ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

ΘΕΩΡΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Γεράσιμος Ποταμιάνος

Αναπλ. Καθηγητής,
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

http://www.e-ce.uth.gr/~gpotamianos

ΘΕΩΡΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

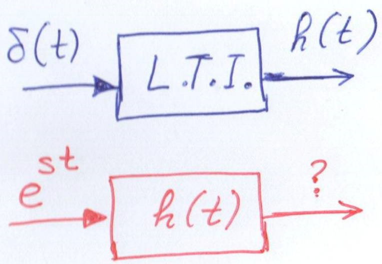
Ενότητα 3: ΣΕΙΡΕΣ FOURIER ΠΕΡΙΟΔΙΚΩΝ ΣΗΜΑΤΩΝ

3.1. Εισαγωγή
3.2. Απόκριση Γ.Χ.Α. Συστημάτων σε Μιγαδικά Εκθετικά
3.3. Σειρά Fourier Περιοδικών Σημάτων Συνεχούς Χρόνου
3.4,5. Σύγκλιση / Ιδιότητες Σειρών Fourier
3.6. Σειρά Fourier Περιοδικών Σημάτων Διακριτού Χρόνου
3.7. Σειρές Fourier και Γ.Χ.Α. Συστήματα

3.1. Εισαγωγή

- Έχουμε μάθει την αναπαράσταση / ανάλυση Γ.Χ.Α. συστημάτων με βάση την κρουστική τους απόκριση.
  - ✓ Βασίζεται στην αναπαράσταση σημάτων ως γραμμικό συνδυασμό μετατοπισμένων **κρουστικών** σημάτων.
- Εδώ στοχεύουμε σε εναλλακτικό τρόπο αναπαράστασης.
  - ✓ Βασίζεται στην αναπαράσταση σημάτων ως γραμμικό συνδυασμό μιγαδικών **εκθετικών**.
- Ξεκινάμε με αναπαράσταση περιοδικών σημάτων ως σειρών Fourier.
- Επεκτείνουμε αργότερα την προσέγγιση και σε μη περιοδικά σήματα πεπερασμένης ενέργειας.
- Οδηγούμαστε έτσι σε πολύ χρήσιμα εργαλεία για ανάλυση Γ.Χ.Α. συστημάτων στο πεδίο της συχνότητας.
- Προσέγγιση βασίζεται σε εργασίες των Euler και Fourier (1807).

3.2. Απόκριση Γ.Χ.Α. Συστημάτων σε Μιγαδικά Εκθετικά (I)



s: μιγαδικός

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, e^{st} e^{-s\tau}\, d\tau$$

$$= e^{st} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau$$

$$= H(s)\, e^{st}$$

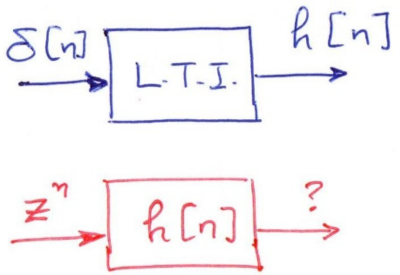
e^{st} → ΙΔΙΟΣΥΝΑΡΤΗΣΗ (eigenfunction)

$$\boxed{H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau}$$

← ΙΔΙΟΤΙΜΗ (eigenvalue)

→ μπορεί και να μην συγκλίνει ....

3.2. Απόκριση Γ.Χ.Α. Συστημάτων σε Μιγαδικά Εκθετικά (ΙΙ)



z: μιγαδικός

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\, x[n-k]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\, z^{n-k}$$

$$= z^{n} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\, z^{-k}$$

$$= H(z) \cdot z^{n}$$

↳ ΙΔΙΟΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

$$\boxed{H(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} h[k]\, z^{-k}}$$

← ΙΔΙΟΤΙΜΗ

↳ μπορεί και να μην συγκλίνει ....

3.2. Απόκριση Γ.Χ.Α. Συστημάτων σε Μιγαδικά Εκθετικά (ΙΙΙ)

$$e^{st} \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow H(s).e^{st}$$

$$z^{n} \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow H(z).\,z^{n}$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

Λόγω γραμμικότητας, αν: .... τότε:

$$x(t) = \sum_k a_k e^{s_k t} \implies y(t) = \sum_k a_k H(s_k)\, e^{s_k t}$$

$$x[n] = \sum_k a_k z_\kappa^{n} \implies y[n] = \sum_k a_k H(z_k)\, z_k^{n}$$

Για:

$s = j\Omega \rightsquigarrow e^{j\Omega t}$

$z = e^{j\omega} \rightsquigarrow e^{j\omega n}$

} FOURIER ANALYSIS

"LAPLACE"

"Z"

3.2.Απόκριση Γ.Χ.Α. Συστημάτων σε Μιγαδικά Εκθετικά (IV)

- $x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \xrightarrow{y(t)}$

$h(t) = \delta(t-3)$ [ΚΑΘΥΣΤΕΡΗΤΗΣ
DELAY]

$y(t) = x(t-3)$

Έστω $x(t) = e^{j2t} \Longrightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau-3)\, e^{j(2t-2\tau)}\, d\tau =$

$$= e^{j2t} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau-3)\, e^{-j2\tau}\, d\tau$$

$$= e^{j2t} \cdot e^{-j6}$$

Έστω $x(t) = \cos(4t) + \cos(7t)$

$$= \frac{1}{2} e^{j4t} + \frac{1}{2} e^{-j4t} + \frac{1}{2} e^{j7t} + \frac{1}{2} e^{-j7t}$$

$$\Longrightarrow y(t) = \frac{1}{2} e^{-j12} e^{j4t} + \frac{1}{2} e^{j12} e^{-j4t} + \frac{1}{2} e^{j21} e^{j7t} +$$

$$\frac{1}{2} e^{j21} e^{-j7t} = \cos(4(t-3)) + \cos(7(t-3))$$

3.3. Σειρές Fourier (συνεχούς χρόνου) – Εισαγωγή (I)

Περιοδικότητα:

$$x(t) = x(t+T), \quad \forall t$$

θετικός

$T_0 = T$ fundamental period, $\boxed{\Omega_0 = \frac{2\pi}{T}}$ fundamental frequency

Αρμονικές εκθετικές:

$$e^{j\Omega_0 t}$$

$$\varphi_k(t) = e^{jk\Omega_0 t} = e^{jk\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

(επίσης περιοδικά με περίοδο T)

$T/|k| \quad k \neq 0$

γραμμικός συνδυασμός τους επίσης περιοδικό σήμα με περίοδο T

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\Omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}}$$

3.3. Σειρές Fourier – Εισαγωγή (II)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ :

$$\Omega_0 = 2\pi$$

$$x(t) = \sum_{k=-3}^{+3} a_k e^{jk2\pi t}$$

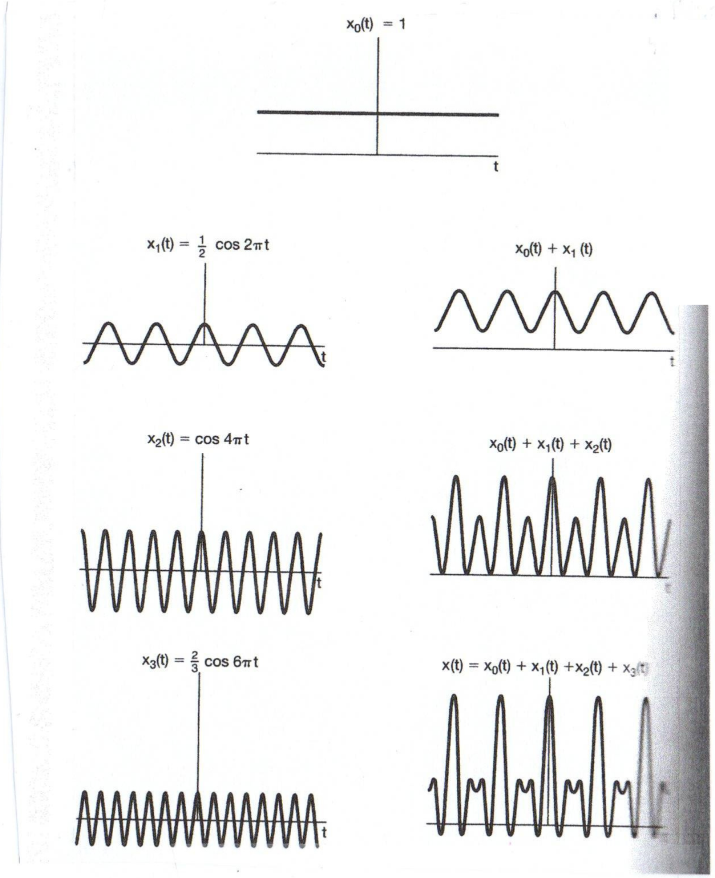
$$a_0 = 1$$

$$a_1 = a_{-1} = 1/4$$

$$a_2 = a_{-2} = 1/2$$

$$a_3 = a_{-3} = 1/3$$

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2}\cos(2\pi t) + \cos(4\pi t) + \frac{2}{3}\cos(6\pi t)$$



Σχ. 3.4 από βιβλίο Oppenheim-Willsky

3.3. Σειρές Fourier – Πραγματικά Σήματα

Για πραγματικά $\boxed{x(t)}$:

$$x^*(t) = x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k^* e^{-jk\Omega_0 t} \underset{k \to -k}{=} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{-k}^* e^{jk\Omega_0 t}$$

Άρα: $\boxed{a_k^* = a_{-k}}$

Συνεπώς:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[a_k e^{jk\Omega_0 t} + a_k^* e^{-jk\Omega_0 t} \right]$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2\,\mathrm{Re}\{ \underbrace{a_k}_{A_k e^{j\theta_k}} e^{jk\Omega_0 t} \}$$

$$= a_0 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(k\Omega_0 t + \theta_k)$$

$$\overset{a_k = B_k + jC_k}{=} a_0 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \left[B_k \cos(k\Omega_0 t) - C_k \sin(k\Omega_0 t) \right]$$

3.3. Σειρές Fourier – Εξίσωση Ανάλυσης (Ι)

Έστω: $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\Omega_0 t}$ $\boxed{a_k = ?}$

$$\xrightarrow{\cdot e^{-jn\Omega_0 t}} x(t) e^{-jn\Omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\Omega_0 t} e^{-jn\Omega_0 t}$$

$$\xrightarrow{\int_0^T} \int_0^T x(t) e^{-jn\Omega_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \int_0^T e^{j(k-n)\Omega_0 t} dt$$

$$\overset{*}{=} T a_k$$

$(*)$ ΓΙΑΤΙ: $\int_0^T e^{j(k-n)\Omega_0 t} dt = \int_0^T \cos[(k-n)\Omega_0 t] dt + j \int_0^T \sin[(k-n)\Omega_0 t] dt$

Για $k \neq n$ και τα δύο ορίσματα είναι περιοδικά με περίοδο $T/|k-n|$

$\Rightarrow \int_0^T (\;) = 0$

Για $k = n$: $\boxed{\int_0^T dt = T}$

3.3. Σειρές Fourier – Εξίσωση Ανάλυσης (ΙΙ)

Άρα:

$$\boxed{a_k = \frac{1}{T}\int_{T} x(t)\, e^{-jk\Omega_0 t}\, dt}$$

ΕΞΙΣΩΣΗ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

ΕΙΔΙΚΑ για $k=0$:

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{T}\int_{T} x(t)\, dt}$$

← ΜΕΣΟΣ ΟΡΟΣ $x(t)$ ΣΕ ΜΙΑ ΠΕΡΙΟΔΟ

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\, e^{jk\Omega_0 t}}$$

ΕΞΙΣΩΣΗ ΣΥΝΘΕΣΗΣ

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

FUNDAMENTAL PERIOD of $x(t)$

3.3. Σειρές Fourier – Παραδείγματα (I)

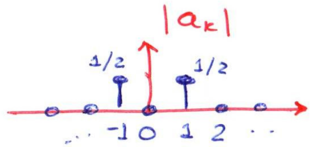
- $x(t) = \sin(\Omega_0 t)$

Με απλή επισκόπηση: $x(t) = \frac{1}{2j} e^{j\Omega_0 t} - \frac{1}{2j} e^{-j\Omega_0 t}$

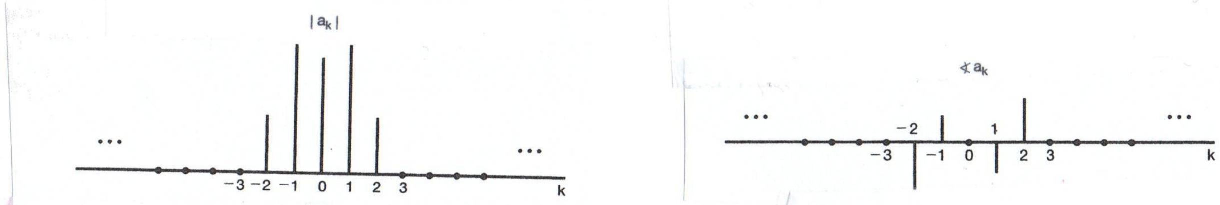
$a_1 = 1/(2j)$

$a_{-1} = -1/(2j)$

$a_k = 0 \quad \forall\, k \neq \pm 1$



- $x(t) = 1 + \sin(\Omega_0 t) + $
$+ 2\cos(\Omega_0 t) + \cos(2\Omega_0 t + \pi/4)$

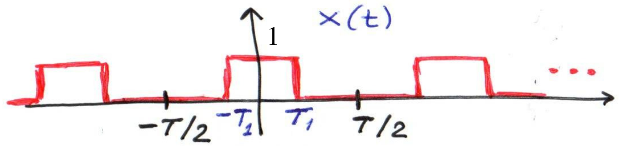


Σχ. 3.5 από βιβλίο Oppenheim-Willsky

3.3. Σειρές Fourier – Παραδείγματα (ΙΙ)

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & T_1 < |t| < T/2 \end{cases}$$

σε μία περίοδο



$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1} dt = \frac{2T_1}{T}$$

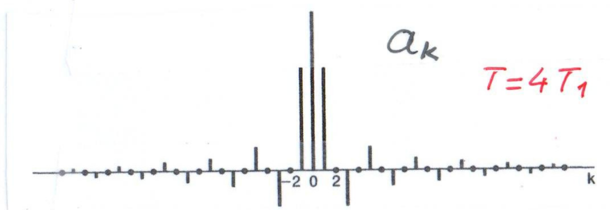
$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1} e^{-jk\Omega_0 t}\,dt = -\frac{1}{jk\Omega_0 T} e^{-jk\Omega_0 t}\Big|_{-T_1}^{T_1} =$$

$k \neq 0$

$$= \frac{2}{k\Omega_0 T}\left[\frac{e^{jk\Omega_0 T_1} - e^{-jk\Omega_0 T_1}}{2j}\right] = \frac{2\sin(k\Omega_0 T_1)}{k\Omega_0 T} =$$

$\Omega_0 T \rightarrow 2\pi$

$$= \frac{\sin(k\Omega_0 T_1)}{k\pi}$$



Σχ. 3.7(a) από βιβλίο Oppenheim-Willsky

3.4. Σύγκλιση Σειρών Fourier (I)

$$e_N(t) = x(t) - \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{jk\Omega_0 t}$$

APPROXIMATION ERROR

$$E_N = \int_{T} |e_N(t)|^2 dt$$

Τα a_k της εξίσωσης ανάλυσης ελαχιστοποιούν το E_N !

Αν η σειρά FOURIER υπάρχει, τότε:

$$\boxed{\lim_{N \to \infty} E_N = 0}$$

Μια συνθήκη για να ισχύει κάτι τέτοιο:

$$\int_{T} |x(t)|^2 dt < \infty \Rightarrow$$ ΥΠΑΡΧΕΙ ΣΕΙΡΑ FOURIER

3.4. Σύγκλιση Σειρών Fourier (II)

Εναλλακτικό ΣΕΤ ΣΥΝΘΗΚΩΝ ΥΠΑΡΞΗΣ ΣΕΙΡΑΣ FOURIER (ΣΥΝΘΗΚΕΣ DIRICHLET):

- ABSOLUTE INTEGRABILITY: $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\,dt < \infty$

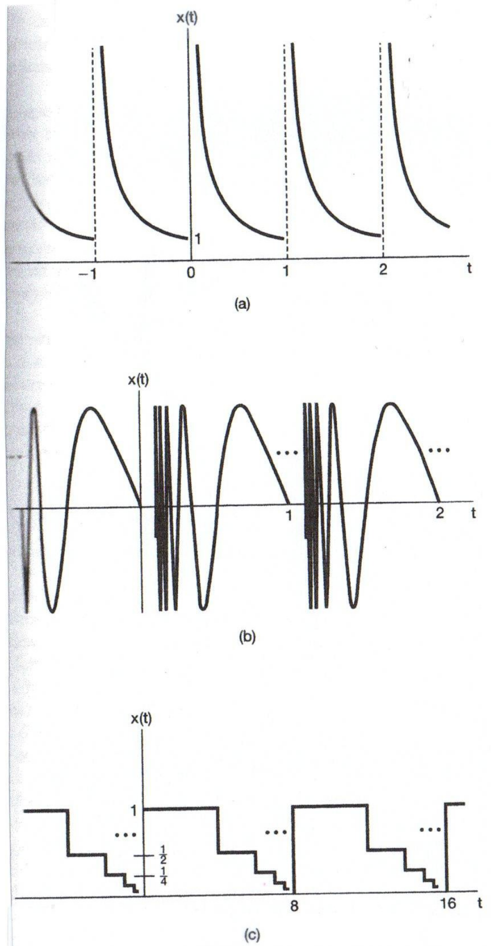
  Δεν το τηρεί το: $x(t) = 1/t$, $0 < t \le 1$

- BOUNDED VARIATION: $\left\{ \begin{array}{l} \#\ \text{MIN, MAX} \\ \text{ΣΕ ΜΙΑ ΠΕΡΙΟΔΟ} \end{array} \right\}$ είναι πεπερασμένος

  Δεν το τηρεί το: $x(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{t}\right)$, $0 < t \le 1$

- FINITE NUMBER OF DISCONTINUITIES: (of finite size) (over finite interval)

  Δεν το τηρεί το:

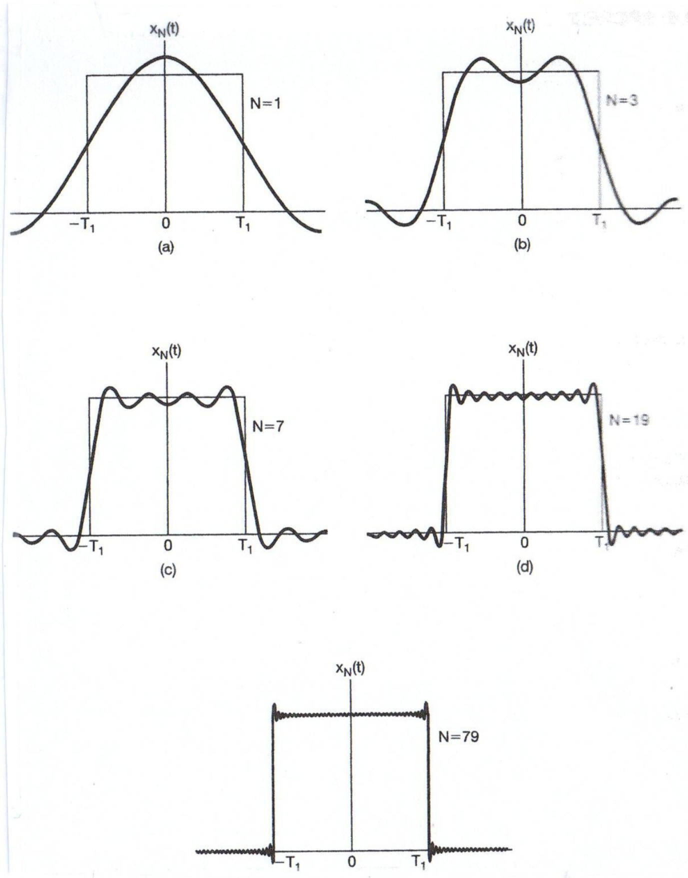


Σχ. 3.8 από βιβλίο Oppenheim-Willsky

3.4. Σύγκλιση Σειρών Fourier (ΙΙΙ)

- Σύγκλιση δεν σημαίνει
  $e_N(t) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0, \ \forall t$

- φαινόμενο Gibbs



Σχ. 3.9 από βιβλίο Oppenheim-Willsky

3.5. Ιδιότητες Σειρών Fourier (I)

- Γραμμικότητα: $x(t), y(t)$ περιοδικά σήματα με περίοδο T

$$x(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_k \qquad y(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} b_k \implies Ax(t)+By(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} \boxed{c_k = a_k A + b_k B}$$

- Χρονική ολίσθηση: $x(t)$ περιοδικό με T περίοδο

$$x(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_k \implies x(t-t_0) \longleftrightarrow \boxed{e^{-jk\frac{2\pi}{T}t_0} a_k}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

- $y(t) = x(t-t_0)$ επίσης περιοδικό με περίοδο T
- $$b_k = \frac{1}{T}\int_{T} x(t-t_0)\, e^{-jk\Omega_0 t}\, dt \overset{\tau = t-t_0}{=} \frac{1}{T}\int_{T} x(\tau)\, e^{-jk\Omega_0(\tau+t_0)}\, d\tau$$

$$= e^{-jk\Omega_0 t_0}\frac{1}{T}\int_{T} x(\tau)\, e^{-jk\Omega_0 \tau}\, d\tau = a_k\, e^{-jk\frac{2\pi}{T}t_0}$$

3.5. Ιδιότητες Σειρών Fourier (II)

- **Χρονική ανάκλαση**: $x(t)$ περιοδικό με περίοδο T

$$x(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_k \Rightarrow x(-t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_{-k}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- $y(t) = x(-t)$ επίσης περιοδικό με περίοδο T
- $x(-t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{-jk\frac{2\pi}{T}t} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{-m} e^{jm\frac{2\pi}{T}t}$

$m=-k$

- **Χρονική κλιμάκωση**: $x(t)$ περιοδικό με περίοδο T

$\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha > 0$

$$x(\alpha t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk(\alpha\Omega_0)t}$$

παραμένουν ίδια

αλλάζει η περίοδος

$T \rightarrow T/\alpha$

3.5. Ιδιότητες Σειρών Fourier (III)

- **Πολλαπλασιασμός:** $x(t), y(t)$ περιοδικά με περίοδο T

$$\left.\begin{array}{l} x(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_k \\ y(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} b_k \end{array}\right\} \Longrightarrow x(t)y(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} \boxed{c_k = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l b_{k-l}}$$

$a_k * b_k$

ΣΥΝΕΛΙΞΗ

- **Συζυγία / Συμμετρία:** $x(t)$ περιοδικό με περίοδο T

$$x(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_k \Longrightarrow x^*(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} a^*_{-k}$$

$$\oplus\; x(t) \in \mathbb{R},\ \forall t \Longrightarrow a_{-k} = a^*_k \Longrightarrow \begin{array}{l} a_0 \in \mathbb{R} \\ |a_k| = |a_{-k}| \\ \measuredangle a_k = -\measuredangle a_{-k} \\ \ldots\ldots \end{array}$$

- **Parseval:** $x(t)$ περιοδικό με περίοδο T

$$\boxed{\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2}$$

3.5. Ιδιότητες Σειρών Fourier (IV)

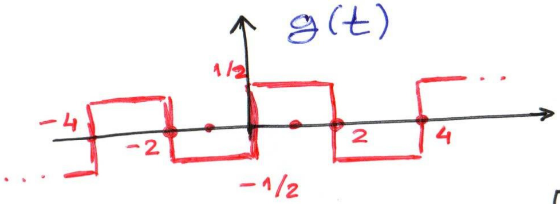
- **ΠΕΡΙΟΔΙΚΗ ΣΥΝΕΛΙΞΗ:** $x(t), y(t)$ περιοδικά με περίοδο T

$$\left.\begin{array}{l} x(t) \xleftrightarrow{FS} a_k \\ y(t) \xleftrightarrow{FS} b_k \end{array}\right\} \Longrightarrow \int_T x(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau \xleftrightarrow{FS} T a_k b_k$$

- **ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ:** $x(t)$ περιοδικό με περίοδο T

$$x(t) \xleftrightarrow{FS} a_k \Longrightarrow \frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{FS} \boxed{jk\Omega_0 a_k} = jk\frac{2\pi}{T} a_k$$

3.5. Ιδιότητες Σειρών Fourier (V) -- Παραδείγματα

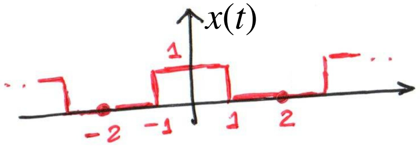
- 

Περιοδικό με περίοδο $T=4$

Μπορούμε να γράψουμε

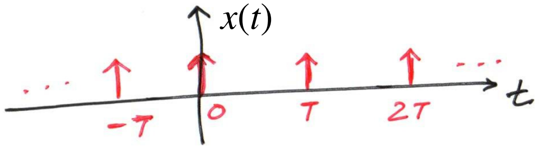
$$\boxed{g(t) = x(t-1) - 1/2}$$

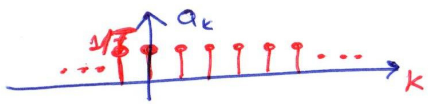
$$-\frac{1}{2} \xleftrightarrow{FS} \begin{cases} 0, & k \neq 0 \\ -1/2, & k = 0 \end{cases}$$



$$x(t-1) \xleftrightarrow{FS} \begin{cases} \dfrac{\sin(\pi k/2)}{k\pi} e^{-jk\frac{\pi}{2}}, & k \neq 0 \\ \dfrac{1}{2}, & k = 0 \end{cases}$$

- $$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$





$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jk\Omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T}$$

3.6. Διακριτή Σειρά Fourier (Discrete Fourier Series) (I)

- Προκύπτει πεπερασμένη σειρά.
- Δεν υπάρχουν θέματα σύγκλισης.
- Περιοδικό σήμα διακριτού χρόνου:

$$x[n] = x[n+N] \,, \quad \forall n$$

N ↳ fundamental period (smallest positive N) → $\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$ fundamental frequency

- Μιγαδικά εκθετικά με περίοδο N:

$$\phi_k[n] = e^{jk\omega_0 n} = e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \,, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

- Μόνο N είναι διακριτά:

$$\phi_k[n] = \phi_{k+rN}[n]$$

3.6. Διακριτή Σειρά Fourier (II)

- DISCRETE FOURIER SERIES PAIR:

$$\boxed{\begin{aligned} x[n] &= \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} \\ a_k &= \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N\rangle} x[n] e^{-jk\omega_0 n} \end{aligned}}$$

ΣΥΝΘΕΣΗ.

$\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$

ΑΝΑΛΥΣΗ.

$\to 0, 1, \ldots, N-1$

ή κάποια άλλη περίοδος ...

- DISCRETE FOURIER TRANSFORM:

Ακριβώς όπως οι παραπάνω τύποι, για ένα πεπερασμένης διάρκειας σήμα.

$\to \leq N$

3.6. Διακριτή Σειρά Fourier (III) – Παράδειγμα

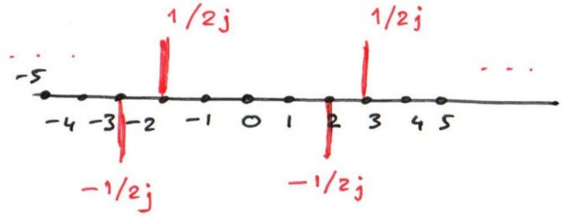
- $x[n] = \sin\frac{6\pi n}{5}$

Περιοδικό με περίοδο $N = \left(\frac{2\pi}{6\pi}\cdot 5\right)M = 5$

$$x[n] = \frac{1}{2j}e^{j3\frac{2\pi}{5}n} - \frac{1}{2j}e^{-j3\frac{2\pi}{5}n}$$

$a_3 = \frac{1}{2j}$

$a_{-3} = a_2 = -\frac{1}{2j}$



3.7. Σειρές Fourier και Γ.Χ.Α. Συστήματα (Ι)

$e^{st} \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow H(s)e^{st}$

$z^n \rightarrow \boxed{h[n]} \rightarrow H(z)z^n$

$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau$

$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] z^{-k}$

SYSTEM FUNCTIONS

ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ :

$s = j\Omega$
$z = e^{j\omega}$
$\rightsquigarrow$

$$\underbrace{H(j\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j\Omega t} dt \qquad H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[n] e^{-j\omega n}}_{\text{ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ}}$$

ΛΟΓΩ Γ.Χ.Α. ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ :

$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\Omega_0 t} \Longrightarrow y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k H(jk\Omega_0) e^{jk\Omega_0 t}$

ΙΔΙΑ ΠΕΡΙΟΔΟΣ!

ΑΛΛΑΖΟΥΝ

$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \Longrightarrow y[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k H(e^{j\frac{2\pi k}{N}}) e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$

ΙΔΙΑ ΠΕΡΙΟΔΟΣ

ΑΛΛΑΖΟΥΝ

3.7. Σειρές Fourier και Γ.Χ.Α. Συστήματα (II)

- $$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

$$x(t) = \sum_{k=-3}^{+3} a_k e^{jk\underbrace{2\pi}_{\Omega_0} t}$$

$$h(t) = e^{-t}u(t) \Longrightarrow H(j\Omega) = \int_0^{+\infty} e^{-\tau} e^{-j\Omega\tau} d\tau = -\frac{1}{1+j\Omega} e^{-\tau(1+j\Omega)} \Big|_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{1+j\Omega}$$

Άρα:

$$\boxed{y(t) = \sum_{k=-3}^{+3} a_k \frac{1}{1+jk2\pi} e^{jk2\pi t}}$$