ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

ΘΕΩΡΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Γεράσιμος Ποταμιάνος

Αναπλ. Καθηγητής,
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

http://www.inf.uth.gr/~gpotamianos

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

ΘΕΩΡΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Ενότητα 5: ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

5.0. Εισαγωγή
5.1. Μ/Σ Fourier Απεριοδικών Σημάτων Διακριτού Χρόνου
5.2. Μ/Σ Fourier Περιοδικών Σημάτων Διακριτού Χρόνου
5.3-7. Ιδιότητες Μ/Σ Fourier Διακριτού Χρόνου
5.8. Ανάλυση Γ.Χ.Α. Συστημάτων Περιγραφόμενων από Εξισώσεις Διαφορών
– Παράρτημα Α.2: Ανάλυση σε Μερικά Κλάσματα

5.0. Εισαγωγή

- Στο κεφάλαιο 4 μελετήσαμε το μ/σ **Fourier** σημάτων **συνεχούς χρόνου**.
- Στο κεφάλαιο αυτό (5) θα μελετήσουμε το μ/σ **Fourier διακριτού χρόνου**.
  - ✓ Απεριοδικά και περιοδικά σήματα διακριτού χρόνου.
  - ✓ Υπάρχουν πολλές ομοιότητες με τον συνεχή χρόνο, αλλά και σημαντικές διαφορές.
- Δίνουμε μεγάλη σημασία στις **ιδιότητες** μετασχηματισμού Fourier.
  - ✓ Π.χ., συνέλιξη, γινόμενο.
- Εφαρμογή σε Γ.Χ.Α. συστήματα διακριτού χρόνου που περιγράφονται με **εξισώσεις διαφορών**.

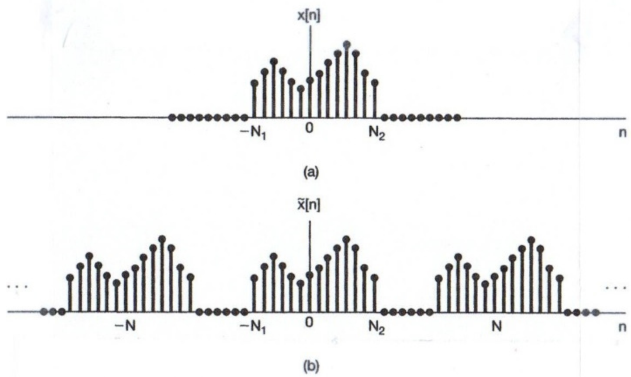
5.1. Μ/Σ Fourier Διακριτού Χρόνου (DTFT) για Απεριοδικά Σήματα – Ανάπτυξη (I)

Ανάπτυξη του Μ/Σ ξεκινώντας από την σειρά Fourier διακριτού χρόνου.

- $x[n]$ ΣΗΜΑ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΗΣ ΔΙΑΡΚΕΙΑΣ, δηλ. $x[n]=0 \quad \forall \quad n>N_2,\ n<-N_1$
- $\tilde{x}[n]$ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΣΗΜΑ που προκύπτει από επανάληψη του $x[n]$ με περίοδο N

  $$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-kN]$$

- $\tilde{x}[n] \xrightarrow[N\to\infty]{} x[n]$



Σχ. 5.1. από βιβλίο Oppenheim-Willsky

5.1. DTFT για Απεριοδικά Σήματα – Ανάπτυξη (II)

Από σειρά Fourier Διακριτού Χρόνου (DFS):

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \quad (1)$$

με:

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=-N_1}^{N_2} \tilde{x}[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N}\sum_{-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \Rightarrow a_k = \frac{1}{N} X(e^{jk\omega_0}) \quad (2)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

Ορίζουμε:

$$\boxed{X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n}}$$

ΑΡΑ: (1), (2) ⇒

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} \frac{1}{N} X(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n}$$

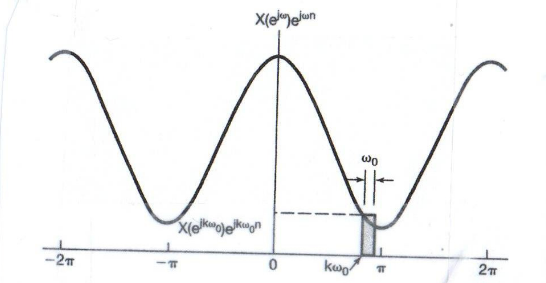
$$\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=\langle N\rangle} X(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n}\,\omega_0$$

$N \to \infty$

$N \to \infty$

$$\boxed{x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n}\, d\omega}$$



Σχ. 5.2 από βιβλίο Oppenheim-Willsky

5.1. DTFT για Απεριοδικά Σήματα – Ανάπτυξη (ΙΙΙ)

ΖΕΥΓΟΣ Μ/Σ FOURIER ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ (DTFT):

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})\, e^{j\omega n}\, d\omega$$

ΣΥΝΘΕΣΗ
IDTFT

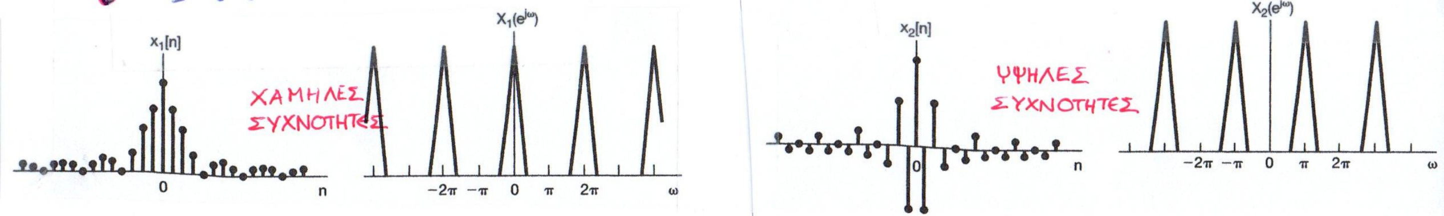
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-j\omega n}$$

ΑΝΑΛΥΣΗ
DTFT

→ ΦΑΣΜΑ / SPECTRUM

ΟΜΟΙΟΤΗΤΕΣ / ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΜΕ ΣΥΝΕΧΗ ΧΡΟΝΟ (CTFT):

- DFS a_k ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΥ $\tilde{x}[n]$ εκφράζονται ως δείγματα του $X(e^{j\omega})$
- DTFT άθροισμα αντί ολοκληρώματος
- Σύνδεση: ολοκλήρωση σε πεπερασμένο διάστημα 2π.
- $X(e^{j\omega})$ περιοδικό με περίοδο 2π

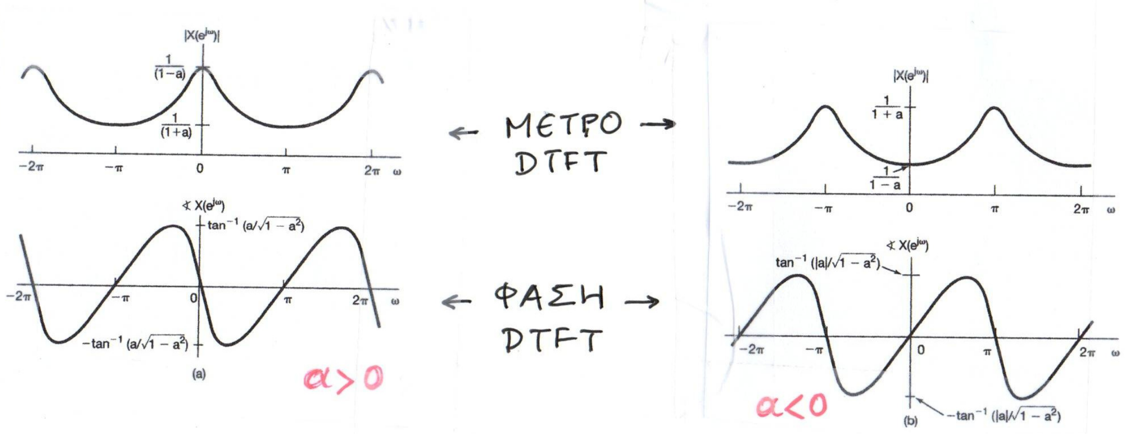


Σχ. 5.3. από βιβλίο Oppenheim-Willsky

5.1. DTFT για Απεριοδικά Σήματα – Παραδείγματα (I)

(1) $\boxed{x[n] = a^n u[n], \quad |a|<1}$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (a e^{-j\omega})^n = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$



Σχ. 5.4 από βιβλίο Oppenheim-Willsky (παραλλαγή)

5.1. DTFT για Απεριοδικά Σήματα – Παραδείγματα (II)

2

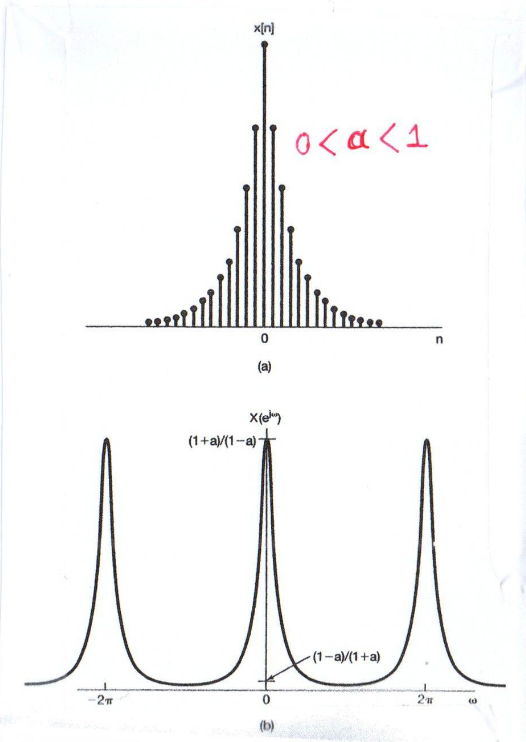
$$\boxed{x[n] = a^{|n|}, \quad |a| < 1}$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^{|n|} e^{-j\omega n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (a e^{-j\omega})^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} (a e^{j\omega})^{-n}$$

$$= \frac{1}{1 - a e^{-j\omega}} + \left[\frac{1}{1 - a e^{j\omega}} - 1 \right]$$

$$= \frac{1 - a^2}{1 - 2a\cos\omega + a^2}$$



Σχ. 5.5 από βιβλίο Oppenheim-Willsky

5.1. DTFT για Απεριοδικά Σήματα – Παραδείγματα (III)

3

$$\boxed{x[n] = \begin{cases} 1, & |n| \le N_1 \\ 0, & |n| > N_1 \end{cases}}$$

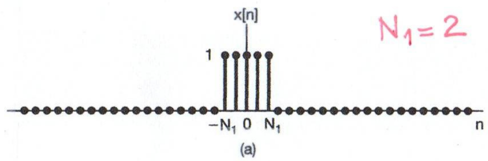
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j\omega n} = \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-j\omega(m-N_1)} =$$

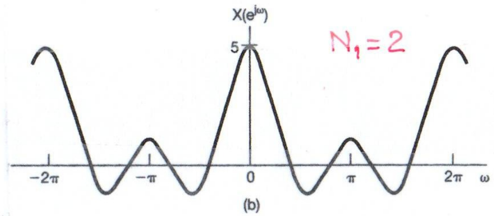
$m = n + N_1$

$$= e^{j\omega N_1} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-j\omega m} =$$

$$= e^{j\omega N_1} \frac{1 - e^{-j\omega(2N_1+1)}}{1 - e^{-j\omega}}$$

$$= \frac{e^{-j\frac{\omega}{2}}\left[e^{j\omega(N_1+\frac{1}{2})} - e^{-j\omega(N_1+\frac{1}{2})}\right]}{e^{-j\frac{\omega}{2}}\left[e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}}\right]} = \frac{\sin\left[\omega\left(N_1+\frac{1}{2}\right)\right]}{\sin(\omega/2)}$$





Σχ. 5.6 από βιβλίο Oppenheim-Willsky

5.1. DTFT για Απεριοδικά Σήματα – Παραδείγματα (IV)

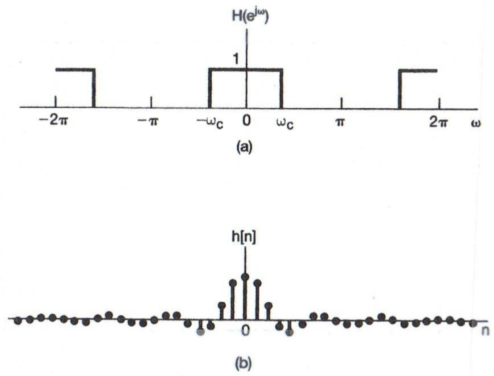
4 $$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

↳ ΣΤΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ $[-\pi, \pi]$

$$h[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{jn}\left[e^{j\omega_c n} - e^{-j\omega_c n}\right]$$

$$= \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$$



Σχ. 5.17 από βιβλίο Oppenheim-Willsky

5.1. DTFT για Απεριοδικά Σήματα – Παραδείγματα (V)

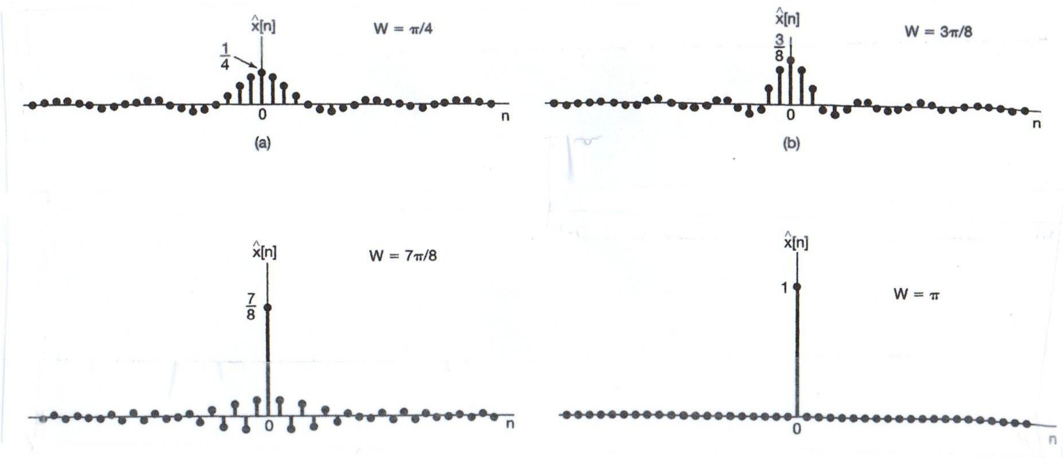
5 $\boxed{x[n] = \delta[n]}$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n} = 1$$

INVERSE:

$$\hat{x}_W[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^{W} e^{j\omega n} d\omega = \frac{\sin Wn}{\pi n} \overset{\text{για } W=\pi}{=} \delta[n]$$

NO GIBBS PHENOMENON



Σχ. 5.7 από βιβλίο Oppenheim-Willsky (μερικό)

5.1. DTFT για Απεριοδικά Σήματα – Σύγκλιση

ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΕΑΝ:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| < \infty \quad \text{ή} \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 < \infty$$

ABSOLUTE SUMMABLE — ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

ΤΟΤΕ:

ΕΣΤΩ $\rightarrow$ $$\hat{x}_W[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^{W} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

$$\hat{x}_\pi[n] = x[n] \quad \text{για} \quad W = \pi$$

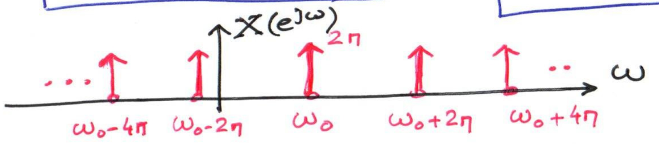
(ΔΕΝ ΕΜΦΑΝΙΖΕΤΑΙ ΤΟ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ Gibbs)

5.2. DTFT για Περιοδικά Σήματα (I)

Ενσωμάτωση <u>ΠΕΡΙΟΔΙΚΩΝ ΣΗΜΑΤΩΝ</u>

στον φορμαλισμό του DTFT.

<u>Έστω</u> $\boxed{x[n] = e^{j\omega_0 n}} \Longrightarrow \boxed{X(e^{j\omega}) = \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} 2\pi\,\delta(\omega-\omega_0-2\pi\ell)}$



<u>Απόδειξη:</u> IDTFT $\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})\,e^{j\omega n}\,d\omega =$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} 2\pi\,\delta(\omega-\omega_0-2\pi\ell)\,e^{j\omega n}\,d\omega$$

$$= \frac{\cancel{2\pi}}{\cancel{2\pi}}\int_0^{2\pi} \delta(\omega-\omega_0)\,e^{j\omega n}\,d\omega = e^{j\omega_0 n}\int_0^{2\pi}\delta(\omega-\omega_0)\,d\omega$$

για $\omega_0 \in [0, 2\pi]$

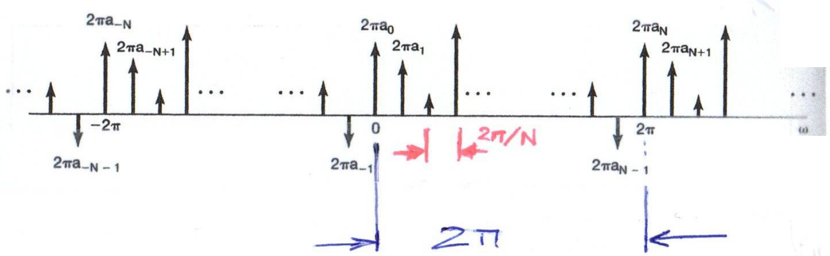
$$= e^{j\omega_0 n}$$

5.2. DTFT για Περιοδικά Σήματα (II)

ΓΕΝΙΚΕΥΟΝΤΑΣ : x[n] ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ με ΠΕΡΙΟΔΟ N

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} \Longleftarrow \text{DFS}$$

$$\Longrightarrow \boxed{X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)}$$



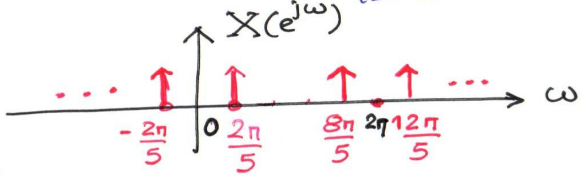
Σχ. 5.9(d) από βιβλίο Oppenheim-Willsky (παραλλαγή)

5.2. DTFT για Περιοδικά Σήματα -- Παραδείγματα

(1) $\boxed{x[n] = \cos\frac{2\pi}{5}n}$ $N=5$, ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ $\Rightarrow$

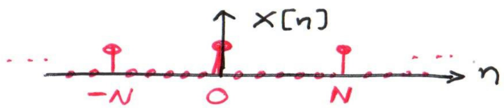
$\hookrightarrow$ DFS $\Rightarrow$ $x[n] = \underbrace{\frac{1}{2}}_{a_1} e^{j\frac{2\pi}{5}n} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{a_{-1}=a_4} e^{-j\frac{2\pi}{5}n}$

$$\Rightarrow X(e^{j\omega}) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \pi\,\delta\left(\omega - \frac{2\pi}{5} - 2\pi l\right) + \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \pi\,\delta\left(\omega + \frac{2\pi}{5} - 2\pi l\right)$$



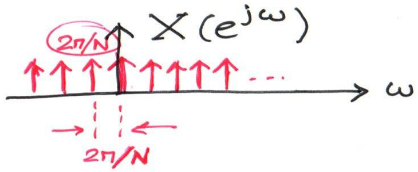
(2) $\boxed{x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n-kN]}$

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΜΕ ΠΕΡΙΟΔΟ N



$\hookrightarrow$ DFS: $a_k = 1/N$, $\forall k$

$$\Rightarrow X(e^{j\omega}) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$$



5.3. Ιδιότητες DTFT (I)

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ :

$$x[n] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega})$$

$$X(e^{j\omega}) = \text{DTFT}\{x[n]\}$$

$$x[n] = \text{IDTFT}\{X(e^{j\omega})\}$$

① ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΤΗΤΑ ΤΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ
PERIODICITY

$$\boxed{X(e^{j(\omega+2\pi)}) = X(e^{j\omega})}$$

② ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑ
LINEARITY

$$x_i[n] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} X_i(e^{j\omega}),\ i=1,2 \Rightarrow \boxed{a x_1[n] + \beta x_2[n] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} a X_1(e^{j\omega}) + \beta X_2(e^{j\omega})}$$

5.3. Ιδιότητες DTFT (II)

3 ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ
SHIFTING

$$x[n] \xleftrightarrow{DTFT} X(e^{j\omega}) \Rightarrow$$

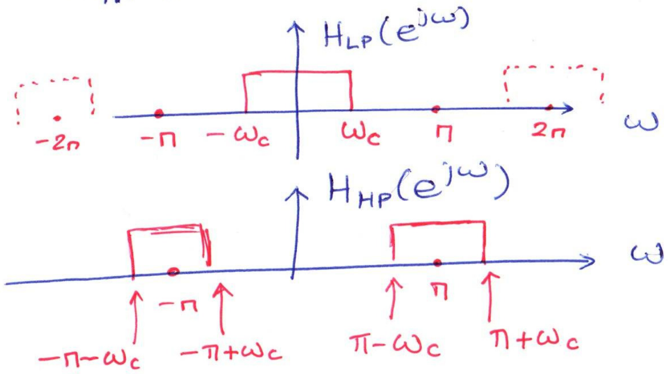
$$\boxed{x[n-n_0] \xleftrightarrow{DTFT} e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega})}$$

$$\boxed{e^{j\omega_0 n}x[n] \xleftrightarrow{DTFT} X(e^{j(\omega-\omega_0)})}$$

- ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

(βαθυπερατό / υψιπερατό φίλτρο)
LOWPASS / HIGHPASS FILTER

$$H_{HP}(e^{j\omega}) = H_{LP}(e^{j(\omega-\pi)})$$



$$h_{HP}[n] = e^{j\pi n}h_{LP}[n]$$
$$= (-1)^n h_{LP}[n]$$

5.3. Ιδιότητες DTFT (III)

4 ΣΥΖΥΓΙΑ / ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ

CONJUGATION / CONJUGATE SYMMETRY

$x[n] \xleftrightarrow{DTFT} X(e^{j\omega}) \Longrightarrow$ $\boxed{x^*[n] \xleftrightarrow{DTFT} X^*(e^{-j\omega})}$

ΓΙΑ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΑ $x[n]$

$x[n] \in \mathbb{R}$

$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$

ΜΕΤΡΟ: ΑΡΤΙΟ, ΦΑΣΗ: ΠΕΡΙΤΤΗ

$x[n] \in \mathbb{R}$ & EVEN

$X(e^{j\omega})$ REAL & EVEN

$x[n] \in \mathbb{R}$ & ODD

$X(e^{j\omega})$ IMAGINARY & ODD

$x[n] \in \mathbb{R}$:

$\mathcal{E}v\{x[n]\} \xleftrightarrow{DTFT} Re\{X(e^{j\omega})\}$

$Od\{x[n]\} \xleftrightarrow{DTFT} j\,Im\{X(e^{j\omega})\}$

5.3. Ιδιότητες DTFT (IV)

5 ΔΙΑΦΟΡΑ / ΑΘΡΟΙΣΗ

DIFFERENCING / ACCUMULATION

$$x[n] - x[n-1] \xleftrightarrow{DTFT} (1-e^{-j\omega})X(e^{j\omega})$$

$$\sum_{m=-\infty}^{n} x[m] \xleftrightarrow{DTFT} \frac{1}{1-e^{-j\omega}}X(e^{j\omega}) + \pi X(e^{j0})\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-2\pi k)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ :

$$g[n] = \delta[n] \xleftrightarrow{DTFT} G(e^{j\omega}) = 1$$

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} g[m] = u[n] \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-e^{-j\omega}}\cancelto{1}{G(e^{j\omega})} + \pi \cancelto{1}{G(e^{j0})}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-2\pi k)$$

$$\boxed{u[n] \xleftrightarrow{DTFT} \frac{1}{1-e^{-j\omega}} + \pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-2\pi k)}$$

5.3. Ιδιότητες DTFT (V)

⑥ ΑΝΑΚΛΑΣΗ (χρονική)
TIME REVERSAL

$$x[-n] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} X(e^{-j\omega})$$

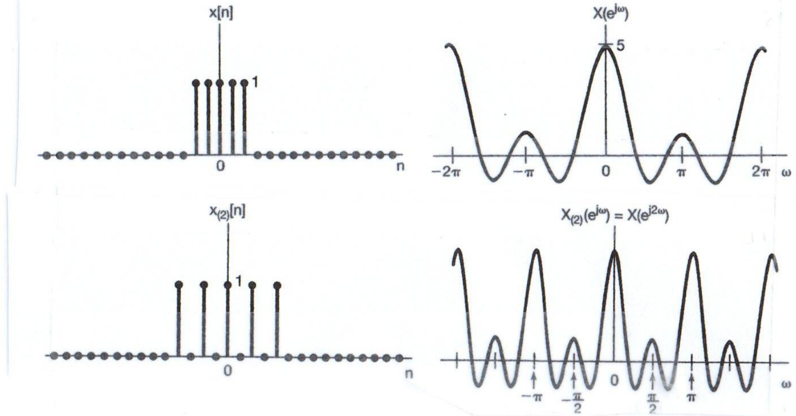
ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

$$y[n] = x[-n] \Rightarrow Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[-n]\, e^{-j\omega n} \overset{m=-n}{=} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\, e^{j\omega m}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\, e^{-j(-\omega)m} = X(e^{-j\omega})$$

⑦ ΧΡΟΝΙΚΗ ΔΙΑΣΤΟΛΗ
TIME EXPANSION

$$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n/k], & \text{αν } n \text{ είναι πολλαπλάσιο του } k \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} X(e^{jk\omega})$$



k=2

Σχ. 5.14 από βιβλίο Oppenheim-Willsky (μερικό)

5.3. Ιδιότητες DTFT (VI)

8 ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΣΤΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ
DIFFERENTIATION IN FREQUENCY

$$n x[n] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n} \overset{d/d\omega}{\Longrightarrow} \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} -jn\, x[n]\, e^{-j\omega n}$$

$$= DTFT\{-jn\,x[n]\}$$

9 ΣΧΕΣΗ PARSEVAL
PARSEVAL'S RELATION

$$\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2}_{\text{ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΣΗΜΑΤΟΣ}} = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

(για απεριοδικά σήματα ενέργειας)

5.4. Ιδιότητα Συνέλιξης DTFT (I)

$$y[n] = x[n] * h[n] \Longrightarrow \boxed{Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})\, H(e^{j\omega})}$$

- Πολύ χρήσιμη για ανάλυση Γ.Χ.Α. συστημάτων...

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ

$$x[n] \longrightarrow \boxed{H(e^{j\omega})} \longrightarrow y[n]$$

Αν υπάρχει, βέβαια...

Για ευσταθή συστήματα, OK!

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < \infty$$

αλλιώς απαιτείται χρήση μετασχηματισμού Z

- ΣΥΝΔΕΣΜΟΛΟΓΙΕΣ Γ.Χ.Α. ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ:

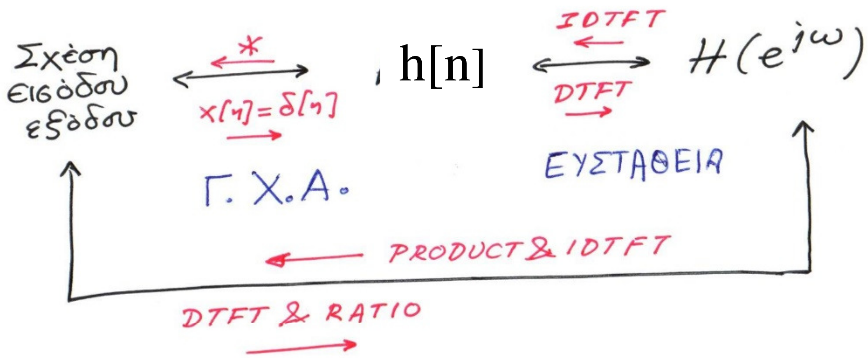
– ΕΝ ΣΕΙΡΑ (CASCADE)

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h_1[n]} \longrightarrow \boxed{h_2[n]} \longrightarrow y[n] \qquad x[n] \longrightarrow \boxed{h_1[n] * h_2[n]} \longrightarrow y[n] \qquad x[n] \longrightarrow \boxed{H_1(e^{j\omega}) H_2(e^{j\omega})} \longrightarrow y[n]$$

– ΕΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩ (PARALLEL)

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h_1[n]},\ \boxed{h_2[n]} \longrightarrow \oplus \longrightarrow y[n] \qquad x[n] \longrightarrow \boxed{h_1[n] + h_2[n]} \longrightarrow y[n] \qquad x[n] \longrightarrow \boxed{H_1(e^{j\omega}) + H_2(e^{j\omega})} \longrightarrow y[n]$$

5.4. Ιδιότητα Συνέλιξης DTFT (II)



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$$\boxed{h[n] = \delta[n-n_0]} \Rightarrow H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_0}$$

$$\Rightarrow Y(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$$

$$\Rightarrow y[n] = x[n-n_0]$$

5.4. Ιδιότητα Συνέλιξης DTFT (ΙΙΙ)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

$$x[n] \rightarrow \boxed{h[n]} \rightarrow y[n]$$

$$\left.\begin{array}{l} h[n] = a^n u[n] \\ x[n] = \beta^n u[n] \end{array}\right\} \Rightarrow y[n] = ?$$

$|a|, |\beta| < 1$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow H(e^{j\omega}) = \dfrac{1}{1 - a e^{-j\omega}} \\ \Rightarrow X(e^{j\omega}) = \dfrac{1}{1 - \beta e^{-j\omega}} \end{array}\right\} \Rightarrow Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - a e^{-j\omega})(1 - \beta e^{-j\omega})}$$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1

$a \neq \beta$

$$\Rightarrow Y(e^{j\omega}) = \frac{A}{1 - a e^{-j\omega}} + \frac{B}{1 - \beta e^{-j\omega}}$$

$\frac{a}{a-\beta}$ $\quad -\frac{\beta}{a-\beta}$

$$\Rightarrow y[n] = \frac{a}{a-\beta} a^n u[n] - \frac{\beta}{a-\beta} \beta^n u[n] = \boxed{\frac{[a^{n+1} - \beta^{n+1}]}{a-\beta} u[n]}$$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2

$a = \beta$

$$\Rightarrow Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - a e^{-j\omega})^2} = a e^{j\omega} \underbrace{j \underbrace{\frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{1 - a e^{-j\omega}} \right)}_{\stackrel{DTFT}{\longleftrightarrow}\; n a^n u[n]}}_{\stackrel{DTFT}{\longleftrightarrow}\; (n+1) a^{n+1} u[n+1]}$$

$$\Rightarrow y[n] = (n+1) a^n u[n+1]$$

$$\boxed{= (n+1) a^n u[n]}$$

5.5. Ιδιότητα Πολλαπλασιασμού DTFT (I)

$$x_1[n]\,x_2[n] \xleftrightarrow{DTFT} \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(e^{j\theta})\,X_2(e^{j(\omega-\theta)})\,d\theta$$

↳ ΠΕΡΙΟΔΙΚΗ ΣΥΝΕΛΙΞΗ

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

$$y[n] = x_1[n]\,x_2[n] \Longrightarrow Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n]\,e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1[n]\,x_2[n]\,e^{-j\omega n}$$

$$\Longrightarrow Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2[n]\Big[\underbrace{\int_{2\pi} X_1(e^{j\theta})\,\frac{e^{j\theta n}}{2\pi}\,d\theta}_{x_1[n]}\Big]\,e^{-j\omega n}$$

$$\Longrightarrow Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(e^{j\theta})\Big[\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2[n]\,e^{-j(\omega-\theta)n}}_{X_2(e^{j(\omega-\theta)})}\Big]\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(e^{j\theta})\,X_2(e^{j(\omega-\theta)})\,d\theta$$

5.5. Ιδιότητα Πολλαπλασιασμού DTFT (II)

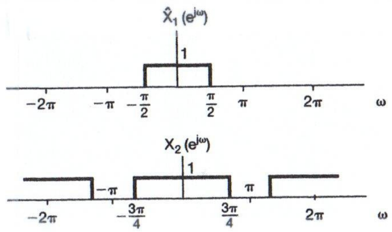
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ :

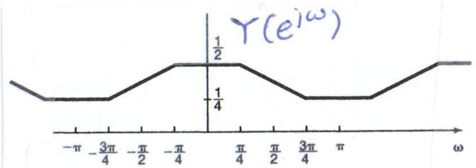
$$y[n] = \frac{\sin\left(\frac{3\pi n}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{(\pi n)^2} = \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{3\pi n}{4}\right)}{\pi n}}_{x_1[n]} \cdot \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\pi n}}_{x_2[n]}$$

$$\Rightarrow Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\theta})\, X_2(e^{j(\omega-\theta)})\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{X}_1(e^{j\theta})\, X_2(e^{j(\omega-\theta)})\, d\theta$$

ONE PERIOD OF $X_1(e^{j\theta})$





Σχ. 5.20 από βιβλίο Oppenheim-Willsky

5.6. Πίνακας Ιδιοτήτων / Ζευγών DTFT

$$a\,x[n] + b\,y[n] \leftrightarrow a\,X(e^{j\omega}) + b\,Y(e^{j\omega})$$

$$x[n-n_o] \leftrightarrow e^{-j\omega n_o}\,X(e^{j\omega})$$

$$e^{j\omega_o n}\,x[n] \leftrightarrow X(e^{j(\omega-\omega_o)})$$

$$x^*[n] \leftrightarrow X^*(e^{-j\omega})$$

$$x[-n] \leftrightarrow X(e^{-j\omega})$$

$$n\,x[n] \leftrightarrow j\,\frac{\mathrm{d}X(e^{j\omega})}{\mathrm{d}\omega}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \leftrightarrow \frac{1}{1-e^{-j\omega}}X(e^{j\omega}) + \pi X(e^{j0})\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-2\pi k)$$

$$x[n] * y[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega})\,Y(e^{j\omega})$$

$$x[n]\,y[n] \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\theta})\,Y(e^{j(\omega-\theta)})\,\mathrm{d}\theta$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}|X(e^{j\omega})|^2\mathrm{d}\omega \quad (\text{απεριοδικά } x[n])$$

$$1 \leftrightarrow 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-2\pi k)$$

$$e^{j\omega_o n} \leftrightarrow 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-\omega_o-2\pi k)$$

$$\cos(\omega_o n) \leftrightarrow \pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}[\delta(\omega-\omega_o-2\pi k)+\delta(\omega+\omega_o-2\pi k)]$$

$$\sin(\omega_o n) \leftrightarrow \frac{\pi}{j}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}[\delta(\omega-\omega_o-2\pi k)-\delta(\omega+\omega_o-2\pi k)]$$

$$\delta[n] \leftrightarrow 1 \qquad \delta[n-n_o] \leftrightarrow e^{-j\omega n_o}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta[n-kN] \leftrightarrow \frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{N}\right)$$

$$u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1-e^{-j\omega}} + \pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-2\pi k)$$

$$a^n u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1-a\,e^{-j\omega}}, \qquad |a|<1$$

$$(n+1)\,a^n u[n] \leftrightarrow \frac{1}{(1-a\,e^{-j\omega})^2}, \qquad |a|<1$$

$$\frac{(n+r-1)!}{n!\,(r-1)!}\,a^n u[n] \leftrightarrow \frac{1}{(1-a\,e^{-j\omega})^r}, \quad |a|<1$$

$$x[n] = \begin{cases}1, & |n|\le N_1\\ 0, & |n|>N_1\end{cases} \leftrightarrow \frac{\sin[\omega(N_1+\frac{1}{2})]}{\sin(\omega/2)}$$

$$\frac{\sin(Wn)}{\pi n} \leftrightarrow X(e^{j\omega}) = \begin{cases}1, & 0\le|\omega|\le W\\ 0, & W<|\omega|\le\pi\end{cases}$$

(για $0<W<\pi$. Το $X(e^{j\omega})$ είναι περιοδικό.)

5.7. Δυικότητα (I)

- Εν αντιθέσει με τον συνεχή μετασχηματισμό Fourier, δεν υπάρχει δυϊκότητα στον DTFT, δηλ. μεταξύ $x[n]$ & $X(e^{j\omega})$

- Ωστόσο, υπάρχει δυϊκότητα μεταξύ
  - Διακριτής σειράς Fourier (ανάλυση/σύνθεση περιοδικών σημάτων)
  - DTFT και συνεχούς σειράς Fourier

	Continuous time		Discrete time	
	Time domain	**Frequency domain**	**Time domain**	**Frequency domain**
Fourier Series	$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$ continuous time periodic in time	$a_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}$ discrete frequency aperiodic in frequency	$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$ discrete time periodic in time	duality $a_k = \frac{1}{N}\sum_{k=\langle N\rangle} x[n]e^{-jk(2\pi/N)n}$ discrete frequency periodic in frequency
Fourier Transform	$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$ continuous time aperiodic in time	duality $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$ continuous frequency aperiodic in frequency	duality $x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$ discrete time aperiodic in time	$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$ continuous frequency periodic in frequency

Πίνακας 5.3 από βιβλίο Oppenheim-Willsky

5.7. Δυικότητα (ΙΙ)

- Υπενθυμίζουμε (DFS):

$$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$, για $x[n]$ περιοδικά με περίοδο N

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$ ← επίσης περιοδικά με περίοδο N

Εύκολο να δούμε πως:

$$x[n] \overset{DFS}{\longleftrightarrow} a_k$$

$$a_k \overset{DFS}{\longleftrightarrow} \frac{1}{N}x[-n]$$

- Υπενθυμίζουμε:

DTFT

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ 2π

CFS

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ $2\pi/\omega_0$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{T} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Συνάρτηση του ω → $CFS = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk1\omega}$, $a_k = x[-k]$

5.8. Ανάλυση Γ.Χ.Α. Συστημάτων Περιγραφόμενων με Εξισώσεις Διαφορών

ΕΞΙΣΩΣΗ ΔΙΑΦΟΡΩΝ Γ.Χ.Α. ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]}$$

→ ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ Γ.Χ.Α. ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ $\boxed{H(e^{j\omega}) = ?}$

→ $DTFT\{LHS\} = DTFT\{RHS\}$

ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΣ + ΧΡΟΝΙΚΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ →

$$\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\omega} Y(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\omega} X(e^{j\omega})$$

$$\Rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\omega}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\omega}}$$

ΡΗΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ $e^{-j\omega}$

5.8. Γ.Χ.Α. Συστήματα με Εξ. Διαφορών – Παραδείγματα (Ι)

1. ΑΙΤΙΑΤΟ Γ.Χ.Α. ΣΥΣΤΗΜΑ
ΜΕ ΕΞΙΣΩΣΗ ΔΙΑΦΟΡΩΝ

$$y[n] - a\,y[n-1] = x[n] \quad , \; |a| < 1$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - a e^{-j\omega}} \Longrightarrow \boxed{h[n] = a^n u[n]}$$

2. ΑΙΤΙΑΤΟ Γ.Χ.Α. ΣΥΣΤΗΜΑ
ΜΕ ΕΞΙΣΩΣΗ ΔΙΑΦΟΡΩΝ

$$y[n] - \frac{3}{4} y[n-1] + \frac{1}{8} y[n-2] = 2x[n]$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{2}{1 - \frac{3}{4} e^{-j\omega} + \frac{1}{8} e^{-j2\omega}}$$

$$= \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega}\right)\left(1 - \frac{1}{4} e^{-j\omega}\right)}$$

$$= \frac{4}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega}} - \frac{2}{1 - \frac{1}{4} e^{-j\omega}} \Longrightarrow \boxed{h[n] = \left[4\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{4}\right)^n\right] u[n]}$$

5.8. Γ.Χ.Α. Συστήματα με Εξ. Διαφορών – Παραδείγματα (ΙΙ)

3 ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΟ ΣΥΣΤΗΜΑ (2) $\Longrightarrow y[n] = ?$

$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) =$$

$$= \frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

$$= \frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)^2} =$$

$$= -\frac{4}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}} - \frac{2}{\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)^2} + \frac{8}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{y[n] = \left\{-4\left(\frac{1}{4}\right)^n - 2(n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^n + 8\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} u[n]}$$

A.2. Ανάλυση Ρητής Συνάρτησης σε Μερικά Κλάσματα

Έστω:

$$G(u) = \frac{\beta_{n-1} u^{n-1} + \dots + \beta_1 u + \beta_0}{a_n u^n + \dots + a_1 u + a_0}$$

ΓΙΑ DTFT: $u = e^{-j\omega}$

διαιρούμε με a_0 $\Longrightarrow$

$$G(u) = \frac{d_{n-1} u^{n-1} + \dots + d_1 u + d_0}{f_n u^n + \dots + f_1 u + 1}$$

$(d_i = \beta_i / a_0)$

$(f_i = a_i / a_0)$

ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ $\Longrightarrow$ ΠΑΡΟΝΟΜΑΣΤΗ

$$G(u) = \frac{d_{n-1} u^{n-1} + \dots + d_1 u + d_0}{(1 - \rho_1^{-1} u)^{\sigma_1} (1 - \rho_2^{-1} u)^{\sigma_2} \dots (1 - \rho_r^{-1} u)^{\sigma_r}}$$

ΡΙΖΕΣ: $\boxed{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_r}$

ΠΟΛ/ΤΗΤΕΣ: $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$

$\Longrightarrow$ ΜΕΡΙΚΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

$$G(u) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{\sigma_i} \frac{B_{ik}}{(1 - \rho_i^{-1} u)^{k}}$$

ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΕΣ

ΡΙΖΕΣ ρ_i

ΟΠΟΥ:

$$\boxed{B_{ik} = \frac{1}{(\sigma_i - k)!} (-\rho_i)^{\sigma_i - k} \left[\frac{d^{\sigma_i - k}}{du^{\sigma_i - k}} \left[(1 - \rho_i^{-1} u)^{\sigma_i} G(u) \right] \right] \Bigg|_{u = \rho_i}}$$

A.2. Ανάλυση Ρητής Συνάρτησης – Παραδείγματα (Ι)

1 ΑΙΤΙΑΤΟ Γ.Χ.Α. ΣΥΣΤΗΜΑ	$y[n] - \frac{3}{4} y[n-1] + \frac{1}{8} y[n-2] = 2x[n]$

$$\Rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{2}{1 - \frac{3}{4} e^{-j\omega} + \frac{1}{8} e^{-2j\omega}}$$

$$\xRightarrow{\upsilon = e^{-j\omega}} G(\upsilon) = \frac{2}{1 - \frac{3}{4}\upsilon + \frac{1}{8}\upsilon^2} = \frac{2}{(1-\frac{1}{2}\upsilon)(1-\frac{1}{4}\upsilon)} = \frac{B_{11}}{1-\frac{1}{2}\upsilon} + \frac{B_{21}}{1-\frac{1}{4}\upsilon}$$

ΡΙΖΕΣ: 2, 4

$$B_{11} = (1-\tfrac{1}{2}\upsilon)G(\upsilon)\Big|_{\upsilon=2} = \frac{2}{1-\frac{1}{4}\upsilon}\Big|_{\upsilon=2} = \frac{2}{1-\frac{1}{2}} = 4$$

$$B_{21} = (1-\tfrac{1}{4}\upsilon)G(\upsilon)\Big|_{\upsilon=4} = \frac{2}{1-\frac{1}{2}\upsilon}\Big|_{\upsilon=4} = \frac{2}{1-2} = -2$$

$$\xRightarrow{\upsilon = e^{-j\omega}} H(e^{j\omega}) = \frac{4}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} - \frac{2}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}} \xRightarrow[\text{IDTFT}]{} \boxed{h[n] = 4\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n] - 2\left(\tfrac{1}{4}\right)^n u[n]}$$

Α.2. Ανάλυση Ρητής Συνάρτησης – Παραδείγματα (ΙΙ)

2 ΕΙΣΟΔΟΣ ΣΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΤΟΥ ΠΑΡ. 1 $\quad x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \Longrightarrow y[n] = ?$

Απο το προηγούμενο παράδειγμα: $$H(e^{j\omega}) = \frac{2}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})}$$

$$x[n] = \left(\tfrac{1}{4}\right)^n u[n] \Longrightarrow X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ $\Longrightarrow$ $$Y(e^{j\omega}) = \frac{2}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})^2}$$

$v = e^{-j\omega} \Longrightarrow$ $$G(v) = \frac{2}{(1-\frac{1}{2}v)(1-\frac{1}{4}v)^2} = \frac{B_{11}}{1-\frac{1}{2}v} + \frac{B_{21}}{1-\frac{1}{4}v} + \frac{B_{22}}{(1-\frac{1}{4}v)^2}$$

ΡΙΖΕΣ: 2, ΑΠΛΗ; 4, ΔΙΠΛΗ

$$B_{11} = (1-\tfrac{1}{2}v)G(v)\Big|_{v=2} = \frac{2}{(1-\frac{1}{4}v)^2}\Big|_{v=2} = \frac{2}{(1/2)^2} = 8$$

$$B_{21} = (-4)\left[\frac{d}{dv}\left((1-\tfrac{1}{4}v)^2 G(v)\right)\right]\Big|_{v=4} = -4 \cdot \frac{1}{(1-\frac{1}{2}v)^2}\Big|_{v=4} = -4$$

$$B_{22} = (1-\tfrac{1}{4}v)^2 G(v)\Big|_{v=4} = \frac{2}{1-\frac{1}{2}v}\Big|_{v=4} = -2$$

A.2. Ανάλυση Ρητής Συνάρτησης – Παραδείγματα (III)

$v = e^{-j\omega}$ $\Longrightarrow$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{8}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} - \frac{4}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}} - \frac{2}{\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)^2}$$

$\xRightarrow{\text{IDTFT}}$

$$\boxed{y[n] = \left\{8\left(\frac{1}{2}\right)^n - 4\left(\frac{1}{4}\right)^n - 2(n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}u[n]}$$

Α.2. Ανάλυση Ρητής Συνάρτησης – Παραδείγματα (IV)

3 ΑΙΤΙΑΤΟ Γ.Χ.Α. ΣΥΣΤΗΜΑ

$$y[n]+\frac{5}{6}y[n-1]+\frac{1}{6}y[n-2]=x[n]+3x[n-1]+\frac{11}{6}x[n-2]+\frac{1}{3}x[n-3]$$

$$\Longrightarrow H(e^{j\omega})=\frac{1+3e^{-j\omega}+(11/6)e^{-j2\omega}+(1/3)e^{-j3\omega}}{1+(5/6)e^{-j\omega}+(1/6)e^{-j2\omega}}$$

$$\overset{\upsilon=e^{-j\omega}}{\Longrightarrow} G(\upsilon)=\frac{1+3\upsilon+(11/6)\upsilon^2+(1/3)\upsilon^3}{1+(5/6)\upsilon+(1/6)\upsilon^2}=C_0+C_1\upsilon+\frac{b_1\upsilon+b_0}{1+\frac{5}{6}\upsilon+\frac{1}{6}\upsilon^2}$$

Κάνοντας πράξεις ...

$$1+3\upsilon+\frac{11}{6}\upsilon^2+\frac{1}{3}\upsilon^3=(C_0+b_0)+\left(\frac{5}{6}C_0+C_1+b_1\right)\upsilon+\left(\frac{1}{6}C_0+\frac{5}{6}C_1\right)\upsilon^2+\left(\frac{1}{6}C_1\right)\upsilon^3$$

$$\Longrightarrow C_1=2,\quad C_0=1,\quad b_1=1/6,\quad b_0=0$$

Άρα: $$G(\upsilon)=1+2\upsilon+\frac{\frac{1}{6}\upsilon}{1+\frac{5}{6}\upsilon+\frac{1}{6}\upsilon^2}=1+2\upsilon+\underbrace{\frac{\frac{1}{6}\upsilon}{(1+\frac{1}{3}\upsilon)(1+\frac{1}{2}\upsilon)}}_{\frac{1}{1+\frac{1}{3}\upsilon}-\frac{1}{1+\frac{1}{2}\upsilon}}$$

$$\overset{\upsilon=e^{-j\omega}}{\Longrightarrow} H(e^{j\omega})=1+2e^{-j\omega}+\frac{1}{1+\frac{1}{3}e^{-j\omega}}-\frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

$$\overset{\text{IDTFT}}{\Longrightarrow} \boxed{h[n]=\delta[n]+2\delta[n-1]+\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^n-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]u[n]}$$