ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

# ΘΕΩΡΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ


***Γεράσιμος Ποταμιάνος***

***Αναπλ. Καθηγητής,***
***Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών***
***και Μηχανικών Υπολογιστών***

***Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας***

***http://www.inf.uth.gr/~gpotamianos***

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

# ***ΘΕΩΡΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ***

## ***Ενότητα 2:*** ***ΣΥΝΕΛΙΞΗ, Γ.Χ.Α. ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ***

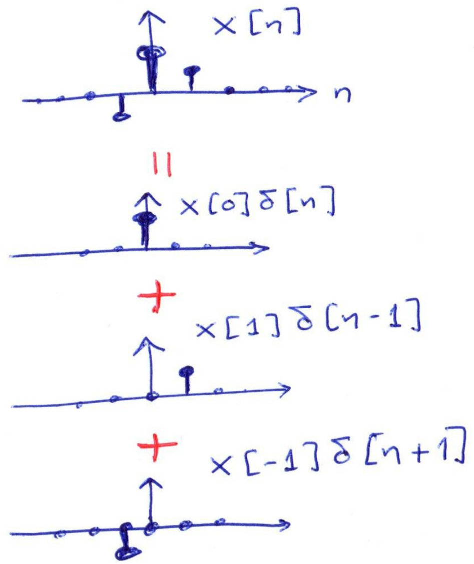
***2.0. Εισαγωγή***
***2.1. Συνέλιξη διακριτού χρόνου***
***2.2. Συνέλιξη συνεχούς χρόνου***
***2.3. Ιδιότητες συνέλιξης και Γ.Χ.Α. Συστημάτων***
***2.5. Περιγραφή Αιτιατών Γ.Χ.Α. Συστημάτων με Διαφορικές Εξισώσεις και Εξισώσεις Διαφορών***

# 2.1. Συνέλιξη – Διακριτός Χρόνος – Ορισμός (I)

ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ ΣΗΜΑΤΩΝ ΜΕΣΩ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑΣ :

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,\delta[n-k] \quad (*)$$

ΠΧ




ΠΧ

$$u[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta[n-k]$$

• ΑΝ: $x[n] \longrightarrow \boxed{\text{Γ.Χ.Α.}} \longrightarrow y[n] = \,?$

$\hookrightarrow$ Χρησιμοποιώντας $(*)$

# 2.1. Συνέλιξη – Διακριτός Χρόνος – Ορισμός (ΙΙ)

- Γραμμικότητα:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h_k[n] \qquad (1)$$

$h_k[n]$ → ΕΞΟΔΟΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΣΕ ΕΙΣΟΔΟ $\delta[n-k]$

- Χρονική Αμεταβλητότητα:

$$h_k[n] = h_o[n-k] \qquad (2)$$

→ $h_o[n]$: ΕΞΟΔΟΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΣΕ ΕΙΣΟΔΟ $\delta[n]$

Drop "o": $h[n]$ Κρουστική Απόκριση Συστήματος (IMPULSE RESPONSE)

- ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ (1)+(2): (Γ.Χ.Α / L.T.I.)

$$\boxed{y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[n-k]}$$

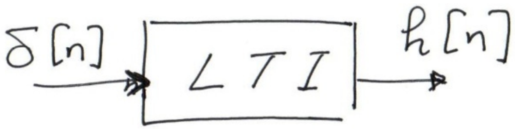
# 2.1. Συνέλιξη – Διακριτός Χρόνος – Ορισμός (ΙΙΙ)

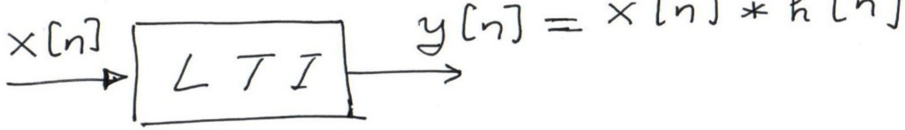
- ΣΥΝΕΛΙΞΗ :

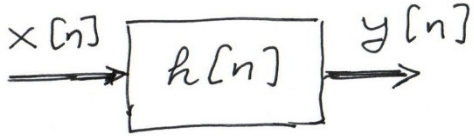
(CONVOLUTION (SUM))

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[n-k]$$

$$= x[n] * h[n]$$

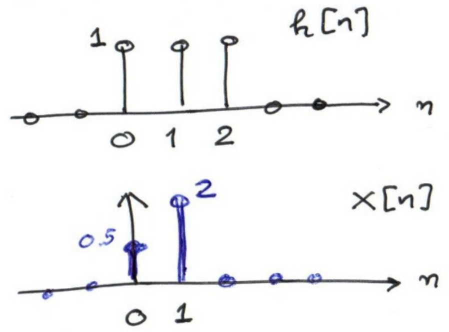


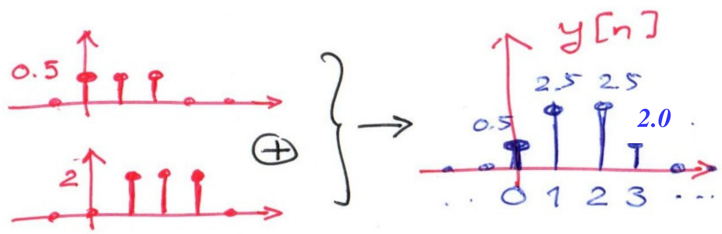



# 2.1. Συνέλιξη – Διακριτός Χρόνος – Παραδείγματα (I)

Από τον τύπο:

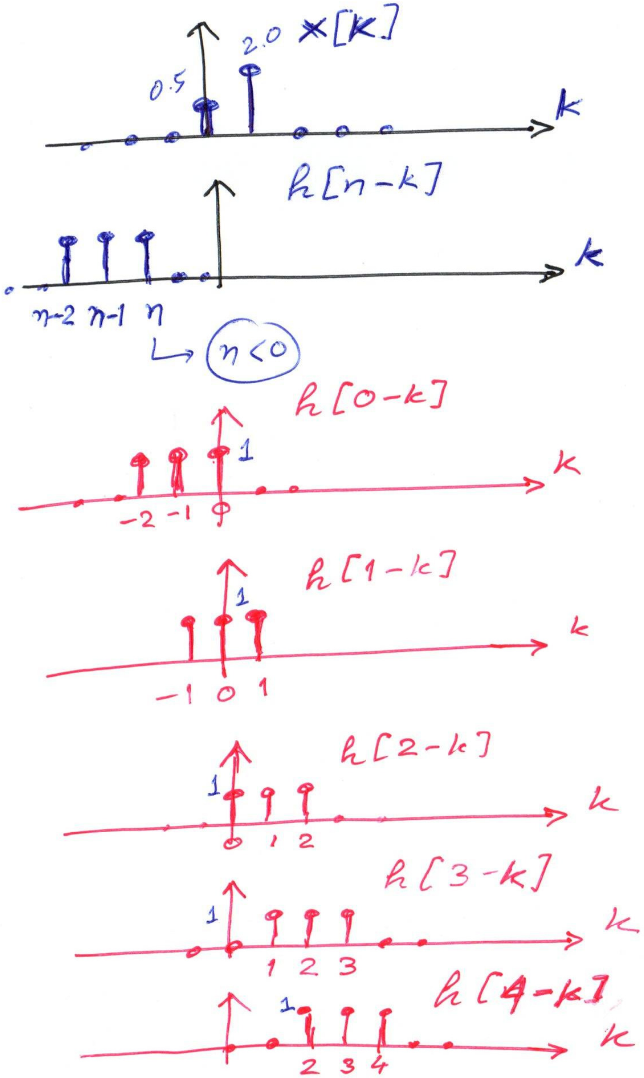



$$\Rightarrow \quad y[n] = x[0]\cdot h[n] + x[1]\cdot h[n-1] = 0.5\, h[n] + 2\, h[n-1]$$




Ας το ξαναδούμε ...

# 2.1. Συνέλιξη – Διακριτός Χρόνος – Παραδείγματα (II)




$\Rightarrow$

$y[n] = 0 \, , \quad n < 0$

$y[0] = 0.5$

$y[1] = 2.5$

$y[2] = 2.5$

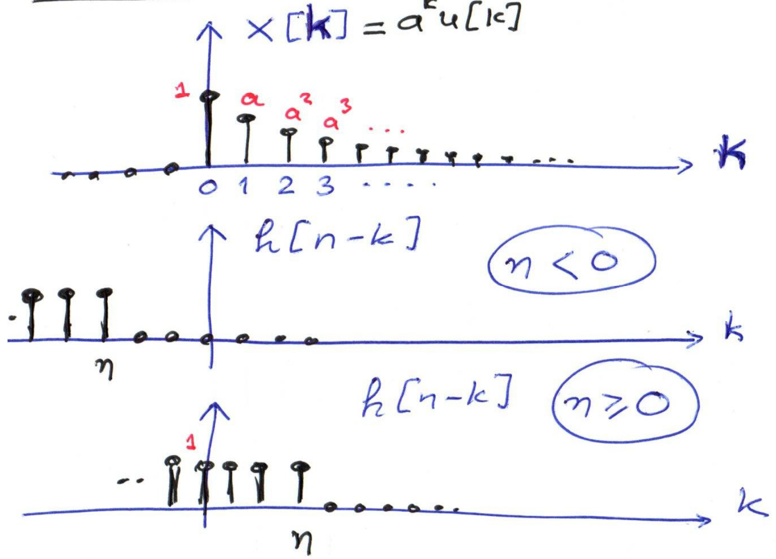
$y[3] = 2.0$

$y[n] = 0 \, , \quad n \geq 4$

# 2.1. Συνέλιξη – Διακριτός Χρόνος – Παραδείγματα (ΙΙΙ)

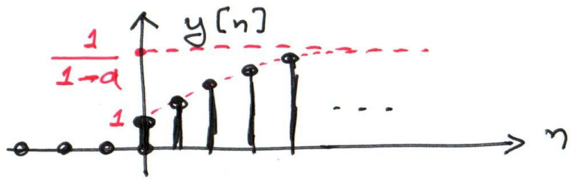
$$x[n] = a^n u[n] \quad , \quad 0 < a < 1$$

$$h[n] = u[n]$$




$$y[n] = \begin{cases} 0 , & n < 0 \\ \sum_{k=0}^{n} a^k , & n \geq 0 \end{cases}$$

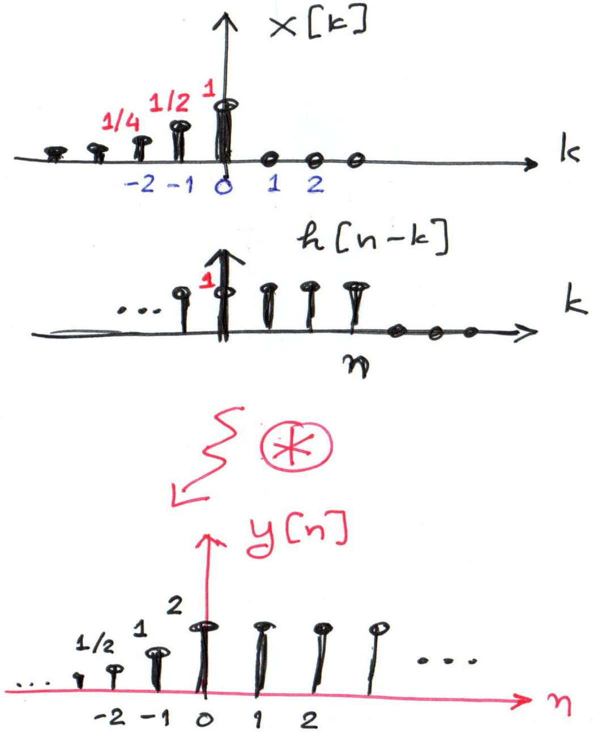
$$= \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \cdot u[n]$$



# 2.1. Συνέλιξη – Διακριτός Χρόνος – Παραδείγματα (IV)

$$x[n] = 2^n u[-n]$$

$$h[n] = u[n]$$




$n \leq 0$:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} 2^k \underset{l=-k}{=} \sum_{l=-n}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^l \underset{m=l+n}{=}$$

$$= \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{m-n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^m$$

$$= 2^n \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2^n\, 2 =$$

$$= 2^{n+1}$$

$n \geq 0$:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{0} 2^k \underset{l=-k}{=} \sum_{l=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^l = 2$$

# 2.1. Συνέλιξη – Διακριτός Χρόνος – Υπολογισμός

**Για υπολογισμό:** Ανάκλαση, μετάθεση στον χρόνο, Πολ/σμός, πρόσθεση

ITERATE για τα $n$: $x[k]$ & $h[n-k]$ έχουν επικάλυψη

**Για πεπερασμένα σήματα:**

$x[n]$ διάρκεια $N$
$h[n]$ διάρκεια $M$
$\Longrightarrow$ $y[n] \longrightarrow$ διάρκεια $N+M-1$

**ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΩΣ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΠΙΝΑΚΑ ΕΠΙ ΔΙΑΝΥΣΜΑ:**

$x[0], x[1], \dots, x[N-1]$ $\quad N = 3$

$h[0], h[1], \dots, h[M-1]$ $\quad M = 5$

$N < M$

$$y[n] = \sum_{-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[n-k], \quad n \in [0, N+M-2]$$

ΠΧ

$$\begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ y[2] \\ y[3] \\ y[4] \\ y[5] \\ y[6] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h[0] & 0 & 0 \\ h[1] & h[0] & 0 \\ h[2] & h[1] & h[0] \\ h[3] & h[2] & h[1] \\ h[4] & h[3] & h[2] \\ 0 & h[4] & h[3] \\ 0 & 0 & h[4] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \end{bmatrix}$$

TOEPLITZ

# 2.2. Συνέλιξη – Συνεχής Χρόνος – Ορισμός

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{\Gamma.\mathrm{X}.\mathrm{A}.} \longrightarrow h(t)$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\Gamma.\mathrm{X}.\mathrm{A}} \longrightarrow y(t) = \underbrace{x(t) * h(t)}_{\boxed{\text{CONVOLUTION INTEGRAL}}} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ :

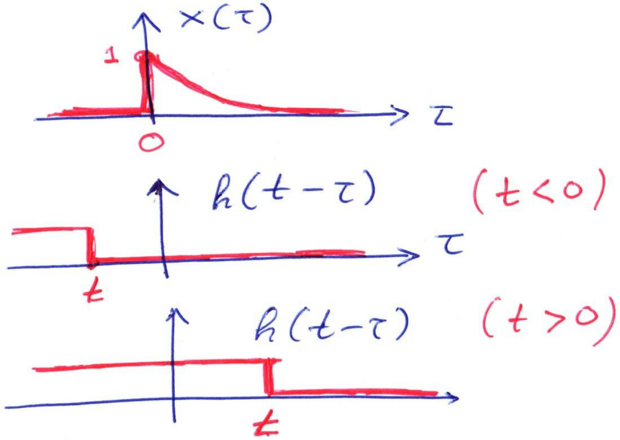
- ΑΝΑΚΛΑΣΗ
- ΜΕΤΑΘΕΣΗ ΣΤΟΝ ΧΡΟΝΟ
- ΠΟΛ/ΣΜΟΣ
- ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΣΕ ΠΕΡΙΟΧΕΣ ΕΠΙΚΑΛΥΨΗΣ

# 2.2. Συνέλιξη – Συνεχής Χρόνος – Παραδείγματα (Ι)

$$x(t) = e^{-at}u(t), \quad a>0$$

$$h(t) = u(t)$$

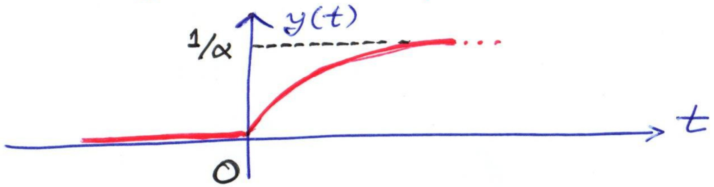



$t<0$: $y(t) = 0, \quad t<0$

$t>0$: $y(t) = \int_0^t e^{-a\tau}d\tau = -\frac{1}{a}e^{-a\tau}\Big|_0^t$

$= \frac{1}{a}(1-e^{-at})$

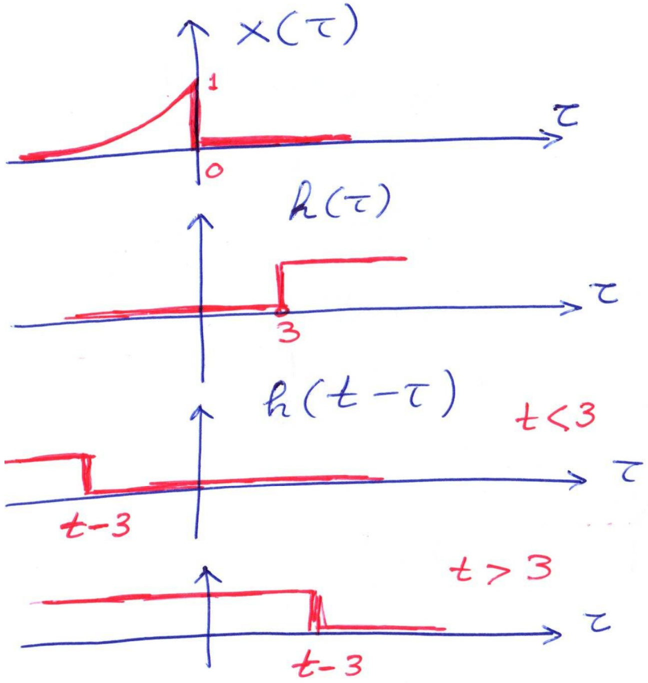
$$y(t) = \frac{1}{a}(1-e^{-at})u(t)$$



# 2.2. Συνέλιξη – Συνεχής Χρόνος – Παραδείγματα (II)

$$x(t) = e^{2t} u(-t)$$

$$h(t) = u(t-3)$$

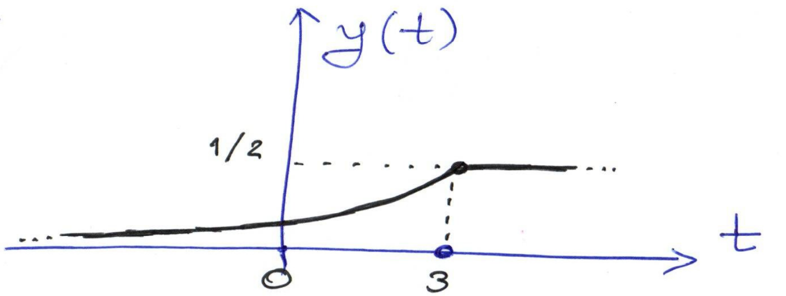



$t<3$:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t-3} e^{2\tau} d\tau = \frac{1}{2} e^{2(t-3)}$$

$t>3$:

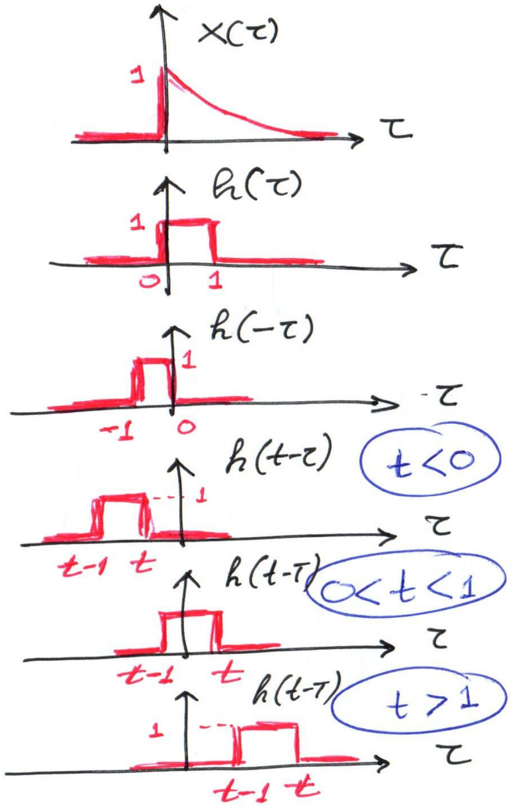
$$y(t) = \int_{-\infty}^{0} e^{2\tau} d\tau = \frac{1}{2}$$



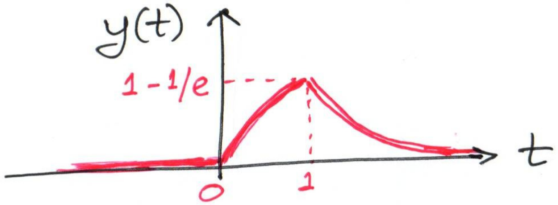
# 2.2. Συνέλιξη – Συνεχής Χρόνος – Παραδείγματα (III)

$$x(t) = e^{-t}u(t)$$

$$h(t) = u(t) - u(t-1)$$




$$y(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ \displaystyle\int_0^t e^{-\tau}d\tau = -e^{-\tau}\Big|_0^t = 1-e^{-t}, & 0<t<1 \\ \displaystyle\int_{t-1}^t e^{-\tau}d\tau = -e^{-\tau}\Big|_{t-1}^t = e^{-t}(e-1), & t>1 \end{cases}$$



# 2.3. Συνέλιξη, Ιδιότητες, και Γ.Χ.Α. Συστήματα

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[n-k] = x[n] * h[n]$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = x(t) * h(t)$$

<u>ΚΡΟΥΣΤΙΚΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ</u> χαρακτηρίζει πλήρως την συμπεριφορά Γ.Χ.Α. συστημάτων

$$\xrightarrow{\delta(t)}_{\delta[n]} \boxed{\text{ΓΧΑ}} \xrightarrow{h(t)}_{h[n]}$$

<u>Προσοχή</u>: Το σύστημα πρέπει να είναι Γ.Χ.Α.

ΠΧ 3 συστήματα:

$y[n] = x[n] + x[n-1]$ ← Γ.Χ.Α.

$y[n] = (x[n] + x[n-1])^2$ ← <u>ΟΧΙ</u>

$y[n] = \max\{x[n], x[n-1]\}$ ← <u>ΟΧΙ</u>

$x[n] = \delta[n]$

$$y[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, 1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

ΙΔΙΑ ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΚΑΙ ΓΙΑ ΤΑ ΤΡΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

## 2.3.A. Ιδιότητες Συνέλιξης

- Αντιμεταθετικότητα (cumulative property)
- Επιμεριστικότητα (distributive property)
- Προσεταιριστικότητα (associative property)
- Γραμμικότητα (linearity)
- Ταυτοτικό στοιχείο (identity element)

# 2.3.Α.α. Ιδιότητες – Αντιμεταθετικότητα

$$\boxed{\begin{aligned} x[n] * h[n] &= h[n] * x[n] \\ x(t) * h(t) &= h(t) * x(t) \end{aligned}}$$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

$$h[n] \longrightarrow \boxed{x[n]} \longrightarrow y[n]$$

ΧΡΗΣΙΜΟ ΓΙΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ

ΑΠΟΔΕΙΞΗ :

$$x[n] * h[n] = \sum_k x[k]\, h[n-k] =$$

$$\underset{\ell = n-k}{=} \sum_\ell x[n-\ell]\, h[\ell]$$

$$= \sum_\ell h[\ell]\, x[n-\ell]$$

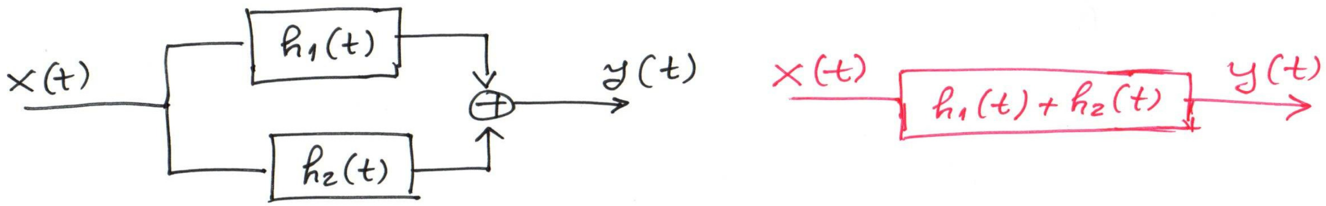
$$= h[n] * x[n]$$

# 2.3.Α.β. Ιδιότητες – Επιμεριστικότητα

$$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$$

$$x(t) * (h_1(t) + h_2(t)) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$

ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΣ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ Γ.Χ.Α. ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΘΕΙ ΑΠΟ ΕΝΑ Γ.Χ.Α. ΣΥΣΤΗΜΑ.




Συνδυασμός αντιμεταθετικότητας & επιμεριστικότητας :

$$(x_1[n] + x_2[n]) * h[n] = x_1[n] * h[n] + x_2[n] * h[n]$$

ΧΡΗΣΙΜΟ ΣΤΟΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ

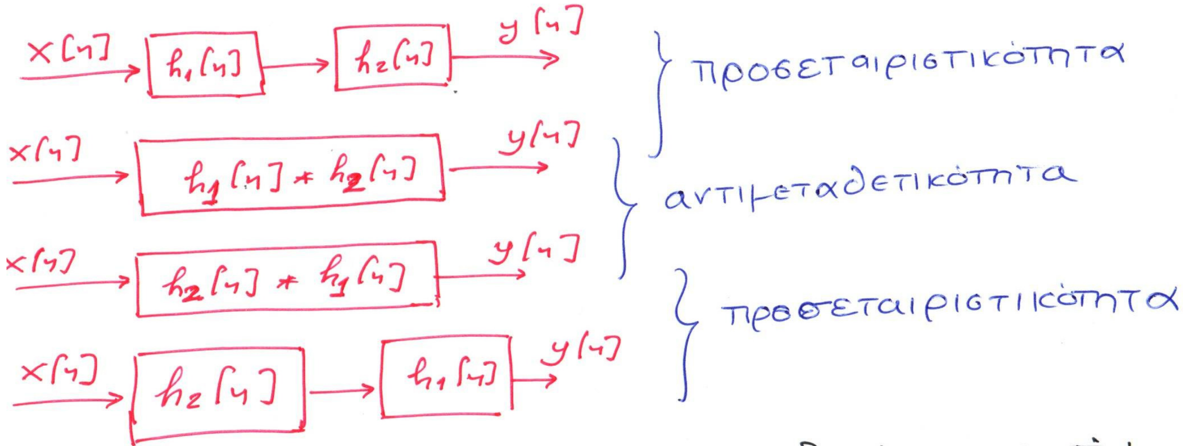
# 2.3.Α.γ. Ιδιότητες – Προσεταιριστικότητα

$$x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n]$$

$$x(t) * (h_1(t) * h_2(t)) = (x(t) * h_1(t)) * h_2(t)$$

---

οι παρενθέσεις δηλαδή δεν χρειάζονται....




Η σειρά δηλαδή των υποσυστημάτων δεν έχει σημασία

Φυσικά, πρέπει να είναι Γ.Χ.Α. ⚠

πχ

SYS1: $y(t) = 2x(t)$

SYS2: $y(t) = x^2(t)$ ↳ ΟΧΙ ΓΧΑ

1→2: $y(t) = 4x^2(t)$

$\updownarrow \neq$

2→1: $y(t) = 2x^2(t)$

# 2.3.Α.δ. Ιδιότητες – Γραμμικότητα, κ.α.

Γραμμική ιδιότητα :

$$x[n] * [c_1 h_1[n] + c_2 h_2[n]] =$$

$$= c_1 \, x[n] * h_1[n] \; + \; c_2 \, x[n] * h_2[n]$$

Ταυτοτικό στοιχείο : $\delta[n]$, $\delta(t)$

$$x[n] * \delta[n] = x[n]$$

$$x(t) * \delta(t) = x(t)$$

Μετατόπιση :

$$x[n] * \delta[n-n_0] = x[n-n_0]$$

$$x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$$

## 2.3.Β. Κρουστική Απόκριση και Ιδιότητες Γ.Χ.Α. Συστημάτων

- Συστήματα χωρίς μνήμη (memory-less systems)
- Αιτιατά συστήματα (causal systems)
- Αντιστρέψιμα συστήματα (invertible systems)
- Ευσταθή συστήματα (stable systems)

Τι σημαίνουν οι παραπάνω ιδιότητες για την κρουστική απόκριση του συστήματος;

# 2.3.Β.α. Γ.Χ.Α. Ιδιότητες – Συστήματα Χωρίς Μνήμη

Υπενθύμιση : Χωρίς μνήμη, αν σε κάθε χρονική στιγμή, η έξοδος εξαρτάται από την είσοδο την ίδια χρονική στιγμή.

Εφικτό μόνο αν $\boxed{h[n]=0,\ \forall n\neq 0}$ δηλ. $\boxed{h[n]=K\delta[n]}$ — $K = h[0]$

$h(t)=0,\ \forall t\neq 0$ δηλ. $h(t)=K\delta(t)$

# 2.3.Β.β. Γ.Χ.Α. Ιδιότητες – Αιτιατά Συστήματα (Ι)

Υπενθύμιση: Η έξοδος σε κάθε χρονική στιγμή εξαρτάται μόνο από την είσοδο στο παρόν κ παρελθόν
— όχι στο μέλλον.

Κατά συνέπεια: $y[n]$ δεν εξαρτάται από $x[k]$ για $k>n$

δηλαδή τα $h[n-k]=0, \ \forall\, k>n$

δηλ: $\boxed{h[n]=0 \quad \forall\, n<0}$

Λογικό.... η κρουστική απόκριση είναι μηδέν πριν εφαρμοστεί το $\delta[n]$ στο σύστημα.

Άρα, για αιτιατά συστήματα:
$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]h[n-k] = \sum_{k=0}^{+\infty} h[k]x[n-k]$$

Για συνεχή χρόνο: $\boxed{h(t)=0 \quad \forall\, t<0}$, $\boxed{y(t)=\int_0^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau}$

ΑΙΤΙΑΤΟΤΗΤΑ

# 2.3.Β.β. Γ.Χ.Α. Ιδιότητες – Αιτιατά Συστήματα (ΙΙ)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ :

$h(t) = \delta(t - t_0)$ για $t_0 < 0$ ΜΗ ΑΙΤΙΑΤΟ

$$h[n] = \begin{cases} n+3, & -2 \leq n \leq 2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$ ΜΗ ΑΙΤΙΑΤΟ

$h[n] = u[n]$ ΑΙΤΙΑΤΟ

$h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$ ΑΙΤΙΑΤΟ

# 2.3.Β.γ. Γ.Χ.Α. Ιδιότητες – Αντιστρέψιμα Συστήματα

$$x(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \xrightarrow{y(t)} \boxed{h_I(t)} \rightarrow \omega(t) = x(t)$$

Αν ένα Γ.Χ.Α. σύστημα είναι αντιστρέψιμο, τότε και το αντίστροφό του είναι Γ.Χ.Α!

Προφανώς:

$$h(t) * h_I(t) = \delta(t)$$

$$h[n] * h_I[n] = \delta[n]$$

• Παραδείγματα:

(1) $y(t) = x(t - t_0) \rightsquigarrow \boxed{h_I(t) = \delta(t + t_0)}$

$h(t) = \delta(t - t_0)$

(2) $h[n] = u[n] \rightsquigarrow y[n] = \sum_{-\infty}^{+\infty} x[k]u[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \longrightarrow \boxed{h_I[n] = \delta[n] - \delta[n-1]}$

# 2.3.Β.δ. Γ.Χ.Α. Ιδιότητες – Ευσταθή Συστήματα (Ι)

Υπενθύμιση: ΦΕΦΕ ευστάθεια όταν

$$|x[n]| < B,\ \forall n \Longrightarrow |y[n]| < C \quad \forall n$$

ABSOLUTE SUMMABILITY

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| < \infty \quad (*) \Longleftrightarrow \boxed{\text{BIBO STABILITY}}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ $[\Longrightarrow]$

$$|y[n]| = \left|\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k]\right| \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]||x[n-k]| \leq B\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|h[k]|$$

$[\Longleftarrow]$

$x[n] = \mathrm{sgn}(h[-n]) \rightsquigarrow |x[n]| \leq 1$ φραγμένη είσοδος

$$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{sgn}(h[-k])\,h[-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[-k]| = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]|$$

Αν δεν ισχύει η $(*)$, τότε φραγμένη είσοδος δημιουργεί μη φραγμένη έξοδο

# 2.3.Β.δ. Γ.Χ.Α. Ιδιότητες – Ευσταθή Συστήματα (II)

ABSOLUTE INTEGRABILITY :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\,dt < \infty} \iff \text{BIBO STABLE}$$

$$|y(t)| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau\right| \le \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|\,|x(t-\tau)|\,d\tau$$

φραγμένη είσοδος

$$\le B\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|\,d\tau \longrightarrow$$

φραγμένη έξοδος

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ :

DELAY

$h[n] = \delta[n-n_0] \rightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| = 1 < \infty$ ΕΥΣΤΑΘΕΣ

$h(t) = \delta(t-t_0) \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\delta(\tau-\tau_0)|\,d\tau = 1 < \infty$ ΕΥΣΤΑΘΕΣ

ACCUMULATOR

$h[n] = u[n] \longrightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| = \sum_{n=0}^{\infty} 1 = +\infty$ ΑΣΤΑΘΕΣ

INTEGRATOR

$h(t) = u(t) \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\,dt = \int_{0}^{+\infty} dt = +\infty$ ΑΣΤΑΘΕΣ

# 2.3.Γ. Βηματική Απόκριση – Unit Step Response

$$u[n] \longrightarrow \boxed{\Gamma X A} \longrightarrow s[n]$$

$$s[n] = u[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k]$$

$$h[n] = s[n] - s[n-1]$$

$$u(t) \longrightarrow \boxed{\Gamma X A} \longrightarrow s(t)$$

$$s(t) = u(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\,d\tau$$

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$

# 2.4. Διαφορικές Εξισώσεις και Εξισώσεις Διαφορών για Περιγραφή Αιτιατών Γ.Χ.Α. Συστημάτων

ΣΥΝΕΧΗΣ ΧΡΟΝΟΣ:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

Συνθήκες αρχικής ηρεμίας (initial rest):

$$y(t_0) = \frac{dy(t_0)}{dt} = \cdots = \frac{d^{N-1} y(t_0)}{dt^{N-1}} = 0$$

ΔΙΑΚΡΙΤΟΣ ΧΡΟΝΟΣ:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$