ΘΕΩΡΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Γεράσιμος Ποταμιάνος

Αναπλ. Καθηγητής,
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

http://www.inf.uth.gr/~gpotamianos

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

ΘΕΩΡΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

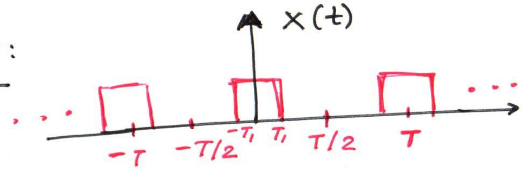
Ενότητα 4: *ΣΥΝΕΧΗΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER*

4.0. Εισαγωγή

- Μάθαμε για την αναπαράσταση **περιοδικών** σημάτων σε **σειρές Fourier**.
- Επίσης, πώς αυτή η αναπαράσταση είναι χρήσιμη όταν **περιοδικά** σήματα εφαρμόζονται σε **Γ.Χ.Α.** συστήματα.
- Στο κεφάλαιο αυτό θα επεκτείνουμε τα παραπάνω και για **μη-περιοδικά** σήματα (πεπερασμένης ενέργειας), στον **συνεχή χρόνο**.
  - ✓ Δημιουργείται έτσι μία «συνέχεια» αρμονικών στο πεδίο της συχνότητας.
  - ✓ Το άθροισμα (σειρά) Fourier γίνεται ολοκλήρωμα.
  - ✓ Καταλήγουμε έτσι στον μετασχηματισμό Fourier.
  - ✓ Επεκτείνουμε τον φορμαλισμό αυτό για να περιγράφει και τα περιοδικά σήματα.
- Δίνουμε μεγάλη σημασία στις **ιδιότητες** μετασχηματισμού Fourier.
  - ✓ Π.χ., Δυικότητα, συνέλιξη, γινόμενο.
- Εφαρμογή σε Γ.Χ.Α. συστήματα που περιγράφονται με **διαφορικές εξισώσεις**.

4.1. Μ/Σ Fourier για απεριοδικά σήματα συνεχούς χρόνου – Ανάπτυξη (I)

Παράδειγμα:



$$x(t)=\begin{cases}1, & |t|<T_1\\ 0, & T_1<|t|<T/2\end{cases}$$

(επανάληψη κάθε T)

Σειρά Fourier με

$$a_k = \frac{2\sin(k\Omega_0 T_1)}{k\Omega_0 T}$$

$2\pi/T$

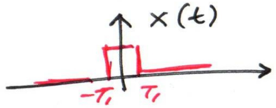
Εναλλακτικά:

$$Ta_k = \left.\frac{2\sin(\Omega T_1)}{\Omega}\right|_{\Omega=k\Omega_0}$$

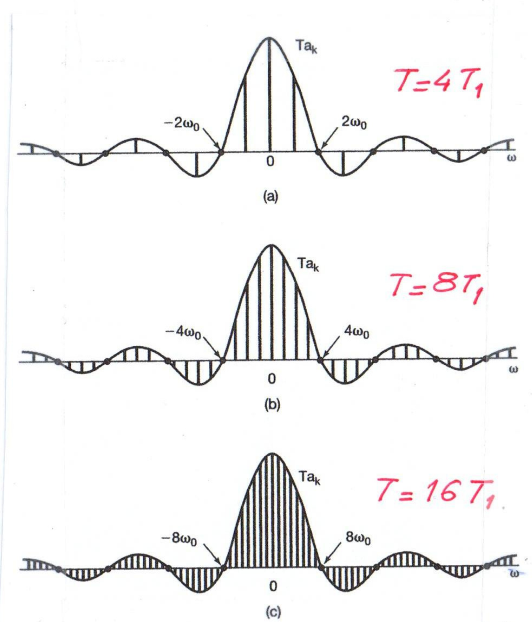
ENVELOPE FUNCTION ("φάκελος")

$T\uparrow \Rightarrow$ φάκελος δειγματοληπτείται πιο συχνά

$T\to\infty \Rightarrow$



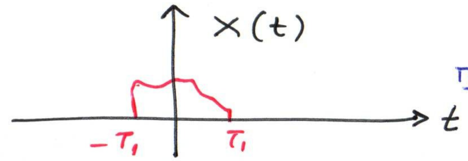
συνεχές φάσμα



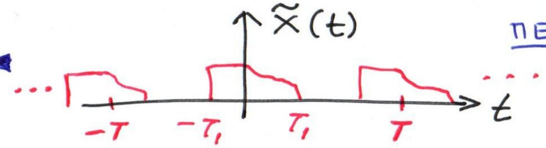
Σχ. 4.2 από βιβλίο Oppenheim-Willsky

4.1. Μ/Σ Fourier – Ανάπτυξη (ΙΙ)

Αρχικό σήμα $x(t)$



ΜΗ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ



ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ

ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΕ ΣΕΙΡΑ FOURIER

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\Omega_0 t} \quad (1)$$

$// \tilde{x}(t)$ in $[-T/2, T/2]$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, e^{-jk\Omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-jk\Omega_0 t} \Rightarrow$$

ΟΡΙΖΟΥΜΕ:

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\Omega t}\, dt$$

$$\Rightarrow a_k = \frac{1}{T} X(jk\Omega_0) \quad (2)$$

$$(1),(2) \rightarrow \tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} X(jk\Omega_0)\, e^{jk\Omega_0 t} = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(jk\Omega_0)\, e^{jk\Omega_0 t}\,\Omega_0$$

$$T \leftrightarrow 2\pi/\Omega_0$$

$$T \to \infty \Leftrightarrow \Omega_0 \to 0, \quad \tilde{x}(t) \to x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\Omega)\, e^{j\Omega t}\, d\Omega$$

4.1. Μ/Σ Fourier – Ανάπτυξη (ΙΙΙ)

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\Omega)e^{j\Omega t}\,d\Omega}$$

ΣΥΝΘΕΣΗ
ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ Μ/Σ FOURIER

$$\boxed{X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,e^{-j\Omega t}\,dt}$$

ΑΝΑΛΥΣΗ
Μ/Σ FOURIER

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(j\Omega)\}$$

$$X(j\Omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$$

φάσμα / πυκνότητα φάσματος
"SPECTRUM"

$$\boxed{x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(j\Omega)}$$

• Για το περιοδικό $\tilde{x}(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(t-mT)$

$$a_k = \frac{1}{T} X(j\Omega)\Big|_{\Omega = k\Omega_0 = k\frac{2\pi}{T}}$$

→ ΔΕΙΓΜΑΤΑ ΤΟΥ ΦΑΣΜΑΤΟΣ

4.1. Μ/Σ Fourier – Σύγκλιση

ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΑΝ ΤΟ ΣΗΜΑ ΕΧΕΙ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$$

ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΑ (ΣΥΝΘΗΚΕΣ DIRICHLET):

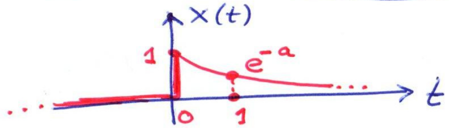
- ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΙΜΟ ΚΑΤΑ ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty$
- ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ ΜΕΓΙΣΤΩΝ / ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΣΕ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ
- ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ ΑΣΥΝΕΧΕΙΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟΥ ΜΕΓΕΘΟΥΣ ΣΕ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ

ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ GIBBS ...

- ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΔΕΝ ΣΗΜΑΙΝΕΙ $x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{x(t)\}\}, \forall t$

4.1. Μ/Σ Fourier – Παραδείγματα (Ι)

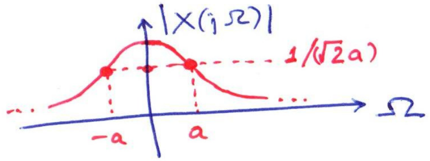
$$\boxed{x(t) = e^{-at}u(t)}, \quad a > 0 \quad [\,Re\{a\} > 0\,]$$

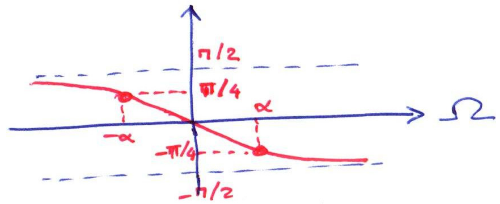


$a>0$

$$X(j\Omega) = \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-j\Omega t}\,dt = -\frac{1}{a+j\Omega} e^{-(a+j\Omega)t}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a+j\Omega}$$

$$|X(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2+\Omega^2}}, \quad \measuredangle X(j\Omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\Omega}{a}\right)$$

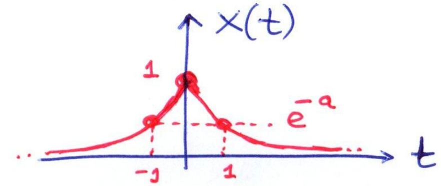




$$X(j\Omega) = \frac{1}{\alpha + j\Omega} \quad \text{και για } \alpha \in \mathbb{Z}: \; Re\{a\} > 0$$

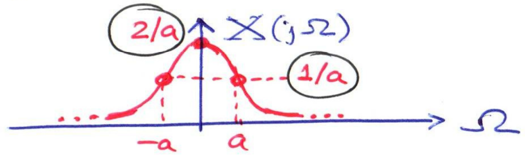
4.1. Μ/Σ Fourier – Παραδείγματα (ΙΙ)

$$\boxed{x(t) = e^{-a|t|}, \quad a > 0}$$



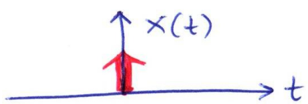
$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{0} e^{at} e^{-j\Omega t}\, dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-at} e^{-j\Omega t}\, dt$$

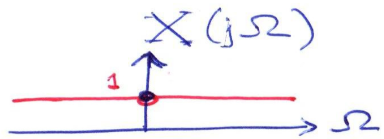
$$\underset{a>0}{=} \frac{1}{a - j\Omega} + \frac{1}{a + j\Omega} = \frac{2a}{a^2 + \Omega^2}$$



$$\boxed{x(t) = \delta(t)}$$

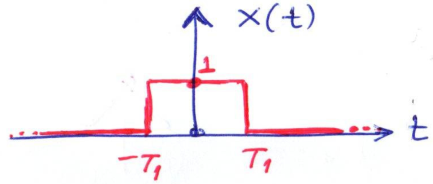
$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j\Omega t}\, dt = 1$$





4.1. Μ/Σ Fourier – Παραδείγματα (ΙΙΙ)

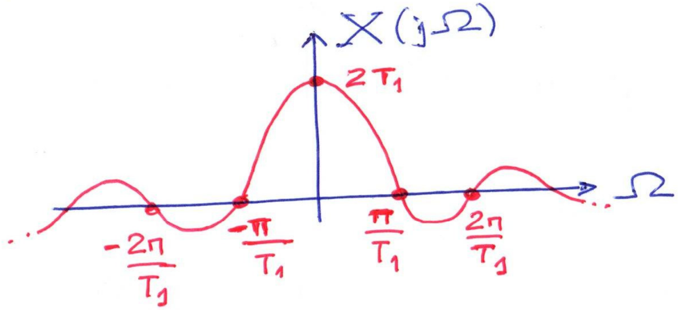
$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases}$$



$$X(j\Omega) = \int_{-T_1}^{T_1} e^{-j\Omega t}\,dt = -\frac{1}{j\Omega}\, e^{-j\Omega t}\Big|_{-T_1}^{T_1} =$$

$$= \frac{2}{\Omega}\,\frac{1}{2j}\left(e^{j\Omega T_1} - e^{-j\Omega T_1}\right) = \frac{2\sin(\Omega T_1)}{\Omega}$$

sinc function $\rightsquigarrow$

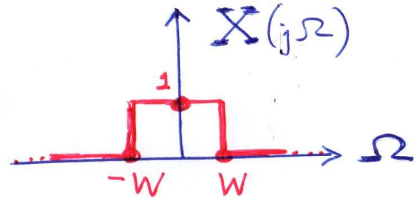


$$\mathrm{sinc}(\theta) = \frac{\sin \pi\theta}{\pi\theta}$$

Άρα: $X(j\Omega) = 2T_1\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\Omega T_1}{\pi}\right)$

4.1. Μ/Σ Fourier – Παραδείγματα (IV)

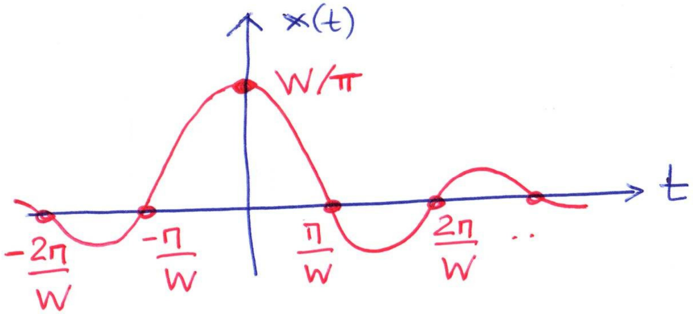
$$\boxed{X(j\Omega) = \begin{cases} 1 \,, & |\Omega| < W \\ 0 \,, & |\Omega| > 0 \end{cases}}$$



$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{+W} e^{j\Omega t}\, d\Omega = \frac{1}{2jt\pi} e^{j\Omega t}\Big|_{-W}^{W}$$

$$= \frac{1}{\pi t}\frac{1}{2j}\left(e^{jWt} - e^{-jWt}\right) = \frac{\sin(Wt)}{\pi t}$$

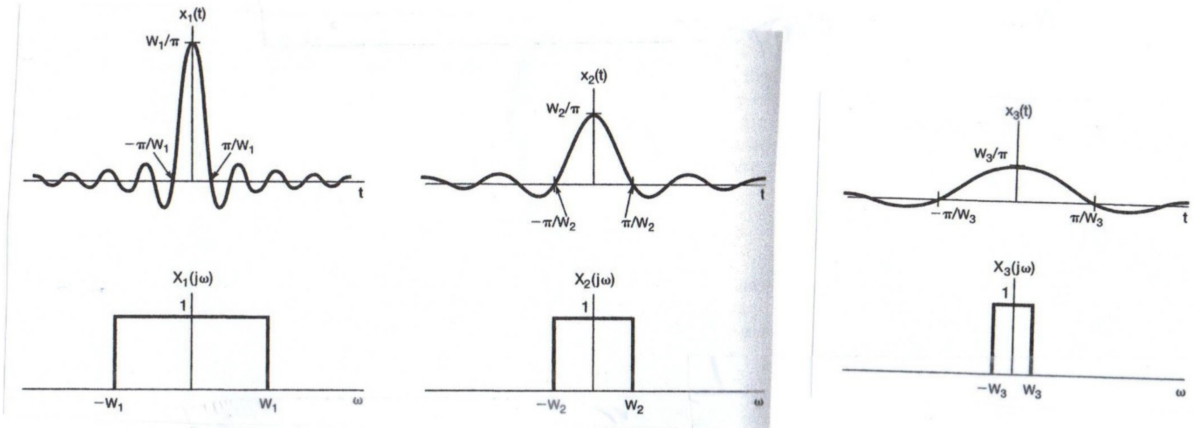
$$= \frac{W}{\pi}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{Wt}{\pi}\right)$$



DUALITY !

4.1. Μ/Σ Fourier – Παραδείγματα (V)

Ενδιαφέρον να παρακολουθήσουμε /κατανοήσουμε σχέση χρόνου /συχνότητας ....



Σχ. 4.11 από βιβλίο Oppenheim-Willsky

$W_1 > W_2 > W_3$

4.2. Μ/Σ Fourier Περιοδικών Σημάτων (Ι)

- Θα θέλαμε να έχουμε το ίδιο πλαίσιο (Μ/Σ FOURIER) και για τα περιοδικά σήματα...

- Έστω: $X(j\Omega) = 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0)$ (ΚΡΟΥΣΤΙΚΗ ΣΤΟ Ω_0 ΠΟΛ/ΣΜΕΝΗ ΜΕ 2π)

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0)\, e^{j\Omega t}\, d\Omega = e^{j\Omega_0 t}$$

- Γενικότερα:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\Omega_0 t} \quad \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}$$

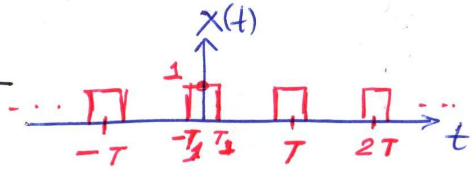
$$\boxed{X(j\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k\, \delta(\Omega - k\Omega_0)}$$

Απευθείας από σειρά FOURIER

4.2. Μ/Σ Fourier Περιοδικών Σημάτων (II)

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & T_1 < |t| < T/2 \end{cases}$$

→ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΚΑΘΕ T



F.S. (Fourier Series)

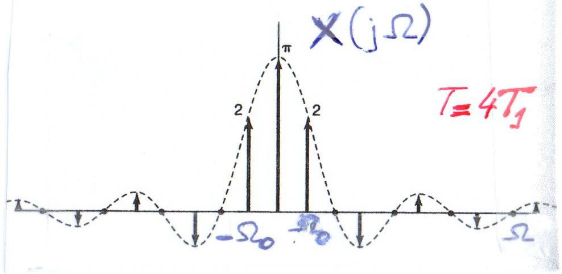
$2\pi/T$

$$a_k = \frac{\sin(k\Omega_0 T_1)}{k\pi}$$

C.F.T. (Continuous Fourier Trasform)

$$X(j\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2\sin(k\Omega_0 T_1)}{k} \cdot \delta(\Omega - \Omega_0 k)$$

$2\pi a_k$



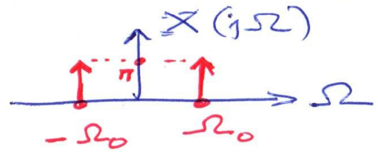
Σχ. 4.12 από βιβλίο Oppenheim-Willsky

4.2. Μ/Σ Fourier Περιοδικών Σημάτων (ΙΙΙ)

$$\boxed{x(t) = \cos(\Omega_0 t)}$$

F.S.: $a_1 = a_{-1} = 1/2$, $a_k = 0$, $k \neq \pm 1$

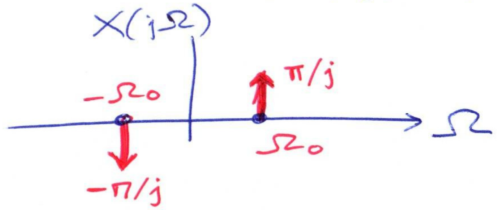
C.F.T.: $X(j\Omega) = \pi\left[\delta(\Omega - \Omega_0) + \delta(\Omega + \Omega_0)\right]$



$$\boxed{x(t) = \sin(\Omega_0 t)}$$

F.S.: $a_1 = \dfrac{1}{2j}$, $a_{-1} = -\dfrac{1}{2j}$, $a_k = 0$, $k \neq \pm 1$

C.F.T.: $X(j\Omega) = \dfrac{\pi}{j}\left[\delta(\Omega - \Omega_0) - \delta(\Omega + \Omega_0)\right]$



4.2. Μ/Σ Fourier Περιοδικών Σημάτων (IV)

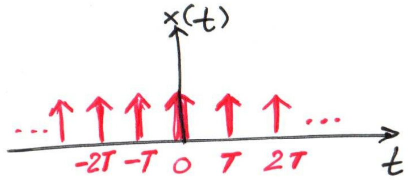
$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)}$$

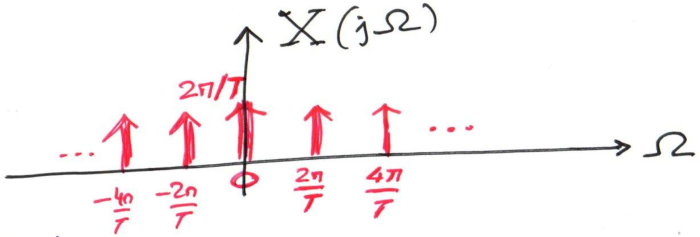
IMPULSE TRAIN

→ F.S: $a_k = \frac{1}{T}, \quad \forall k$

→ C.F.T: $X(j\Omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\Omega - k\frac{2\pi}{T}\right)$

$\frac{2\pi}{T} \to \Omega_0$





$T\uparrow \Rightarrow \frac{2\pi}{T}\downarrow$

4.3. Ιδιότητες Μ/Σ Fourier (I)

Συμβολισμός: $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\Omega)$

πχ $e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \dfrac{1}{a+j\Omega}$ [Re{a}>0]

ΙΔΙΟΤΗΤΑ 1 : Γραμμικότητα / Linearity

$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\Omega)$

$y(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y(j\Omega)$

$\Longrightarrow$ $\boxed{ax(t) + \beta y(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} aX(j\Omega) + \beta Y(j\Omega)}$

4.3. Ιδιότητες Μ/Σ Fourier (II)

ΙΔΙΟΤΗΤΑ 2: Χρονική Μετατόπιση / Time Shift

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\Omega) \Longrightarrow \boxed{x(t-t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\Omega t_0} X(j\Omega)}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow x(t-t_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\Omega) e^{j\Omega(t-t_0)} d\Omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\left(X(j\Omega) e^{-j\Omega t_0}\right)}_{\text{Μ/Σ Fourier}} e^{j\Omega t} d\Omega$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Το μέτρο/πλάτος δεν αλλάζει

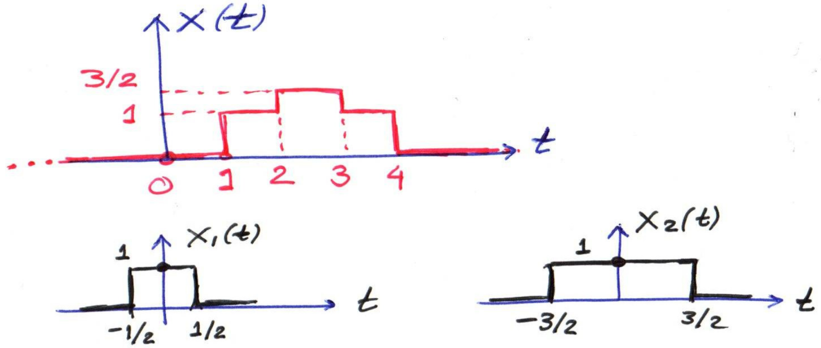
$$\mathcal{F}\{x(t-t_0)\} = |X(j\Omega)| e^{j(\angle X(j\Omega) - \Omega t_0)}$$

Η φάση αλλάζει

Το πλάτος του Μ/Σ Fourier δεν αλλάζει με χρονική μετατόπιση!

4.3. Ιδιότητες Μ/Σ Fourier (III)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:



$$\left.\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2}\cdot x_1(t-2.5) + x_2(t-2.5) \\ x_1(t) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{2\sin(\Omega/2)}{\Omega} \\ x_2(t) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{2\sin(3\Omega/2)}{\Omega} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow X(j\Omega) = e^{-j\frac{5\Omega}{2}}\left\{\frac{\sin(\Omega/2) + 2\sin(3\Omega/2)}{\Omega}\right\}$$

4.3. Ιδιότητες Μ/Σ Fourier (IV)

ΙΔΙΟΤΗΤΑ 3 : ΣΥΖΥΓΙΑ / ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ / CONJUGATION {CONJUGATE SYMMETRY}

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\Omega) \Rightarrow \boxed{x^*(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X^*(-j\Omega)}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ :

$$X^*(j\Omega) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt\right]^* = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) e^{j\Omega t} dt$$

$$\xRightarrow{\Omega \to -\Omega} X^*(-j\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) e^{-j\Omega t} dt = \mathcal{F}\{x^*(t)\}$$

ΕΠΙΠΛΕΟΝ :

$x(t)$ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟ ΣΗΜΑ $\Rightarrow \boxed{X(-j\Omega) = X^*(j\Omega)}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ :

$$x(t) = e^{-at}u(t), \quad a>0 \Rightarrow X(j\Omega) = \frac{1}{a+j\Omega} \Rightarrow X(-j\Omega) = \frac{1}{a-j\Omega} = X^*(j\Omega)$$

4.3. Ιδιότητες M/Σ Fourier (V)

ΕΠΙΠΛΕΟΝ:

$$x(t) \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} \underbrace{\mathrm{Re}\{X(j\Omega)\} = \mathrm{Re}\{X(-j\Omega)\}}_{\text{ΑΡΤΙΟ}} \\ \underbrace{\mathrm{Im}\{X(j\Omega)\} = -\mathrm{Im}\{X(-j\Omega)\}}_{\text{ΠΕΡΙΤΤΟ}} \\ \underbrace{|X(j\Omega)| = |X(-j\Omega)|}_{\text{ΑΡΤΙΟ}} \\ \underbrace{\sphericalangle X(j\Omega) = -\sphericalangle X(-j\Omega)}_{\text{ΠΕΡΙΤΤΟ}} \end{cases}$$

$x(t) \in \mathbb{R}$ and EVEN (ΑΡΤΙΟ) $\Rightarrow$ $X(j\Omega) \in \mathbb{R}$ and EVEN

i.e. $X(j\Omega) = X(-j\Omega)$
$= X^*(j\Omega)$

$x(t) \in \mathbb{R}$ and ODD [ΠΕΡΙΤΤΟ] $\Rightarrow$ $X(j\Omega)$ imaginary and odd

4.3. Ιδιότητες Μ/Σ Fourier (VI)

ΕΠΙΠΛΕΟΝ :

$$x(t) \text{ REAL } \xrightarrow{\mathcal{F}} X(j\Omega)$$

$$= x_e(t) + x_o(t)$$

$$x_e(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \mathrm{Re}\{X(j\Omega)\} \qquad x_o(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} j\,\mathrm{Im}\{X(j\Omega)\}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ :

$$x(t) = e^{-a|t|}, \quad a>0$$

$$= 2\,\mathcal{E}v\{e^{-at}u(t)\} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 2\,\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{a+j\Omega}\right\} = \frac{2a}{a^2+\Omega^2}$$

$$e^{-at}u(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{a+j\Omega}$$

γιατί: $e^{-a|t|} = e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t)$

$$= 2\left[\frac{e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t)}{2}\right]$$

4.3. Ιδιότητες Μ/Σ Fourier (VII)

ΙΔΙΟΤΗΤΑ 4 : ΔΙΑΦΟΡΙΣΗ / DIFFERENTIATION
ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ / INTEGRATION

$$x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(j\Omega) \Longrightarrow \boxed{\frac{dx(t)}{dt} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} j\Omega X(j\Omega)}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ :

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{j\Omega X(j\Omega)}_{\mathcal{F}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\}} e^{j\Omega t} d\Omega$$

ΠΟΛΥ ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ Γ.Χ.Α. ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΠΟΥ ΠΕΡΙΓΡΑΦΟΝΤΑΙ ΜΕ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΕΙΣΟΔΟΥ/ΕΞΟΔΟΥ

ΕΠΙΠΛΕΟΝ:

$$x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(j\Omega) \Longrightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{j\Omega}X(j\Omega) + \pi X(0)\delta(\Omega)}$$

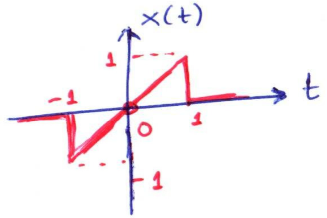
"DC VALUE"

4.3. Ιδιότητες Μ/Σ Fourier (VIII)

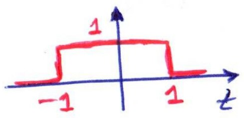
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ :

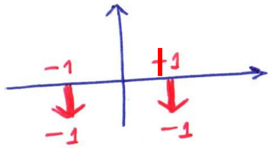
- $x(t) = u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau \Rightarrow \boxed{X(j\Omega) = \frac{1}{j\Omega} + \pi\delta(\Omega)}$

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j\Omega\left[\frac{1}{j\Omega} + \pi\delta(\Omega)\right] = 1$$

- 

$\rightsquigarrow X(j\Omega) = ?$

$g(t) = \frac{dx(t)}{dt} =$ 

$+$ 

$$\xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{2\sin\Omega}{\Omega} - e^{j\Omega} - e^{-j\Omega} = G(j\Omega)$$

$$\Rightarrow X(j\Omega) = \frac{2\sin\Omega}{j\Omega^2} - \frac{2\cos\Omega}{j\Omega} + \pi\,\cancel{G(0)}^{\,0}\,\delta(\Omega)$$

4.3. Ιδιότητες M/Σ Fourier (IX)

ΙΔΙΟΤΗΤΑ 5 : ΧΡΟΝΙΚΗ ΚΑΙ ΣΥΧΝΟΤΙΚΗ ΚΛΙΜΑΚΩΣΗ / TIME AND FREQUENCY SCALING

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\Omega) \Rightarrow \boxed{x(at) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|a|} X\left(j\frac{\Omega}{a}\right)}$$

a: ΜΗ ΜΗΔΕΝΙΚΟΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΣ

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

$$\mathcal{F}\{x(at)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(at) e^{-j\Omega t} dt =$$

$\tau = at$

$$\overset{\tau=at}{=} \begin{cases} \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j\frac{\Omega}{a}\tau} d\tau \\ -\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j\frac{\Omega}{a}\tau} d\tau \end{cases} = \frac{1}{|a|} X\left(j\frac{\Omega}{a}\right)$$

ΕΙΔΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ:

$a = -1 \rightsquigarrow x(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(-j\Omega)$

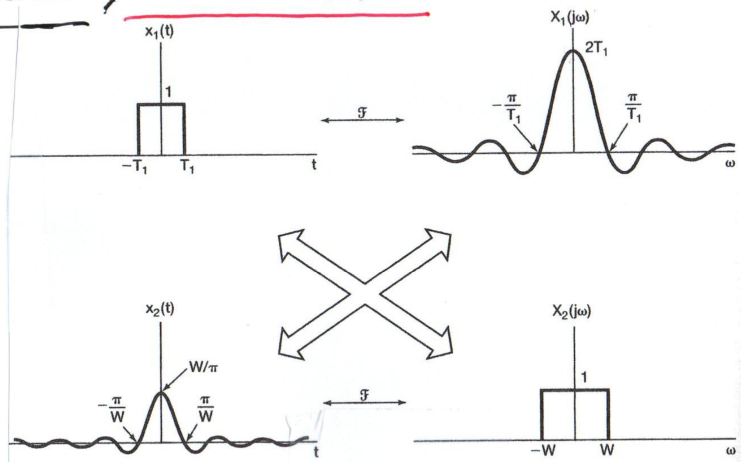
ΑΝΑΚΛΑΣΗ ΣΤΟΝ ΧΡΟΝΟ — ΑΝΑΚΛΑΣΗ ΣΤΗΝ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ

4.3. Ιδιότητες Μ/Σ Fourier (X)

ΙΔΙΟΤΗΤΑ 6: ΔΥΙΣΜΟΣ / DUALITY

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\Omega)$$

$$\Rightarrow \boxed{X(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi x(-j\Omega)}$$



Σχ. 4.17 από βιβλίο Oppenheim-Willsky

ΕΧΟΥΜΕ ΔΕΙ:

$$x_1(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_1(j\Omega) = \frac{2\sin(\Omega T_1)}{\Omega}$$

$$x_2(t) = \frac{\sin Wt}{\pi t} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_2(j\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < W \\ 0, & |\Omega| > W \end{cases}$$

4.3. Ιδιότητες Μ/Σ Fourier (XI)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

$$g(t) = \frac{2}{1+t^2} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} ?$$

Θυμόμαστε:

$$x(t) = e^{-|t|} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(j\Omega) = \frac{2}{1+\Omega^2}$$

Άρα:

$$\frac{2}{1+t^2} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \boxed{2\pi e^{-|\Omega|}}$$

(λόγω δυϊκότητας)

ΖΗΤΟΥΜΕΝΟΣ Μ/Σ FOURIER $G(j\Omega)$

4.3. Ιδιότητες Μ/Σ Fourier (XII)

ΠΑΡΑΓΩΓΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ
ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΩΝ
ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ & ΔΥΪΚΟΤΗΤΑΣ:

$$\boxed{-jt\,x(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{dX(j\Omega)}{d\Omega}}$$

$$\boxed{e^{j\Omega_0 t}x(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(j(\Omega-\Omega_0))}$$

$$\boxed{-\frac{1}{jt}x(t) + \pi x(0)\delta(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \int_{-\infty}^{\Omega} X(j\theta)\,d\theta}$$

4.3. Ιδιότητες Μ/Σ Fourier (XIII)

Σχέση PARSEVAL:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\Omega)|^2 d\Omega$$

ΟΛΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΣΗΜΑΤΟΣ (ΓΙΑ ΣΗΜΑΤΑ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ)

ENERGY DENSITY SPECTRUM

- Για περιοδικά σήματα, χρησιμοποιούμε την αντίστοιχη σχέση / ιδιότητα των σειρών FOURIER.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, x^*(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X^*(j\Omega) e^{-j\Omega t} d\Omega\right] dt$$

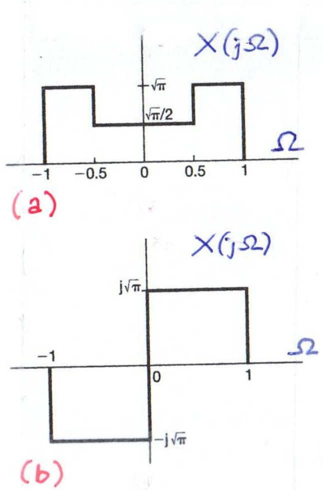
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X^*(j\Omega)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\Omega t} dt\right] d\Omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X^*(j\Omega)\, X(j\Omega)\, d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\Omega)|^2 d\Omega$$

4.3. Ιδιότητες Μ/Σ Fourier (XIV)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Σχ. 4.18 από βιβλίο Oppenheim-Willsky



Υπολογίστε τα

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \quad , \quad D = \left. \frac{d}{dt} x(t) \right|_{t=0}$$

για τα σήματα $x(t)$ που έχουν Μ/Σ FOURIER που δίνονται στα σχήματα (a) & (b)

Από τη σχέση Parseval:

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\Omega)|^2 d\Omega = \begin{cases} \xrightarrow{(a)} 5/8 \\ \xrightarrow{(b)} 1 \end{cases}$$

Από ιδιότητα παραγώγισης: $\underbrace{\frac{d}{dt} x(t)}_{g(t)} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \underbrace{j\Omega X(j\Omega)}_{G(j\Omega)}$

$$D = \boxed{g(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(j\Omega) d\Omega}$$

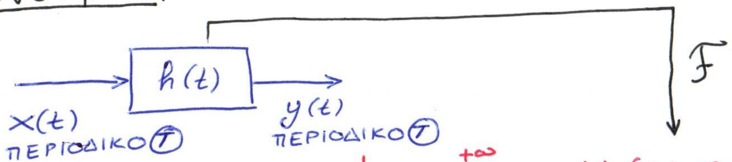
$$\Rightarrow D = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} j\Omega X(j\Omega) d\Omega$$

$\xrightarrow{(a)} 0$

$\xrightarrow{(b)} -1/(2\sqrt{\pi})$

4.4. Ιδιότητα Συνέλιξης Μ/Σ Fourier (I)

Υπενθύμιση:



$\hookrightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\Omega_0 t}$ $\qquad$ $\hookrightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k H(jk\Omega_0) e^{jk\Omega_0 t}$

ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ / CONVOLUTION PROPERTY

$$y(t) = h(t) * x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \boxed{Y(j\Omega) = H(j\Omega)X(j\Omega)}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

$$Y(j\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Big[\overbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau}^{h(t)*x(t)} \Big] e^{-j\Omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \underbrace{\Big[\int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau) e^{-j\Omega t} dt \Big]}\, d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \boxed{e^{-j\Omega\tau} H(j\Omega)}\, d\tau =$$

$$= H(j\Omega) \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j\Omega\tau} d\tau = H(j\Omega)X(j\Omega)$$

4.4. Ιδιότητα Συνέλιξης Μ/Σ Fourier (II)

Μεγάλη σημασία για ανάλυση Γ.Χ.Α. συστημάτων:

$$x(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow y(t)$$

ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ:

$$x(t) \rightarrow \boxed{H(j\Omega)} \rightarrow y(t)$$

Αν υπάρχει, βέβαια....

Για ευσταθή συστήματα, OK!

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, dt < \infty$$

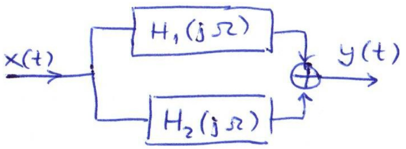
Αλλιώς, απαιτείται χρήση μετασχηματισμού LAPLACE

ΣΥΝΔΕΣΜΟΛΟΓΙΕΣ Γ.Χ.Α. ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ:

- ΕΝ ΣΕΙΡΑ: (cascade)

$$x(t) \rightarrow \boxed{H_1(j\Omega)} \rightarrow \boxed{H_2(j\Omega)} \rightarrow y(t) \qquad x(t) \rightarrow \boxed{H_1(j\Omega)H_2(j\Omega)} \rightarrow y(t)$$

- ΕΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩ: (parallel)



$$x(t) \rightarrow \boxed{H_1(j\Omega) + H_2(j\Omega)} \rightarrow y(t)$$

4.4. Ιδιότητα Συνέλιξης Μ/Σ Fourier (III)

$$\text{Σχέση εισόδου/εξόδου} \xleftrightarrow[x(t)=\delta(t)]{*} h(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} H(j\Omega)$$

Γ.Χ.Α.

ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ

$\leftarrow$ ΓΙΝΟΜΕΝΟ & $\mathcal{F}^{-1}$

$\mathcal{F}$ & ΛΟΓΟΣ $\rightarrow$

- $h(t) = \delta(t-t_0)$

  $\hookrightarrow H(j\Omega) = e^{-j\Omega t_0}$

  $\Longrightarrow Y(j\Omega) = H(j\Omega)X(j\Omega) = e^{-j\Omega t_0}X(j\Omega)$

  $\Longrightarrow y(t) = x(t-t_0)$

- $y(t) = \dfrac{dx(t)}{dt} \Longrightarrow Y(j\Omega) = j\Omega X(j\Omega)$

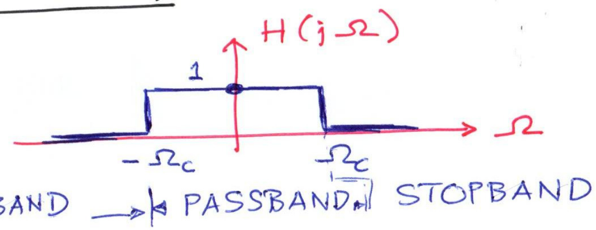
  $\Longrightarrow H(j\Omega) = \dfrac{Y(j\Omega)}{X(j\Omega)} = j\Omega$

  $\Longrightarrow h(t) = \dfrac{d\delta(t)}{dt}$

4.4. Ιδιότητα Συνέλιξης Μ/Σ Fourier (IV)

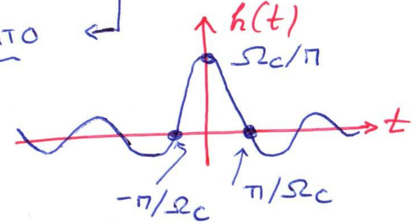
- ΚΑΤΩΠΕΡΑΤΟ ΦΙΛΤΡΟ (ΙΔΑΝΙΚΟ):

$$x(t) \longrightarrow \boxed{H(j\Omega)} \longrightarrow y(t)$$



$$H(j\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < \Omega_c \\ 0, & |\Omega| > \Omega_c \end{cases} \Longleftrightarrow \boxed{h(t) = \frac{\sin(\Omega_c t)}{\pi t}}$$

ΜΗ ΑΙΤΙΑΤΟ

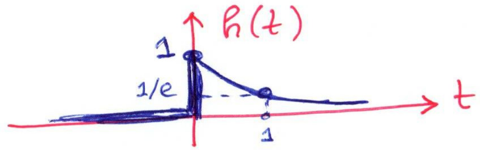


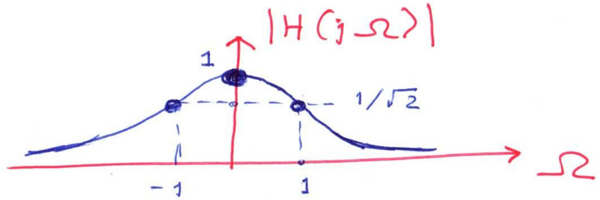
- ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΟΥ:

$$h(t) = e^{-t} u(t)$$

$$\Updownarrow$$

$$H(j\Omega) = \frac{1}{j\Omega + 1}$$





4.4. Ιδιότητα Συνέλιξης Μ/Σ Fourier (V)

$$h(t) = e^{-at}u(t), \quad a > 0$$
$$x(t) = e^{-bt}u(t), \quad b > 0$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = ?$$

$$\left.\begin{aligned} X(j\Omega) &= \frac{1}{b+j\Omega} \\ H(j\Omega) &= \frac{1}{a+j\Omega} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow Y(j\Omega) = \frac{1}{(a+j\Omega)(b+j\Omega)}$$

$$= \begin{cases} \xrightarrow{b \neq a} \dfrac{1}{b-a}\left[\dfrac{1}{a+j\Omega} - \dfrac{1}{b+j\Omega}\right] \Longrightarrow \boxed{y(t) = \dfrac{1}{b-a}\left[e^{-at} - e^{-bt}\right]u(t)} \\ \xrightarrow{b = a} \dfrac{1}{(a+j\Omega)^2} = j\dfrac{d}{d\Omega}\left[\dfrac{1}{a+j\Omega}\right] \Longrightarrow \boxed{y(t) = t\,e^{-at}u(t)} \end{cases}$$

4.4. Ιδιότητα Συνέλιξης Μ/Σ Fourier (VI)

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= \frac{\sin(\Omega_i t)}{\pi t} \\ h(t) &= \frac{\sin(\Omega_c t)}{\pi t} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow y(t) = ?$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

(ΙΔΑΝΙΚΟ ΚΑΤΩΠΕΡΑΤΟ ΦΙΛΤΡΟ)

$$X(j\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| \leq \Omega_i \\ 0, & \text{ΑΛΛΟΥ} \end{cases}$$

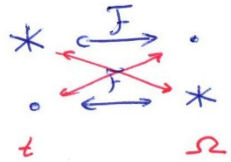
$$H(j\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| \leq \Omega_c \\ 0, & \text{ΑΛΛΟΥ} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow Y(j\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| \leq \min\{\Omega_i, \Omega_c\} \\ 0, & \text{ΑΛΛΟΥ} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow y(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin(\Omega_c t)}{\pi t}, & \text{εάν } \Omega_c \leq \Omega_i \\ \dfrac{\sin(\Omega_i t)}{\pi t}, & \text{εαν } \Omega_i \leq \Omega_c \end{cases}$$

4.5. Ιδιότητα Πολλαπλασιασμού Μ/Σ Fourier (Ι)

Υπενθύμιση .... Δυϊκότητα



$$s(t)\,p(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S(j\theta)\,P(j(\Omega-\theta))\,d\theta$$

$$\frac{1}{2\pi}\, S(j\Omega) * P(j\Omega)$$

ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑ:

- ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΠΛΑΤΟΥΣ
  (AMPLITUDE MODULATION)

[MODULATION PROPERTY]

4.5. Ιδιότητα Πολλαπλασιασμού Μ/Σ Fourier (ΙΙ)

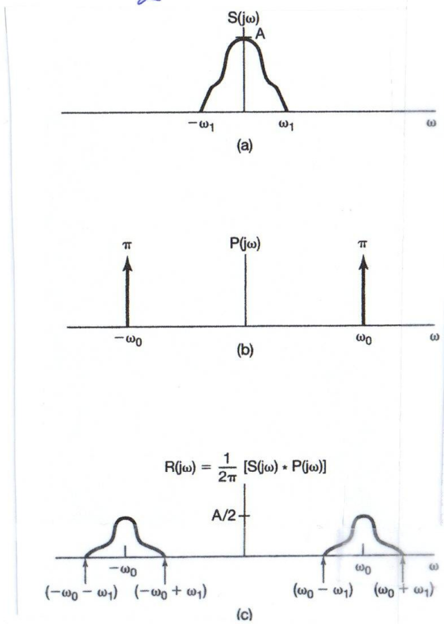
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

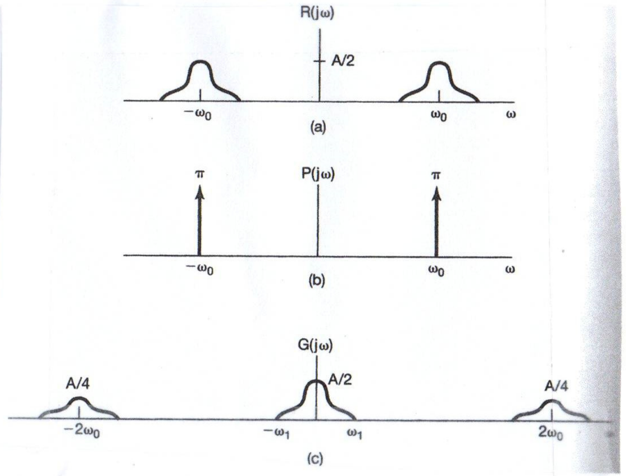
$$p(t) = \cos(\Omega_0 t)$$

$$P(j\Omega) = \pi\,\delta(\Omega-\Omega_0) + \pi\,\delta(\Omega+\Omega_0)$$

$$r(t) = p(t)\,s(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2} S(j(\Omega-\Omega_0)) + \frac{1}{2} S(j(\Omega+\Omega_0))$$

$$g(t) = r(t)\,p(t)$$





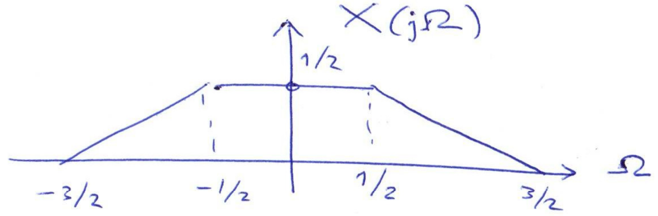
Σχ. 4.23, 4.24 από βιβλίο Oppenheim-Willsky

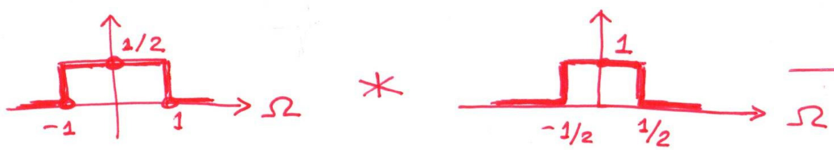
4.5. Ιδιότητα Πολλαπλασιασμού Μ/Σ Fourier (III)

$$x(t) = \frac{\sin(t)\,\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\pi t^2} \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} ?$$

$$x(t) = \pi\left(\frac{\sin(t)}{\pi t}\right)\cdot\left(\frac{\sin(t/2)}{\pi t}\right)$$

$$X(j\Omega) = \frac{1}{2}\,\mathcal{F}\left\{\frac{\sin(t)}{\pi t}\right\} * \mathcal{F}\left\{\frac{\sin(t/2)}{\pi t}\right\}$$





4.6. Πίνακας Ιδιοτήτων / Ζευγών Μ/Σ Fourier [Τυπολόγιο]

$$a\,x(t) + b\,y(t) \leftrightarrow a\,X(\Omega) + b\,Y(\Omega)$$

$$x(t-t_o) \leftrightarrow e^{-j\Omega t_o} X(\Omega)$$

$$e^{j\Omega_o t} x(t) \leftrightarrow X(\Omega-\Omega_o)$$

$$x^*(t) \leftrightarrow X^*(-\Omega)$$

$$x(-t) \leftrightarrow X(-\Omega)$$

$$x(a\,t) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\Omega}{a}\right)$$

$$X(t) \leftrightarrow 2\pi\,x(-\Omega) \quad (\text{δυϊκότητα})$$

$$x(t) * y(t) \leftrightarrow X(\Omega)\,Y(\Omega)$$

$$x(t)\,y(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{\theta=-\infty}^{+\infty} X(\theta)\,Y(\Omega-\theta)\,d\theta$$

$$\frac{d}{dt}x(t) \leftrightarrow j\Omega X(\Omega)$$

$$t\,x(t) \leftrightarrow j\frac{d}{d\Omega}X(\Omega)$$

$$\int_{\tau=-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j\Omega}X(\Omega) + \pi X(0)\,\delta(\Omega)$$

$$\int_{t=-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega=-\infty}^{+\infty} |X(\Omega)|^2\,d\Omega$$

(για μη περιοδικό $x(t)$).

$$\delta(t) \leftrightarrow 1 \qquad \delta(t-t_o) \leftrightarrow e^{-j\Omega t_o}$$

$$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\Omega} + \pi\,\delta(\Omega)$$

$$1 \leftrightarrow 2\pi\,\delta(\Omega) \qquad e^{j\Omega_o t} \leftrightarrow 2\pi\,\delta(\Omega-\Omega_o)$$

$$\cos(\Omega_o t) \leftrightarrow \pi\left[\delta(\Omega-\Omega_o) + \delta(\Omega+\Omega_o)\right]$$

$$\sin(\Omega_o t) \leftrightarrow \frac{\pi}{j}\left[\delta(\Omega-\Omega_o) - \delta(\Omega+\Omega_o)\right]$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT) \leftrightarrow \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\Omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$$

$$e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{a+j\Omega}, \qquad Re\{a\} > 0$$

$$e^{-a|t|} \leftrightarrow \frac{2a}{a^2+\Omega^2}, \qquad Re\{a\} > 0$$

$$t\,e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{(a+j\Omega)^2}, \qquad Re\{a\} > 0$$

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{(a+j\Omega)^n}, \quad Re\{a\} > 0$$

$$\frac{\sin(\Omega_1 t)}{\pi t} \leftrightarrow X(\Omega) = \begin{cases} 1\,, & |\Omega| < \Omega_1 \\ 0\,, & |\Omega| > \Omega_1 \end{cases}$$

$$x(t) = \begin{cases} 1\,, & |t| < T_1 \\ 0\,, & |t| > T_1 \end{cases} \leftrightarrow \frac{2\sin(\Omega T_1)}{\Omega}$$

4.7. Ανάλυση Γ.Χ.Α. Συστημάτων Περιγραφόμενων με Διαφορικές Εξισώσεις

ΣΧΕΣΗ ΕΙΣΟΔΟΥ/ΕΞΟΔΟΥ:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

ΕΥΡΕΣΗ $H(j\Omega)$:

$$\mathcal{F}\{\quad\} = \mathcal{F}\{\quad\}$$

ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑ

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{N} a_k \mathcal{F}\left\{\frac{d^k y(t)}{dt^k}\right\} = \sum_{k=0}^{M} b_k \mathcal{F}\left\{\frac{d^k x(t)}{dt^k}\right\}$$

ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΔΙΑΦΟΡΙΣΗΣ

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{N} a_k (j\Omega)^k Y(j\Omega) = \sum_{k=0}^{M} b_k (j\Omega)^k X(j\Omega)$$

$$\Rightarrow Y(j\Omega)\left[\sum_{k=0}^{N} a_k (j\Omega)^k\right] = X(j\Omega)\left[\sum_{k=0}^{M} b_k (j\Omega)^k\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{H(j\Omega) = \frac{Y(j\Omega)}{X(j\Omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (j\Omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\Omega)^k}}$$

4.7. Γ.Χ.Α. Συστηματα με Διαφορικές Εξισώσεις – Παραδείγματα (I)

(1) $$\boxed{\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = x(t)}$$

ΣΧΕΣΗ ΕΙΣΟΔΟΥ/ΕΞΟΔΟΥ ΕΥΣΤΑΘΟΥΣ Γ.Χ.Α. ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ $(a>0)$

$$\Longrightarrow H(j\Omega) = \frac{1}{j\Omega + a}$$

$$\Longrightarrow \boxed{h(t) = e^{-at}u(t)}$$

(2) $$\boxed{\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)}$$

$$\Longrightarrow H(j\Omega) = \frac{(j\Omega)+2}{(j\Omega)^2 + 4(j\Omega) + 3}$$

$$= \frac{j\Omega + 2}{(j\Omega+1)(j\Omega+3)} = \frac{1/2}{j\Omega+1} + \frac{1/2}{j\Omega+3}$$

$$\Longrightarrow \boxed{h(t) = \frac{1}{2}e^{-t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-3t}u(t)}$$

4.7. Γ.Χ.Α. Συστηματα με Διαφορικές Εξισώσεις – Παραδείγματα (ΙΙ)

3 Έστω $\boxed{x(t) = e^{-t}u(t)}$ είσοδος στο προηγούμενο σύστημα $\Longrightarrow$ έξοδος = ?

$x(t) = e^{-t}u(t) \Longrightarrow X(j\Omega) = \dfrac{1}{j\Omega+1}$

Απο 2: $H(j\Omega) = \dfrac{j\Omega+2}{(j\Omega+1)(j\Omega+3)}$

$\Longrightarrow$ ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ

$$\Longrightarrow Y(j\Omega) = H(j\Omega)X(j\Omega) = \frac{j\Omega+2}{(j\Omega+1)^2(j\Omega+3)}$$

$$= \frac{1/4}{(j\Omega+1)} + \frac{1/2}{(j\Omega+1)^2} + \frac{(-1/4)}{(j\Omega+3)}$$

$$\Longrightarrow \boxed{y(t) = \left[\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{2}te^{-t} - \frac{1}{4}e^{-3t}\right]u(t)}$$

A1. Ανάλυση Ρητής Συνάρτησης σε Μερικά Κλάσματα (I)

ΡΗΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ:

$$H(\upsilon) = \frac{\beta_m \upsilon^m + \beta_{m-1}\upsilon^{m-1} + \dots + \beta_1 \upsilon + \beta_0}{a_n \upsilon^n + a_{n-1}\upsilon^{n-1} + \dots + a_1 \upsilon + a_0}$$

$\upsilon = j\Omega$

$$= \frac{\gamma_m \upsilon^m + \gamma_{m-1}\upsilon^{m-1} + \dots + \gamma_1 \upsilon + \gamma_0}{\upsilon^n + \delta_{n-1}\upsilon^{n-1} + \dots + \delta_1 \upsilon + \delta_0} \qquad \begin{matrix}(\gamma_k = \beta_k / a_n) \\ (\delta_k = a_k / a_n)\end{matrix}$$

$= \rightarrow m < n$ OK!

$\rightarrow m \geq n \quad \left[c_{m-n} \upsilon^{m-n} + c_{m-n-1} \upsilon^{m-n-1} + \dots + c_1 \upsilon + c_0 \right]$

$$+ \frac{b_{n-1}\upsilon^{n-1} + b_{n-2}\upsilon^{n-2} + \dots + b_1 \upsilon + b_0}{\upsilon^n + \delta_{n-1}\upsilon^{n-1} + \dots + \delta_1 \upsilon + \delta_0}$$

Συντελεστές βρίσκονται με πράξεις:

$$(\gamma_m \upsilon^m + \dots + \gamma_0) = (b_{n-1}\upsilon^{n-1} + \dots b_0) + (c_{m-n}\upsilon^{m-n} + \dots + c_0)(\upsilon^n + \dots + \delta_0)$$

A1. Ανάλυση Ρητής Συνάρτησης σε Μερικά Κλάσματα (ΙΙ)

ΣΤΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑ .... : Βρίσκουμε τις ρίζες των πολυωνύμων του παρονομαστή
$(m<n)$ (ΑΠΛΕΣ ή ΚΑΙ ΠΟΛΛΑΠΛΕΣ)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ – ΑΠΛΕΣ ΡΙΖΕΣ :

$$G(v) = \frac{b_2 v^2 + b_1 v + b_0}{[v^3 + \delta_2 v^2 + \delta_1 v + \delta_0]} = \frac{A_1}{v-\rho_1} + \frac{A_2}{v-\rho_2} + \frac{A_3}{v-\rho_3}$$

$$\to (v-\rho_1)(v-\rho_2)(v-\rho_3)$$

$$\Rightarrow (v-\rho_1)\,G(v) = A_1 + \frac{A_2(v-\rho_1)}{v-\rho_2} + \frac{A_3(v-\rho_1)}{v-\rho_3}$$

(αντίστοιχα για ρ_2, ρ_3)

$$\xrightarrow{v=\rho_1} A_1 = \left[(v-\rho_1)\,G(v)\right]\Big|_{v=\rho_1} = \frac{b_2 v^2 + b_1 v + b_0}{(v-\rho_2)(v-\rho_3)}\Bigg|_{v=\rho_1} = \frac{b_2 \rho_1^2 + b_1 \rho + b_0}{(\rho_1-\rho_2)(\rho_1-\rho_3)}$$

$$\xrightarrow{v=\rho_2} A_2 = \left[(v-\rho_2)\,G(v)\right]\Big|_{v=\rho_2}$$

$$\xrightarrow{v=\rho_3} A_3 = \left[(v-\rho_3)\,G(v)\right]\Big|_{v=\rho_3}$$

A1. Ανάλυση Ρητής Συνάρτησης σε Μερικά Κλάσματα (III)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ – ΔΙΠΛΗ ΡΙΖΑ:

$$G(u) = \frac{b_2 u^2 + b_1 u + b_0}{(u-p_1)^2 (u-p_2)} = \frac{A_{11}}{u-p_1} + \frac{A_{12}}{(u-p_1)^2} + \frac{A_{21}}{(u-p_2)}$$

↳ χρειάζεται (γενικά) ώστε # αγνώστων = # εξισώσεων/συντελεστών b_i

- A_{21}: όπως πριν
  ↳ $\boxed{= [(u-p_2)G(u)]\big|_{u=p_2}}$

- A_{12}: παρόμοια με πριν
  ↳ $(u-p_1)^2 G(u) = A_{11}(u-p_1) + A_{12} + \dfrac{A_{21}(u-p_1)^2}{(u-p_2)}$

$$\overset{u=p_1}{\Longrightarrow} \boxed{A_{12} = [(u-p_1)^2 G(u)]\big|_{u=p_1}} = \frac{b_2 p_1^2 + b_1 p_1 + b_0}{p_1 - p_2}$$

ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ

- A_{11}: $\dfrac{d}{du}[(u-p_1)^2 G(u)] = A_{11} + A_{21}\left[\dfrac{2(u-p_1)}{u-p_2} - \dfrac{(u-p_1)^2}{(u-p_2)^2}\right]$

$$\overset{u=p_1}{\Longrightarrow} \boxed{A_{11} = \left[\frac{d}{du}[(u-p_1)^2 G(u)]\right]_{u=p_1}} = \frac{2b_2 p_1 + b_1}{p_1 - p_2} - \frac{b_2 p_1^2 + b_1 p_1 + b_0}{(p_1-p_2)^2}$$

A1. Ανάλυση Ρητής Συνάρτησης σε Μερικά Κλάσματα (IV)

ΓΕΝΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ:

$$G(u) = \frac{b_{n-1}u^{n-1} + \dots + b_1 u + b_0}{(u-\rho_1)^{\sigma_1}(u-\rho_2)^{\sigma_2}\dots(u-\rho_r)^{\sigma_r}} \qquad \left(\sum_{i=1}^{r}\sigma_i = n\right) \quad \rho_i \neq \rho_j$$

$$= \left[\frac{A_{11}}{u-\rho_1} + \frac{A_{12}}{(u-\rho_1)^2} + \dots + \frac{A_{1\sigma_1}}{(u-\rho_1)^{\sigma_1}}\right]$$

$$+ \left[\frac{A_{21}}{u-\rho_2} + \dots + \frac{A_{2\sigma_2}}{(u-\rho_2)^{\sigma_2}}\right]$$

$$+ \dots + \left[\frac{A_{r1}}{u-\rho_1} + \dots + \frac{A_{r\sigma_r}}{(u-\rho_r)^{\sigma_r}}\right]$$

όπου:

$$\boxed{A_{ik} = \frac{1}{(\sigma_i - k)!}\left[\frac{d^{\sigma_i - k}}{du^{\sigma_i - k}}\left[(u-\rho_i)^{\sigma_i} G(u)\right]\right]\Bigg|_{u=\sigma_i}}$$

$k = 1, \dots, \sigma_i$
$i = 1, \dots, r$

A1. Παραδείγματα Ανάλυσης σε Μερικά Κλάσματα (Ι)

1

$$\boxed{\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)}$$

ΕΥΣΤΑΘΕΣ
Γ.Χ.Α.
$\Rightarrow \boxed{h(t) = ?}$

$$\Rightarrow H(j\Omega) = \frac{j\Omega + 2}{(j\Omega)^2 + 4(j\Omega) + 3}$$

$$\xRightarrow{v=j\Omega} H(v) = \frac{v+2}{v^2+4v+3} = \frac{v+2}{(v+1)(v+3)} = \frac{A_{11}}{v+1} + \frac{A_{21}}{v+3}$$

$$A_{11} = \left[(v+1)H(v)\right]\Big|_{v=-1} = \frac{v+2}{v+3}\Big|_{v=-1} = \frac{1}{2}$$

$$A_{21} = \left[(v+3)H(v)\right]\Big|_{v=-3} = \frac{v+2}{v+1}\Big|_{v=-3} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow H(j\Omega) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{j\Omega+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{j\Omega+3}$$

$$\Rightarrow \boxed{h(t) = \frac{1}{2}e^{-t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-3t}u(t)}$$

A1. Παραδείγματα Ανάλυσης σε Μερικά Κλάσματα (ΙΙ)

2 $\quad x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = ?$

$x(t) = e^{-t}u(t)$

$h(t)$: ΑΠΟ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

$$Y(j\Omega) = \frac{j\Omega + 2}{(j\Omega+1)^2(j\Omega+3)}$$

$$\xRightarrow{\upsilon = j\Omega} Y(\upsilon) = \frac{\upsilon+2}{(\upsilon+1)^2(\upsilon+3)} = \frac{A_{11}}{\upsilon+1} + \frac{A_{12}}{(\upsilon+1)^2} + \frac{A_{21}}{\upsilon+3}$$

$$A_{21} = \left[(\upsilon+3)Y(\upsilon)\right]\Big|_{\upsilon=-3} = \frac{\upsilon+2}{(\upsilon+1)^2}\Big|_{\upsilon=-3} = -\frac{1}{4}$$

$$A_{12} = \left[(\upsilon+1)^2 Y(\upsilon)\right]\Big|_{\upsilon=-1} = \frac{\upsilon+2}{\upsilon+3}\Big|_{\upsilon=-1} = \frac{1}{2}$$

$$A_{11} = \frac{1}{(2-1)!}\left[\frac{d}{d\upsilon}\left[(\upsilon+1)^2 Y(\upsilon)\right]\right]\Bigg|_{\upsilon=-1} = \left[\frac{d}{d\upsilon}\left[\frac{\upsilon+2}{\upsilon+3}\right]\right]\Bigg|_{\upsilon=-1} = \frac{(\upsilon+3)-(\upsilon+2)}{(\upsilon+3)^2}\Bigg|_{\upsilon=-1} = \frac{1}{4}$$

A1. Παραδείγματα Ανάλυσης σε Μερικά Κλάσματα (III)

$$\xRightarrow[A_{21}]{A_{11}, A_{12}} \quad Y(j\Omega) = \frac{1}{4}\frac{1}{(j\Omega+1)} + \frac{1}{2}\frac{1}{(j\Omega+1)^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{(j\Omega+3)}$$

$$\Longrightarrow \boxed{y(t) = \left[\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{2}te^{-t} - \frac{1}{4}e^{-3t}\right]u(t)}$$