/σ **Fourier**) για την ανάλυση Γ.Χ.Α. συστημάτων.
- Μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά **και** στο **χρόνο** **και** στην **συχνότητα**.
- Θα μελετήσουμε βασικά **φίλτρα** (κατωπερατά) και συστήματα **1^{ης}** και **2^{ης} τάξης**.
- Παράλληλη παρουσίαση θεμάτων στον **συνεχή** και **διακριτό χρόνο**.





6.1. Μέτρο και Φάση μ/σ Fourier

- Μ/Σ FOURIER → εν γένει είναι μιγαδικός

$$\xrightarrow{\text{Συνεχής Χρόνος}} \quad X(j\Omega) = \underbrace{|X(j\Omega)|}_{\text{ΜΈΤΡΟ}} e^{j\phi X(j\Omega)} \quad \underbrace{\phi}_{\text{Φάση}}$$

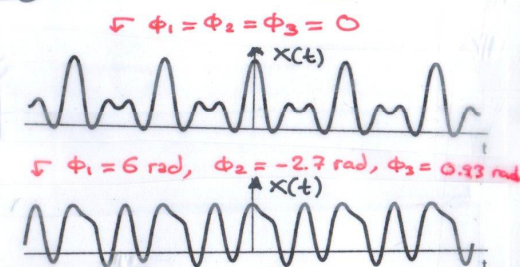
$$\xrightarrow{\text{Διακριτός Χρόνος}} \quad X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j\phi X(e^{j\omega})}$$

- Μας ενδιαφέρει και το μέτρο και η φάση του Μ/Σ. πX :

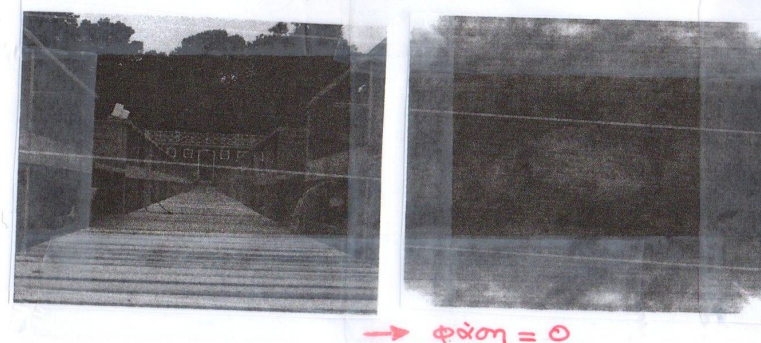
- $$x(t) = 1 + \frac{1}{2} \cos(2\pi t + \phi_1) + \cos(4\pi t + \phi_2) + \frac{2}{3} \cos(6\pi t + \phi_3)$$

- $$x(t) \text{ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟ: } \mathcal{F}\{x(-t)\} = |X(j\Omega)| e^{-j\phi X(j\Omega)}$$

- Αντίληψη σήματος φωτός
 Η φάση δεν παίζει σημαντικό ρόλο
- Αντίληψη εικόνας:
 Η φάση είναι πολύ σημαντική



Σχ. 6.1 από βιβλίο Oppenheim-Willsky



Σχ. 6.2 από βιβλίο Oppenheim-Willsky (τμήμα)





6.1. Μέτρο / Φάση Απόκριση Συχνότητας Γ.Χ.Α. Συστημ. (I)



ΣΥΝΕΧΗΣ ΧΡΟΝΟΣ $\xleftrightarrow{M/\Sigma}$
 ΔΙΑΚΡΙΤΟΣ ΧΡΟΝΟΣ $\xleftrightarrow{FOURIER}$

$$Y(j\Omega) = H(j\Omega)X(j\Omega)$$

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

(αν υπάρχουν...)

\rightarrow MAGNITUDE DISTORTION
 \rightarrow ΚΕΡΔΟΣ / GAIN

$$\begin{cases} |Y(j\Omega)| = |H(j\Omega)| |X(j\Omega)| \\ \angle Y(j\Omega) = \angle H(j\Omega) + \angle X(j\Omega) \end{cases}$$

\rightarrow PHASE SHIFT
 \rightarrow PHASE DISTORTION
 και αντίστοιχα για διακριτό χρόνο / DTFT ...

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΦΑΣΗ

$\textcircled{\pi \times} H(j\Omega) = e^{-j\Omega t_0} \Rightarrow y(t) = x(t - t_0)$
ΧΡΟΝΙΚΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ

$\textcircled{\delta \eta \lambda} |H(j\Omega)| = 1, \angle H(j\Omega) = -\Omega t_0$
ALL PASS - ΟΛΟΠΕΡΑΤΟ

Αντίστοιχα: $H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_0} \Rightarrow y[n] = x[n - n_0]$ (για ακέραιο n_0)

$\textcircled{\delta \eta \lambda} |H(e^{j\omega})| = 1, \angle H(e^{j\omega}) = -\omega n_0$
ALL-PASS - ΟΛΟΠΕΡΑΤΟ





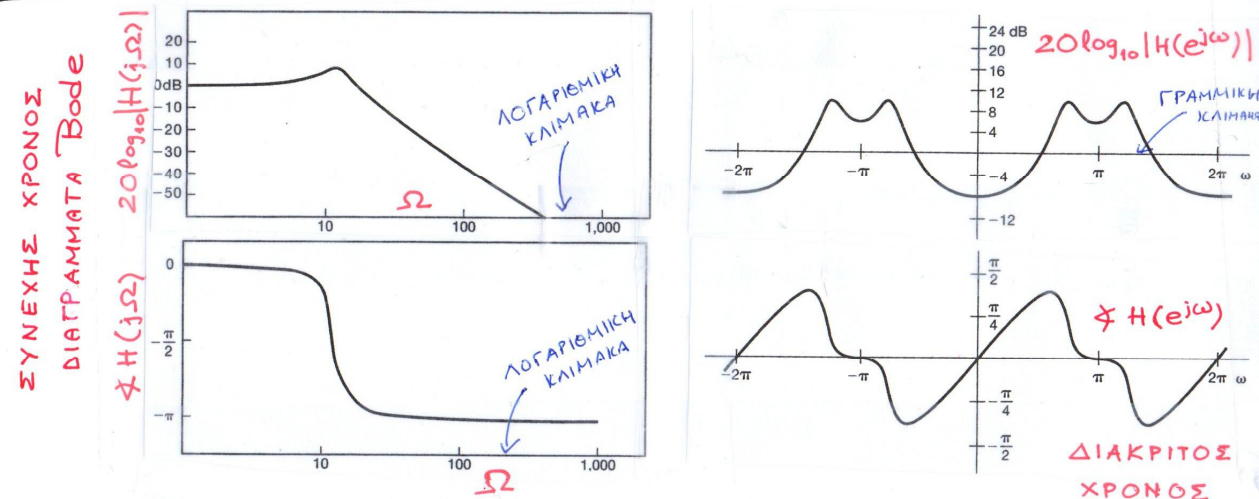
6.1. Μέτρο / Φάση Απόκριση Συχνότητας Γ.Χ.Α. Συστημ. (II)

ΚΑΘΥΣΤΕΡΗΣΗ ΟΜΑΔΑΣ – GROUP DELAY

$$\tau(\Omega) = - \frac{d}{d\Omega} \{ \angle H(j\Omega) \} \quad \text{ΣΥΝΕΧΗΣ ΧΡΟΝΟΣ}$$

$$\tau(\omega) = - \frac{d}{d\omega} \{ \angle H(e^{j\omega}) \} \quad \text{ΔΙΑΚΡΙΤΟΣ ΧΡΟΝΟΣ}$$

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΟΥ ΠΛΑΤΟΥΣ ΚΑΙ ΦΑΣΗΣ
 LOG-MAGNITUDE AND PHASE PLOTS



Σχ. 6.8, 6.9 από βιβλίο Oppenheim-Willsky (τροποποιημένα)





6.3. Ιδανικά και Μή Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων (I)

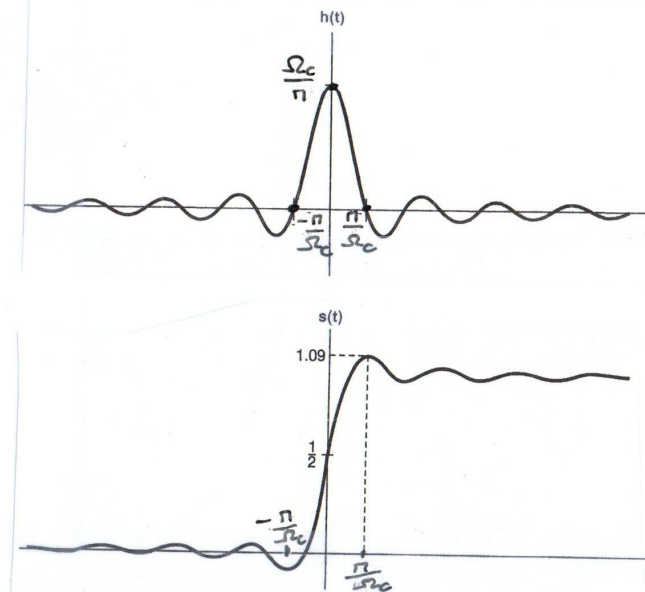
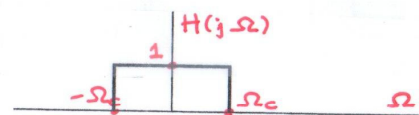
ΙΔΑΝΙΚΑ ΚΑΤΩΠΕΡΑΤΑ ΦΙΛΤΡΑ
IDEAL LOWPASS FILTERS

ΣΥΝΕΧΗΣ
ΧΡΟΝΟΣ :

$$H(j\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| \leq \Omega_c \\ 0, & |\Omega| > \Omega_c \end{cases}$$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{\sin(\Omega_c t)}{\pi t}$$

$$s(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau$$



φαινόμενο
ταλάντωσης
στον χρόνο
"RINGING"
(μη επιθυμητό)
ΕΠΙΣΗΣ ΜΗ-ΑΙΤΙΑΤΟ

Σχ. 6.10(a), 6.12(a), 6.14(a) από βιβλίο Oppenheim-Willsky (τροποποιημένα)



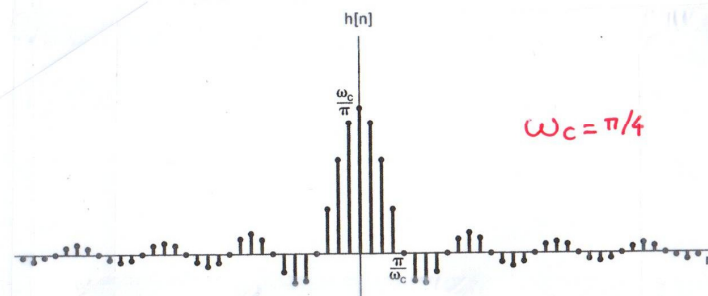
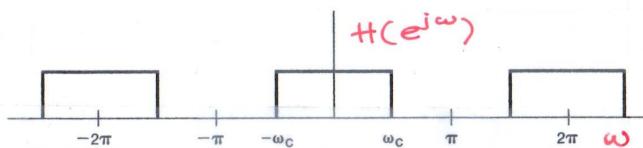


6.3. Ιδανικά και Μή Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων (II)

ΔΙΑΚΡΙΤΟΣ ΧΡΟΝΟΣ :

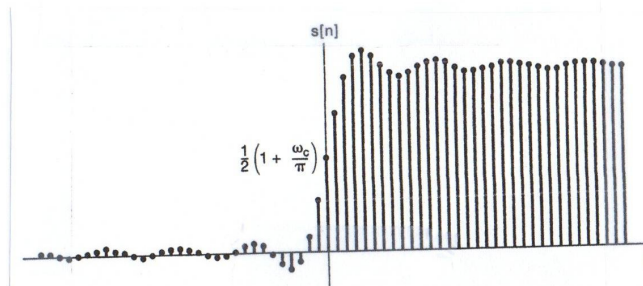
$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h[n] = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}, \quad s[n] = \sum_{m=-\infty}^n h[m]$$



ανεπιθύτητα
 φαινόμενα
 ταλάντωσης

ΕΓΙΣΜΕ ΜΗ-ΑΙΤΙΑΤΟ



Σχ. 6.10(b), 6.12(b), 6.14(b) από βιβλίο Oppenheim-Willsky (τροποποιημένα)

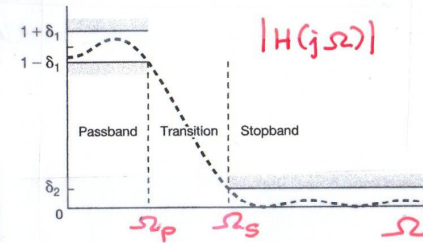




6.3. Ιδανικά και Μή Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων (III)

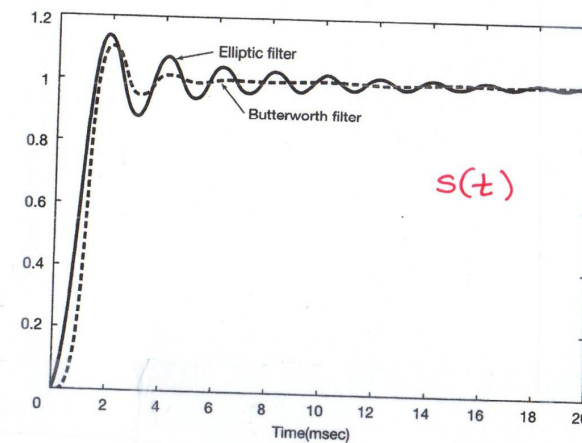
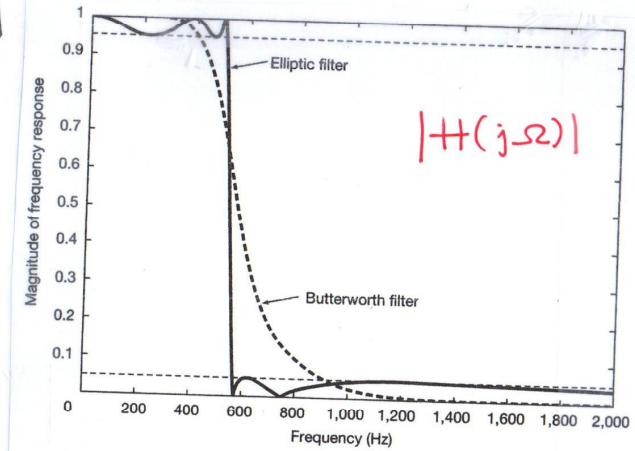
ΜΗ-ΙΔΑΝΙΚΑ ΚΑΤΩΠΕΡΑΤΑ ΦΙΛΤΡΑ
 NON-IDEAL LOWPASS FILTERS

Τυπικά σχεδιαστικά κριτήρια:



Σχ. 6.16 από βιβλίο Oppenheim-Willsky (τροποποιημένο)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ
 ΥΛΟΠΟΙΗΣΗΣ
 (συνεχής χρόνος)



Σχ. 6.18 από βιβλίο Oppenheim-Willsky (τροποποιημένο)





6.4. Γ.Χ.Α. Συστήματα Συνεχούς Χρόνου 1^{ης} / 2^{ης} Τάξης (I)

- Συστήματα μεγαλύτερης τάξης συχνά υλοποιούνται ως συνδυασμός συστημάτων 1^{ης} & 2^{ης} τάξης (με παράλληλα, ή εν σειρά συνδυασμό)

1 ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

Διαφορική εξίσωση:

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

$\tau > 0$

Απόκριση συχνότητας

$$H(j\Omega) = \frac{1}{j\Omega\tau + 1}$$

Κρουστική απόκριση

$$h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} u(t)$$

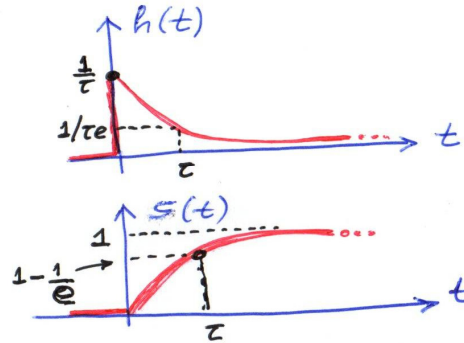
Βηματική απόκριση

$$s(t) = h(t) * u(t) = [1 - e^{-t/\tau}] u(t)$$





6.4. Γ.Χ.Α. Συστήματα Συνεχούς Χρόνου 1^{ης} / 2^{ης} Τάξης (II)



$$h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} u(t)$$

$$s(t) = [1 - e^{-\frac{t}{\tau}}] u(t)$$

τ : ΣΤΑΘΕΡΑ ΧΡΟΝΟΥ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ / system time constant
 \hookrightarrow ελέγχει τον ρυθμό με τον οποίο αποκρίνεται το σύστημα

$\text{ΠΧ} \quad \tau \downarrow \Rightarrow h(0) \uparrow$, απόσβεση \downarrow (πιο γρήγορα)
 $s(t)$ ατέρχεται πιο σύντομα





6.4. Γ.Χ.Α. Συστήματα Συνεχούς Χρόνου 1ης / 2ης Τάξης (III)

Απόκριση συχνότητας / Διαγράμματα:

$$20 \log_{10} |H(j\Omega)| = -10 \log_{10} [(\Omega\tau)^2 + 1]$$

- $\Omega\tau \ll 1 \Rightarrow 20 \log_{10} |H(j\Omega)| \approx 0$
- $\Omega\tau \gg 1 \Rightarrow 20 \log_{10} |H(j\Omega)| \approx -20 \log_{10}(\Omega) - 20 \log_{10}\tau$

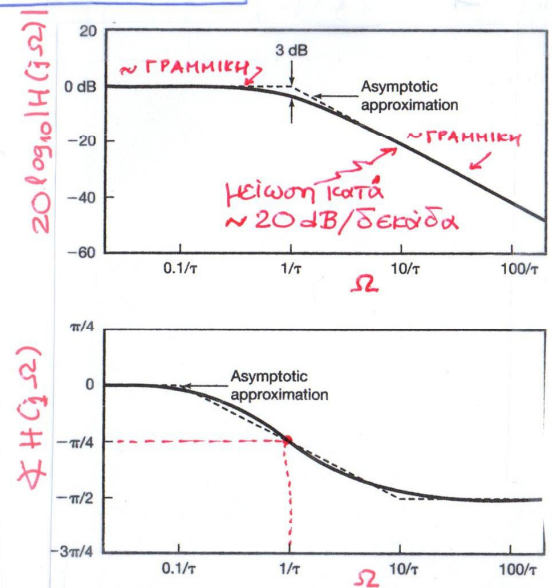
γραμμική ως προς $\log \Omega$

• $\Omega\tau = 1 \Rightarrow 20 \log_{10} |H(j\Omega)| = -10 \log_{10}(2) \approx -3 \text{ dB}$

$$\angle H(j\Omega) = -\arctan(\Omega\tau) \approx$$

$\approx \begin{cases} 0, & \text{για } \Omega \leq 0.1/\tau \\ -\frac{\pi}{4} [\log_{10}(\Omega\tau) + 1], & \frac{0.1}{\tau} \leq \Omega \leq 10/\tau \\ -\pi/2, & \text{για } \Omega \geq 10/\tau \end{cases}$

Προσέγγιση



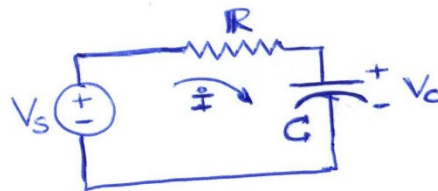
Σχ. 6.20 από βιβλίο Oppenheim-Willsky (τροποποιημένο)





6.4. Γ.Χ.Α. Συστήματα Συνεχούς Χρόνου 1^{ης} / 2^{ης} Τάξης (IV)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:



$$\left. \begin{aligned} I(t) &= \frac{V_s(t) - V_c(t)}{R} \\ I(t) &= C \frac{dV_c(t)}{dt} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{RC \frac{dV_c(t)}{dt} + V_c(t) = V_s(t)}$$

τ





6.4. Γ.Χ.Α. Συστήματα Συνεχούς Χρόνου 1ης / 2ης Τάξης (V)

2 ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

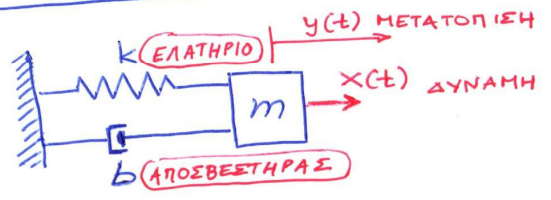
Διαφορική Εξίσωση :

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dy(t)}{dt} + \omega_n^2 y(t) = \omega_n^2 x(t)$$

($\zeta, \omega_n > 0$) *

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

1

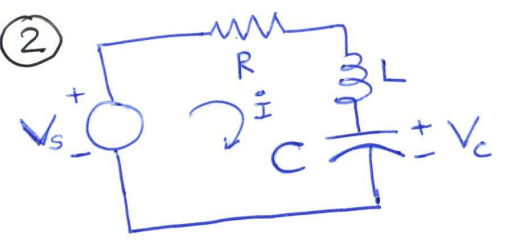


$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = x(t) - ky(t) - b \frac{dy(t)}{dt}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\zeta = \frac{b}{2\sqrt{km}}$$

2



$$V_s(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + V_c(t)$$

$$i(t) = C \frac{dV_c(t)}{dt}$$

⇒ Διαφ. Εξίσωση τε *

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$





6.4. Γ.Χ.Α. Συστήματα Συνεχούς Χρόνου 1ης / 2ης Τάξης (VI)

Απόκριση Συχνότητας:

$$H(j\Omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\Omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\Omega) + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{(j\Omega - c_1)(j\Omega - c_2)}$$

ΡΙΖΕΣ ΠΑΡΟΝΟΜΑΣΤΗ →

$$c_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

• $\zeta \neq 1 \Rightarrow c_1 \neq c_2$, οπότε: $H(j\Omega) = \frac{M}{j\Omega - c_1} - \frac{M}{j\Omega - c_2}$

πε $M = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}$

οπότε $h(t) = M[e^{c_1 t} - e^{c_2 t}]u(t)$

• $\zeta = 1 \Rightarrow c_1 = c_2 = -\omega_n$, οπότε: $H(j\Omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\Omega + \omega_n)^2}$

και $h(t) = \omega_n^2 t e^{-\omega_n t} u(t)$





6.4. Γ.Χ.Α. Συστήματα Συνεχούς Χρόνου 1^{ης} / 2^{ης} Τάξης (VII)

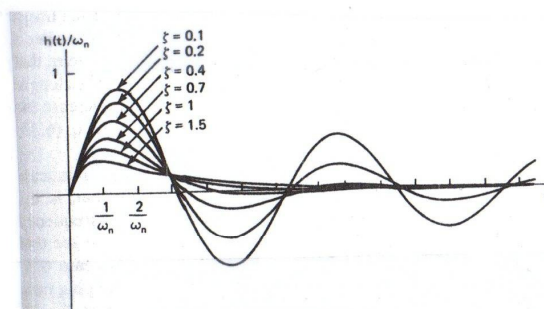
• Παράμετροι : ω_n : undamped natural frequency / φυσική συχνότητα

ζ : damping ratio / λόγος απόσβεσης

• Για $0 < \zeta < 1$ UNDERDAMPED $h(t) = \frac{\omega_n e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot \sin[(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})t] \cdot u(t)$
 ↳ ταλάντωση

Για $\zeta > 1$ OVERDAMPED $h(t) = \text{διαφορά εκθετικών} = \dots$

Για $\zeta = 1$ CRITICALLY DAMPED $h(t) = \omega_n^2 t e^{-\omega_n t} u(t)$



Σχ. 6.22(a) από βιβλίο Oppenheim-Willsky



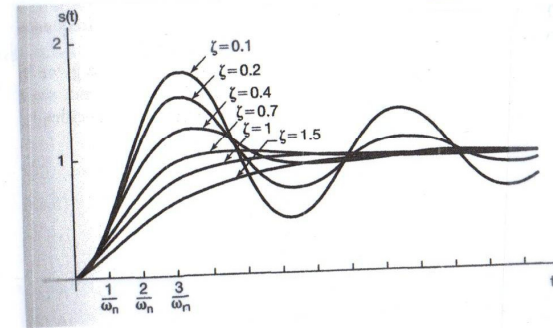


6.4. Γ.Χ.Α. Συστήματα Συνεχούς Χρόνου 1ης / 2ης Τάξης (VIII)

ΒΗΜΑΤΙΚΗ
ΑΠΟΚΡΙΣΗ :

$$s(t) \equiv h(t) * u(t) = \begin{cases} 1 + M \left(\frac{e^{c_1 t}}{c_1} - \frac{e^{c_2 t}}{c_2} \right) u(t), & \boxed{\zeta \neq 1} \\ [1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n t e^{-\omega_n t}] u(t), & \boxed{\zeta = 1} \end{cases}$$

$0 < \zeta < 1$: $s(t)$ OVERSHOOTS, RINGING
 $\zeta = 1$: $s(t)$ fastest response
 $\zeta > 1$: $s(t)$ response slows



Σχ. 6.22(b) από βιβλίο Oppenheim-Willsky

ω_n : Επιπηρεάζει την
χρονική κλίμακα σε $h(t)$ & $S(t)$





6.4. Γ.Χ.Α. Συστήματα Συνεχούς Χρόνου 1^{ης} / 2^{ης} Τάξης (IX)

ΑΠΟΚΡΙΣΗ
ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ] / ΜΕΤΡΟ

$$20 \log_{10} |H(j\Omega)| = -10 \log_{10} \left[\left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + 4\zeta^2 \left(\frac{\Omega}{\omega_n} \right)^2 \right]$$

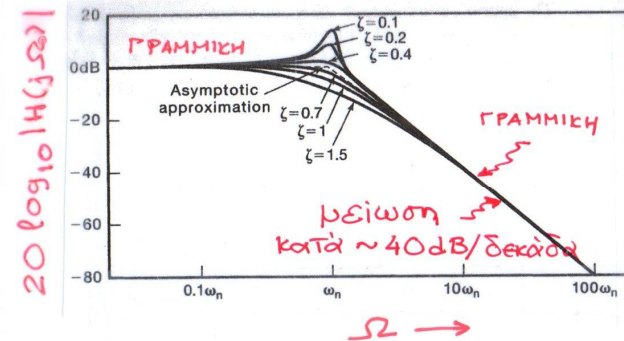
$$\approx \begin{cases} 0, & \text{για } \Omega \ll \omega_n \\ -40 \log_{10} \Omega + 40 \log_{10} \omega_n, & \text{για } \Omega \gg \omega_n \end{cases}$$

για $\zeta < \sqrt{2}/2$ ΚΟΡΥΦΗ →

$$\arg \max_{\Omega} |H(j\Omega)| = \omega_n \sqrt{1-2\zeta^2}$$

$$|H(j\Omega_{\max})| = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-2\zeta^2}}$$

$\zeta \downarrow \Rightarrow$ Αυξάνεται η κορυφή



Σχ. 6.23(a) από βιβλίο Oppenheim-Willsky (τροποποιημένο)

(μεγάλη διαφοροποίηση/εφάλμα
για μικρά ζ)



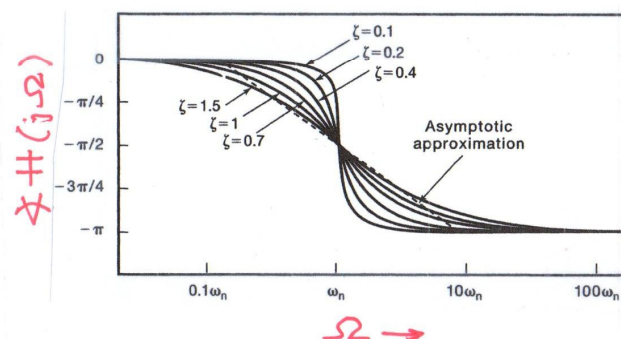


6.4. Γ.Χ.Α. Συστήματα Συνεχούς Χρόνου 1^{ης} / 2^{ης} Τάξης (X)

ΑΠΟΚΡΙΣΗ
 ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ / ΦΑΣΗ

$$\angle H(j\Omega) = -\arctan\left[\frac{2\zeta\Omega/\omega_n}{1 - (\Omega/\omega_n)^2}\right]$$

$$\approx \begin{cases} 0, & \text{για } \Omega \leq 0.1\omega_n \\ -\frac{\pi}{2} \left[\log_{10}\left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right) + 1 \right], & \text{για } \frac{\omega_n}{10} \leq \Omega \leq 10\omega_n \\ -\pi, & \text{για } \Omega \geq 10\omega_n \end{cases}$$



Σχ. 6.23(b) από βιβλίο Oppenheim-Willsky (τροποποιημένο)





6.4. Γ.Χ.Α. Συστήματα Συνεχούς Χρόνου 1ης / 2ης Τάξης (XI)

3 ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ BODE
ΓΙΑ ΡΗΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ
ΑΠΟΚΡΙΣΗΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

- Διαγράμματα ^{BODE} όταν τα παραπάνω, μπορούν να χρησιμοποιηθούν για πιο πολύπλοκα συστήματα.

- Επίσης τα διαγράμματα για $H(j\Omega) = 1 + j\Omega\tau$
 $\text{η} \quad H(j\Omega) = 1 + 2j\left(\frac{j\Omega}{\omega_n}\right) + \left(\frac{j\Omega}{\omega_n}\right)^2$
 (αντίθετο πρόσημο)

- Επίσης $H(j\Omega) = K \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 20 \log_{10} |H(j\Omega)| = 20 \log_{10} |K| \\ \angle H(j\Omega) = \begin{cases} 0, & K > 0 \\ \pi, & K < 0 \end{cases} \end{array} \right\}$

- Με CASCADE / εν σειρά συνδυαστό παραπάνω αποκρ. συχνότητας μπορούμε να ΑΘΡΟΙΣΟΥΜΕ τα διαγράμματα BODE.





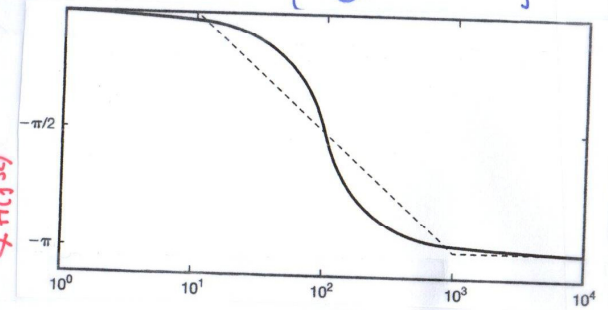
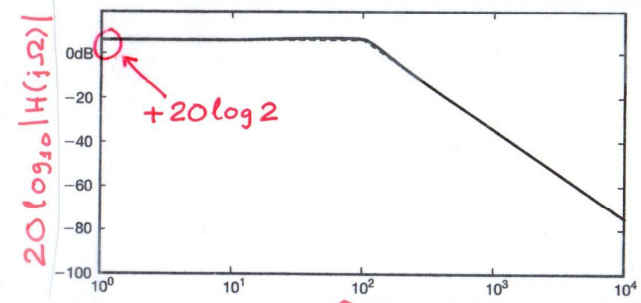
6.4. Γ.Χ.Α. Συστήματα Συνεχούς Χρόνου 1^{ης} / 2^{ης} Τάξης (XII)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: ①

$$H(j\omega) = \frac{2 \times 10^4}{(j\omega)^2 + 100(j\omega) + 10^4} = 2 \cdot \hat{H}(j\omega)$$

ΣΥΣΤΗΜΑ
 2^{ΗΣ} ΤΑΞΗΣ
 $\omega_n = 100$
 $\zeta = 2$

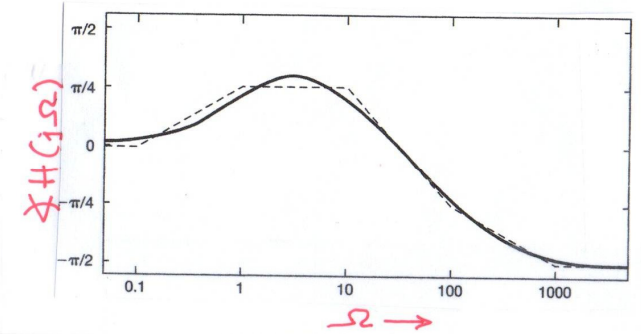
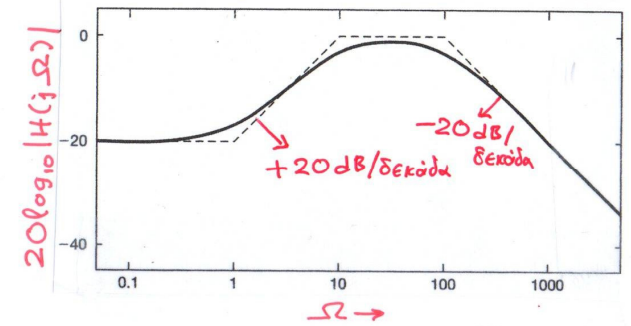
Σχ. 6.24 από βιβλίο
 Oppenheim-Willsky
 (τροποποιημένο)



② $H(j\omega) = \left(\frac{1}{10}\right) \left(\frac{1}{1+j\omega/10}\right) \left(\frac{1}{1+j\omega/100}\right) (1+j\omega)$

-20dB offset
 $\frac{1}{\tau} = 10$
 $\frac{1}{\tau} = 100$
 $\frac{1}{\tau} = 1$
 -20dB/δεκάδα
 -20dB/δεκάδα
 +20dB/δεκάδα

Σχ. 6.25 από βιβλίο
 Oppenheim-Willsky
 (τροποποιημένο)





6.5. Γ.Χ.Α. Συστήματα Διακριτού Χρόνου 1^{ης} / 2^{ης} Τάξης (I)

- Όπως και για τον συνεχή χρόνο, θα μελετήσουμε συστήματα διακριτού χρόνου 1^{ης} ή 2^{ης} τάξης.
- Πιο πολύπλοκα συστήματα μπορούν να υλοποιηθούν/μελετηθούν με παράλληλο ή εν-σειρά συνδυασμό των 1^{ης} & 2^{ης} ΤΑΞΗΣ.

1 ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ 1^{ΗΣ} ΤΑΞΗΣ

ΕΞΙΣΩΣΗ ΔΙΑΦΟΡΩΝ:

$$y[n] - ay[n-1] = x[n]$$

↳ με $|a| < 1$

ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

ΚΡΟΥΣΤΙΚΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ:

$$h[n] = a^n u[n]$$

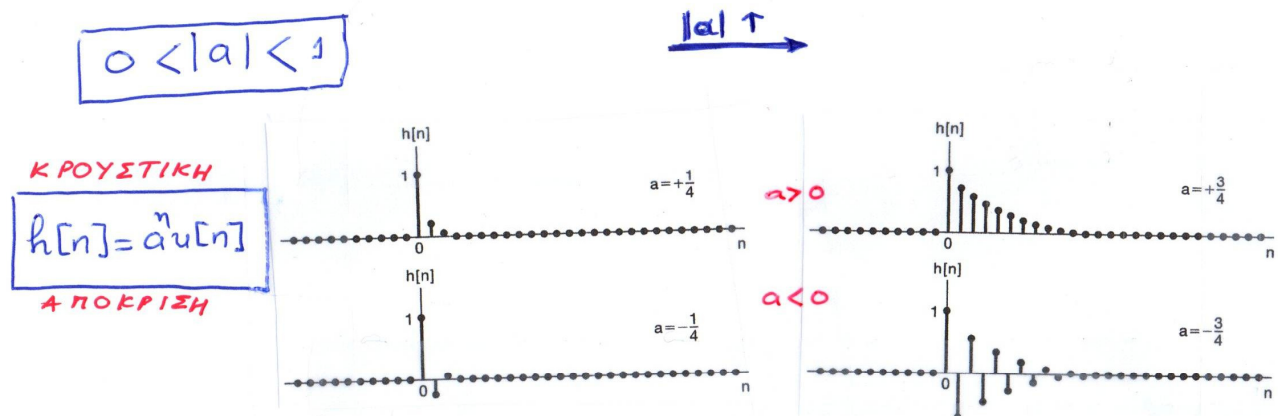
ΒΗΜΑΤΙΚΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ:

$$s[n] = h[n] * u[n] = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} u[n]$$

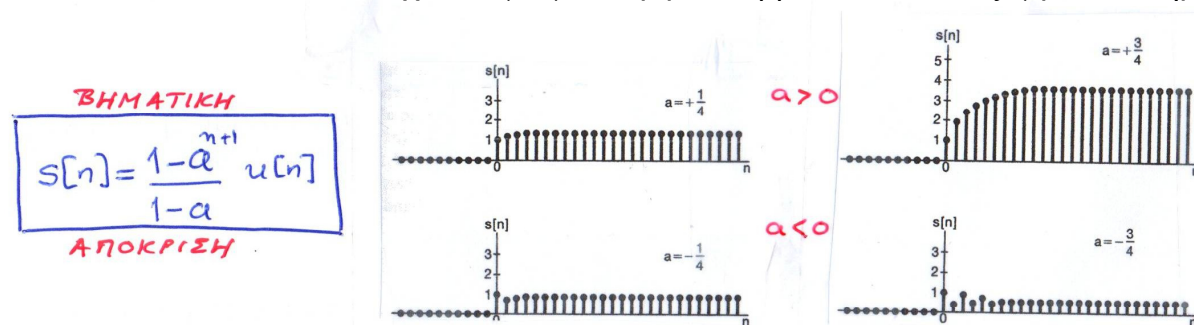




6.5. Γ.Χ.Α. Συστήματα Διακριτού Χρόνου 1ης / 2ης Τάξης (II)



Σχ. 6.26(a,c) από βιβλίο Oppenheim-Willsky (τροποποιημένα)



Σχ. 6.27(a,c) από βιβλίο Oppenheim-Willsky (τροποποιημένα)

- Για $|a|$ μικρό, η $h[n]$ μειώνεται γρήγορα, η $s[n]$ σταθεροποιείται γρήγορα
- Για $|a|$ μεγάλο (κοντά στο 1) τα $h[n]$ $s[n]$ έχουν πιο αργή μεταβολή
- Για $a < 0$, έχουμε φαινόμενα ταλάντωσης (εναντιόθετα με αυγελή χρόνος)





6.5. Γ.Χ.Α. Συστήματα Διακριτού Χρόνου 1^{ης} / 2^{ης} Τάξης (III)

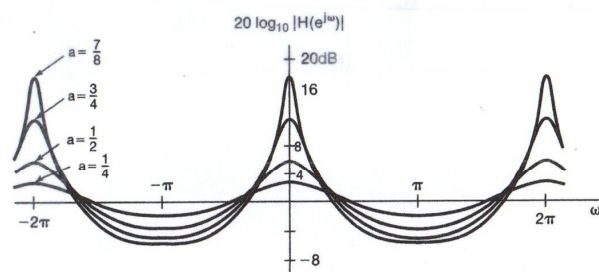
ΑΠΟΚΡΙΣΗ
ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ :

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{(1 + a^2 - 2a \cos\omega)^{1/2}}$$

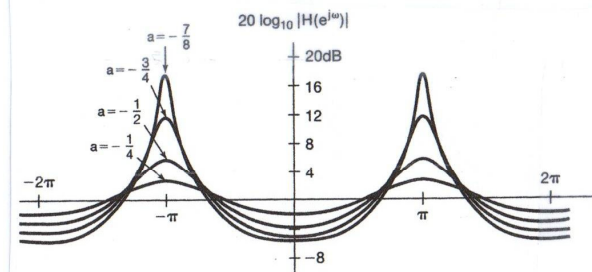
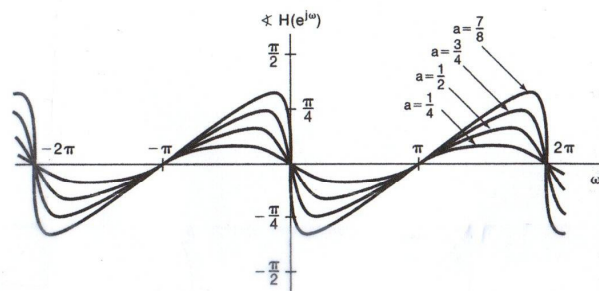
ΜΕΤΡΟ

$$\angle H(e^{j\omega}) = -\arctan\left[\frac{a \sin\omega}{1 - a \cos\omega}\right]$$

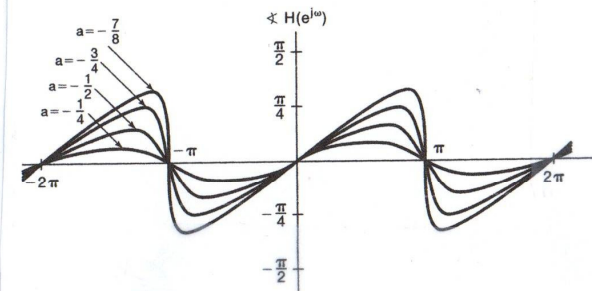
ΦΑΣΗ



$0 < a < 1$



$-1 < a < 0$



Σχ. 6.28(a,b) από βιβλίο Oppenheim-Willsky (τροποποιημένα)





6.5. Γ.Χ.Α. Συστήματα Διακριτού Χρόνου 1ης / 2ης Τάξης (IV)

2

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ 2^{ης} ΤΑΞΗΣ

ΕΞΙΣΩΣΗ ΔΙΑΦΟΡΩΝ:

$$y[n] - 2r \cos\theta y[n-1] + r^2 y[n-2] = x[n]$$

$$\hookrightarrow \mu\epsilon \quad 0 < r < 1 \quad \kappa\alpha\iota \quad 0 < \theta < \pi$$

ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - 2r \cos\theta e^{-j\omega} + r^2 e^{-j2\omega}}$$

ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΕ ΜΕΡΙΚΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - re^{j\theta} e^{-j\omega})(1 - re^{-j\theta} e^{-j\omega})} \stackrel{\text{ΓΙΑ } \theta \neq 0, \pi}{=} \frac{A}{1 - re^{j\theta} e^{-j\omega}} + \frac{B}{1 - re^{-j\theta} e^{-j\omega}}$$

$$A = \frac{e^{j\theta}}{2j \sin\theta} \quad B = \frac{e^{-j\theta}}{2j \sin\theta}$$

$$\Rightarrow h[n] = r^n \frac{\sin[(n+1)\theta]}{\sin\theta} u[n]$$

$$\text{ΓΙΑ } \theta = 0 \quad H(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - re^{-j\omega})^2} \Rightarrow h[n] = (n+1)r^n u[n]$$

$$\text{ΓΙΑ } \theta = \pi \quad H(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 + re^{-j\omega})^2} \Rightarrow h[n] = (n+1)(-r)^n u[n]$$





6.5. Γ.Χ.Α. Συστήματα Διακριτού Χρόνου 1^{ης} / 2^{ης} Τάξης (V)

ΚΡΟΥΣΤΙΚΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ

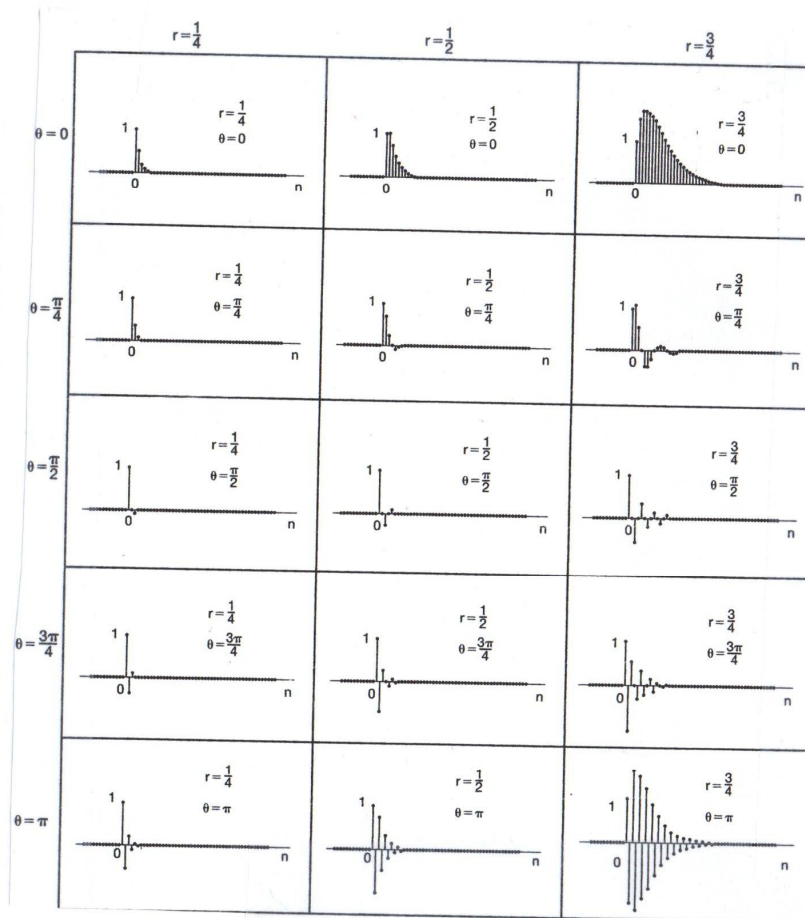
r: Επηρεάζει ρυθμό
 μείωσης πλάτους της
 $h[n]$

($r \downarrow \Rightarrow h[n]$ μειώνεται πιο
 γρήγορα)

θ : Επηρεάζει ρυθμό
 ταλάντωσης της $h[n]$

$\theta=0$: Δεν υπάρχει
 ταλάντωση

$\theta=\pi$: Ταχεία
 ταλάντωση



Σχ. 6.29 από βιβλίο Oppenheim-Willsky





6.5. Γ.Χ.Α. Συστήματα Διακριτού Χρόνου 1ης / 2ης Τάξης (VI)

ΒΗΜΑΤΙΚΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ :

$$\theta \neq 0, \pi$$

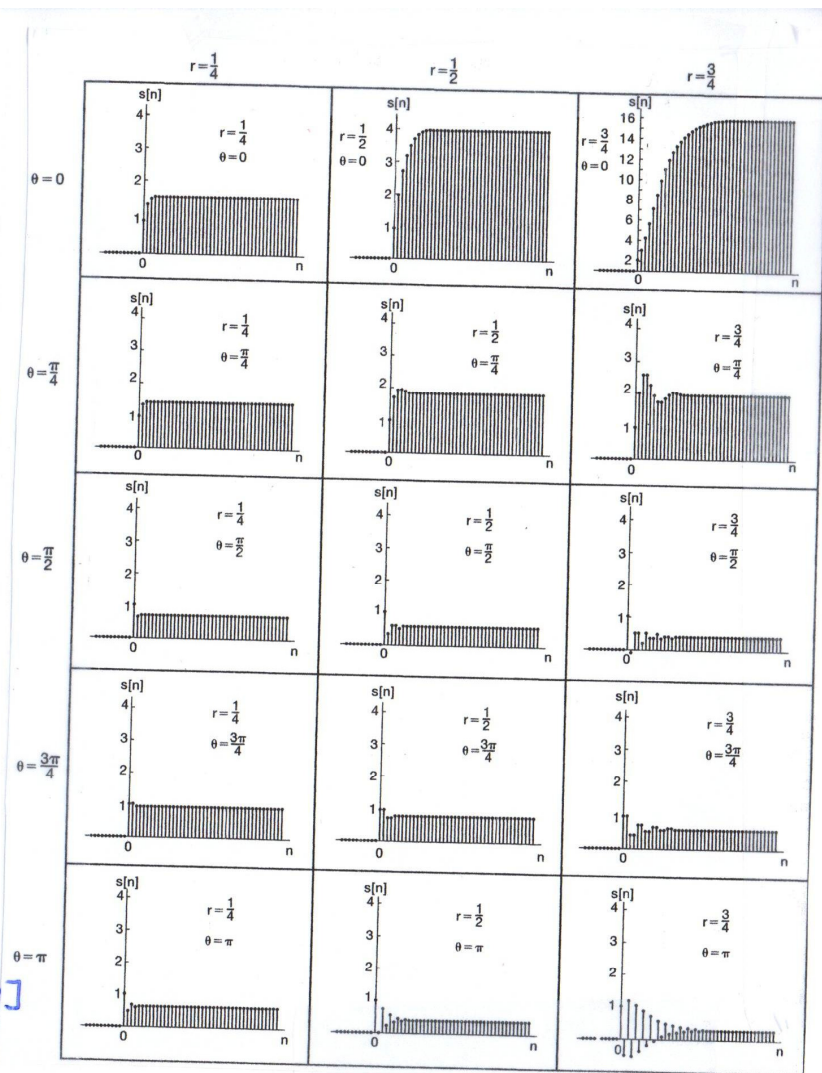
$$s[n] = \left[A \left(\frac{1 - (re^{j\theta})^{n+1}}{1 - re^{j\theta}} \right) + B \left(\frac{1 - (re^{-j\theta})^{n+1}}{1 - re^{-j\theta}} \right) \right] u[n]$$

$$\theta = 0$$

$$s[n] = \left[\frac{1}{(r-1)^2} - \frac{r}{(r-1)^2} r^n + \frac{r}{r-1} (n+1)r^n \right] u[n]$$

$$\theta = \pi$$

$$s[n] = \left[\frac{1}{(r+1)^2} + \frac{r}{(r+1)^2} (-r)^n + \frac{r}{r+1} (n+1)(-r)^n \right] u[n]$$



ΠΑΡΟΥΣΙΑΖΕΙ "RINGING" & "OVERSHOOT" (ΕΚΤΟΣ ΕΑΝ $\theta=0$)

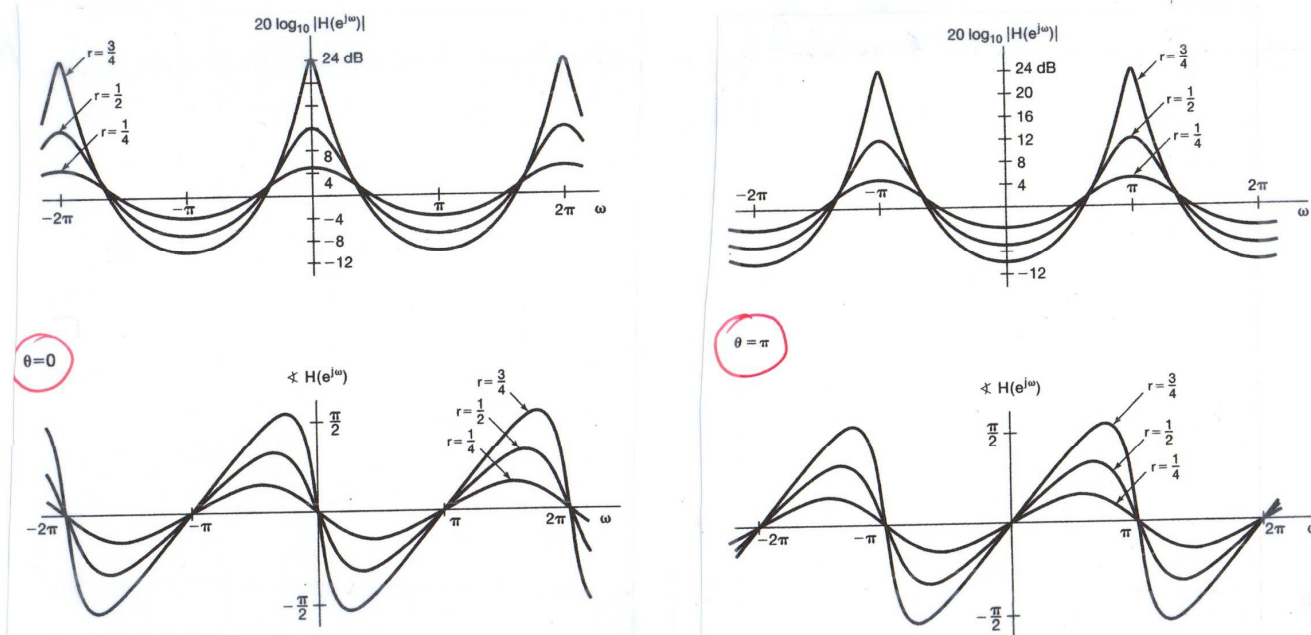
Σχ. 6.30 από βιβλίο Oppenheim-Willsky





6.5. Γ.Χ.Α. Συστήματα Διακριτού Χρόνου 1^{ης} / 2^{ης} Τάξης (VII)

ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ :



Σχ. 6.31(a,e) από βιβλίο Oppenheim-Willsky (τροποποιημένα)





6.5. Γ.Χ.Α. Συστήματα Διακριτού Χρόνου 1ης / 2ης Τάξης (VIII)

3 ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ 2ΗΣ ΤΑΞΗΣ

Εξίσωση Διαφορών:

$$y[n] - (d_1 + d_2)y[n-1] + d_1 d_2 y[n-2] = x[n]$$

κε $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$ & $|d_1|, |d_2| < 1$

Απόκριση συχνότητας:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - d_1 e^{-j\omega})(1 - d_2 e^{-j\omega})}$$

→ CASCADE 2 ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ
1ΗΣ ΤΑΞΗΣ

Ανάλυση σε μερικά κλάσματα:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{A \frac{d_1}{d_1 - d_2}}{1 - d_1 e^{-j\omega}} + \frac{B \frac{d_2}{d_2 - d_1}}{1 - d_2 e^{-j\omega}} \quad (\text{για } d_1 \neq d_2)$$

Κρουστική & Βηματική Απόκριση:

$$h[n] = [A d_1^n + B d_2^n] u[n]$$

$$s[n] = \left[A \left(\frac{1 - d_1^{n+1}}{1 - d_1} \right) + B \left(\frac{1 - d_2^{n+1}}{1 - d_2} \right) \right] u[n]$$

