ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

ΘΕΩΡΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Γεράσιμος Ποταμιάνος

Αναπλ. Καθηγητής,
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

http://www.inf.uth.gr/~gpotamianos

ΘΕΩΡΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Ενότητα 1Β: ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

1.4. Εισαγωγή / Παραδείγματα Συστημάτων
1.5. Συνδυασμοί Συστημάτων
1.6. Ιδιότητες Συστημάτων
1.7. Βασικά Συστήματα

1.4. Εισαγωγή / Παραδείγματα Συστημάτων (Ι)

ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΧΡΟΝΟΥ :

$$x(t) \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow y(t) = \mathcal{T}[x(t)]$$

ΣΥΣΤΗΜΑ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ :

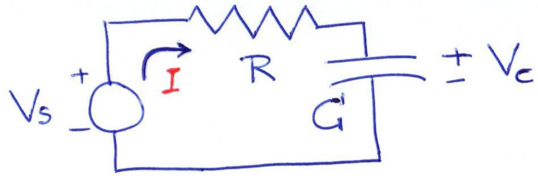
$$x[n] \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow y[n] = \mathcal{T}[x[n]]$$

ΕΙΣΟΔΟΣ — ΣΥΣΤΗΜΑ — ΕΞΟΔΟΣ

- Μετασχηματίζει σήμα εισόδου σε σήμα εξόδου

1.4. Εισαγωγή / Παραδείγματα Συστημάτων (II)

ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΚΥΚΛΩΜΑ RC:

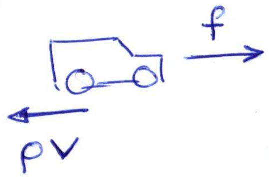


$$\left.\begin{aligned} i(t) &= \frac{V_s(t) - V_c(t)}{R} \\ i(t) &= C\,\frac{dV_c(t)}{dt} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

$$\left(V_s(t) \longrightarrow \boxed{RC} \longrightarrow V_c(t) \right) \Longrightarrow \boxed{\frac{dV_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC} V_c(t) = \frac{1}{RC} V_s(t)}$$

ΕΞΟΔΟΣ ΕΙΣΟΔΟΣ

• ΑΥΤΟΚΙΝΗΤΟ:



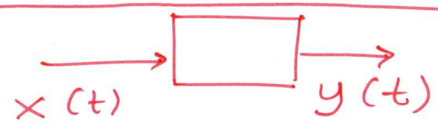
$$m\,\frac{dv(t)}{dt} = f(t) - \rho v(t)$$

$$\left(f(t) \longrightarrow \boxed{AUTO} \longrightarrow v(t) \right) \Longrightarrow \boxed{\frac{dv(t)}{dt} + \frac{\rho}{m} v(t) = \frac{1}{m} f(t)}$$

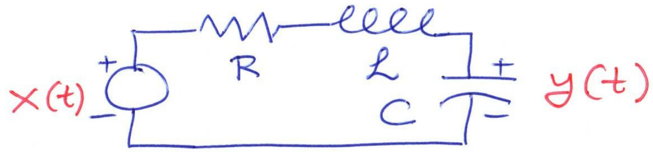
1.4. Εισαγωγή / Παραδείγματα Συστημάτων (III)

- Και στις δύο περιπτώσεις η σχέση εισόδου/εξόδου δίνεται από γραμμική διαφορική εξίσωση (1ης τάξης):

$$\boxed{\frac{dy(t)}{dt} + a\,y(t) = b\,x(t)}$$



- Προφανώς, πιο πολύπλοκα συστήματα, μπορεί να δώσουν / περιγραφούν από εξίσωση ανώτερης τάξης, πχ



- Αντίστοιχα, για τα συστήματα διακριτού χρόνου → $\boxed{\text{ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ}}$

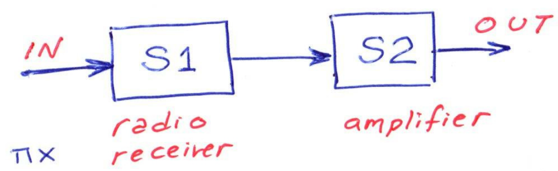
$$y[n] = \frac{100 + \text{επιτόκιο}(\%)}{100} \cdot y[n-1] + x[n]$$

$$\Rightarrow y[n] - \underbrace{\frac{100+\text{επ}\%}{100}}_{a}\, y[n-1] = \underbrace{1}_{b} \cdot x[n]$$

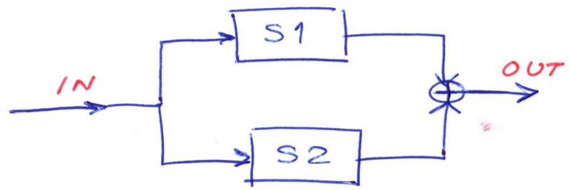
1.5. Συνδυασμοί Συστημάτων (I)

Τα συστήματα μπορούν να αποτελούνται και απο υποσυστήματα (κατάλληλα συνδεδεμένα) που μπορούν να αναλυθούν πιό εύκολα [BLOCK DIAGRAMS]

- ΣΕΙΡΙΑΚΗ ΣΥΝΔΕΣΗ
(CASCADE INTERCONNECTION)

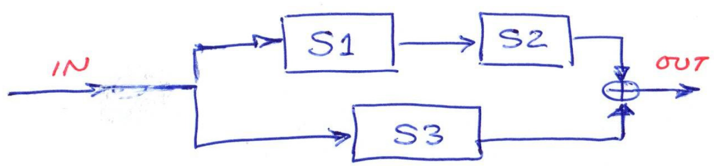


- ΠΑΡΑΛΛΗΛΗ ΣΥΝΔΕΣΗ
(PARALLEL INTERCONNECTION)



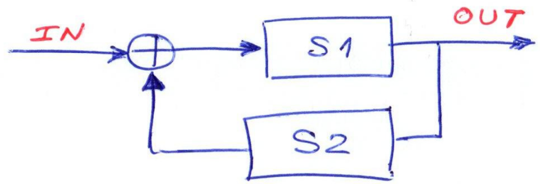
πχ. several amplifiers/speakers

- ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ ΑΥΤΩΝ

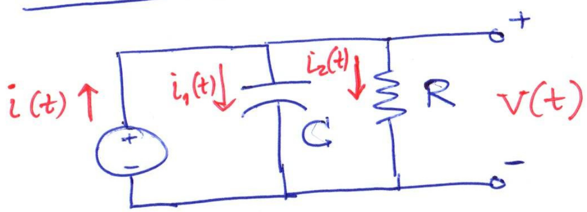


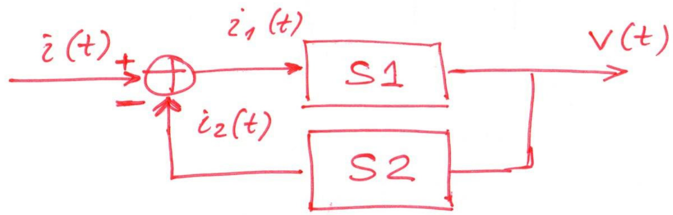
1.5. Συνδυασμοί Συστημάτων (II)

- ΑΝΑΔΡΑΣΗ / ΑΝΑΤΡΟΦΟΔΟΤΗΣΗ :
  (FEEDBACK INTERCONNECTION)



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ :





"⊕" $i_1(t) = i(t) - i_2(t)$

"S1" $V(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_1(\tau)\,d\tau$

"S2" $i_2(t) = \frac{V(t)}{R}$

1.6. Ιδιότητες Συστημάτων

- Μνήμη.
- Αιτιατότητα
- Αντιστρεψιμότητα.
- Ευστάθεια.
- Χρονική Αμεταβλητότητα.
- Γραμμικότητα.
- Γ.Χ.Α. Συστήματα.

1.6.α. Συστήματα με / χωρίς Μνήμη (Ι)

- Συστήματα ΧΩΡΙΣ μνήμη :
  MEMORYLESS SYSTEMS
  (SYSTEMS WITHOUT MEMORY)

Έξοδος εξαρτάται μόνο από την είσοδο της ίδιας χρονικής στιγμής [ούτε παρελθόν ούτε μέλλον]

πχ: κύκλωμα αντίστασης $y(t) = R\,x(t)$

VOLTAGE — CURRENT

πχ: $y[n] = \left(2x[n] - x^2[n]\right)^2$

πχ: ΤΑΥΤΟΤΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ (IDENTITY SYSTEM)

$y(t) = x(t)$

$y[n] = x[n]$

1.6.α. Συστήματα με / χωρίς Μνήμη (ΙΙ)

- ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΜΝΗΜΗ : (SYSTEMS WITH MEMORY) Έξοδος εξαρτάται και από χρονικές στιγμές του παρελθόντος ή/και του μέλλοντος.

- Π.χ. Αθροιστής (accumulator) $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] = y[n-1] + x[n]$

  Καθυστερητής (delay) $y[n] = x[n-1]$

  Ομαλοποιητής (smoother/averaging) $y[n] = \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-M}^{+M} x[n-k]$

  Ολοκληρωτής (integrator) $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$

1.6.β. Αιτιατότητα

- ΑΙΤΙΑΤΟ / ΑΙΤΙΑΤΟΤΗΤΑ: (CAUSAL / CAUSALITY) [NON-ANTICIPATIVE SYSTEM] Η έξοδος εξαρτάται σε κάθε χρονική στιγμή από το σήμα εισόδου στο παρελθόν και στο παρόν / ΟΧΙ ΣΤΟ ΜΕΛΛΟΝ

- ΜΗ ΑΙΤΙΑΤΟ (NON-CAUSAL): Όταν υπάρχει εξάρτηση της εξόδου και από μελλοντικές τιμές.

- ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:
  - ΧΩΡΙΣ ΜΝΗΜΗ ⇒ ΑΙΤΙΑΤΟΤΗΤΑ
  - $y(t) = x(t)\cos(t+1)$ ⇝ ΕΙΝΑΙ ΑΙΤΙΑΤΟ
  - $y(t) = x(t+1)$ ⇝ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ
  - $y[n] = x[-n]$ ⇝ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ γιατί; $n<0$ εξάρτηση από το μέλλον για

1.6.γ. Αντιστρεψιμότητα

- Διαφορετικές είσοδοι $\Longrightarrow$ Διαφορετικές έξοδοι

- Εν σειρά σύνδεση αρχικού αντιστρέψιμου συστήματος και του αντιστροφού του μας δίνει ως έξοδο την αρχική είσοδο

$$x[n] \rightarrow \boxed{\text{SYSTEM}} \xrightarrow{y[n]} \boxed{\text{INVERSE SYSTEM}} \rightarrow w[n]$$

$$w[n] = x[n]$$

- ΠΧ

ΑΡΧΙΚΟ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ

$$x(t) \rightarrow \boxed{y(t) = 2x(t)} \xrightarrow{y(t)} \boxed{w(t) = \tfrac{1}{2}y(t)} \rightarrow w(t) = x(t)$$

- $$x[n] \rightarrow \boxed{y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]} \xrightarrow{y[n]} \boxed{w[n] = y[n] - y[n-1]} \rightarrow w[n] = x[n]$$

- ΜΗ ΑΝΤΙΣΤΡΕΨΙΜΑ: $y[n] = 0$

  $y(t) = x^2(t)$

- ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΣΗΜΑΣΙΑ

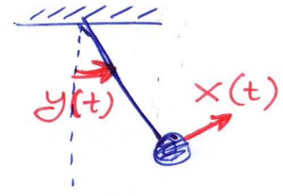
  ΠΧ lossless encoding

$$\rightarrow \boxed{\text{enc.}} \rightarrow \boxed{\text{dec.}} \rightarrow$$

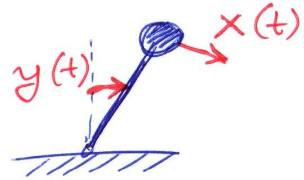
1.6.δ. Ευστάθεια (Ι)

- **Ευστάθεια**: Επιθυμούμε "μικρές" τιμές εισόδου όταν αυξάνονται να μην δημιουργούν αποκρίσεις που να αυξάνουν χωρίς όριο

"ΔΙΑΙΣΘΗΤΙΚΑ"
(informally)



"ευσταθές"
(STABLE)
λόγω βαρύτητας



"ασταθές"
(UNSTABLE)

- **ΟΡΙΣΜΟΣ**

ΣΥΣΤΗΜΑ ΦΕΦΕ - ΕΥΣΤΑΘΕΣ → [Φραγμένη Είσοδος, Φραγμένη Έξοδος]

BIBO SYSTEM STABILITY → [Bounded-Input, Bounded-Output]

$$|x[n]| \le B_x, \forall n \Longrightarrow \exists B_y, \text{s.t.: } |y[n]| \le B_y \quad \forall n$$

$$|x(t)| \le B_x, \forall t \Longrightarrow \exists B_y, \text{s.t.: } |y(t)| \le B_y, \forall t$$

1.6.δ. Ευστάθεια (ΙΙ)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ :

- $y(t) = t\,x(t)$ ΑΣΤΑΘΕΣ

Μπορούμε να βρούμε φραγμένη είσοδο που δίνει μη φραγμένη έξοδο

$x(t) = 1 \Longrightarrow y(t) = t$

↳ ΦΡΑΓΜΕΝΟ ΣΗΜΑ (B_x = 1)

ΜΗ ΦΡΑΓΜΕΝΗ ΕΞΟΔΟΣ

- $y(t) = e^{x(t)}$ ΕΥΣΤΑΘΕΣ

$|x(t)| < B_x \Rightarrow e^{-B_x} < |y(t)| < e^{B_x}, \ \forall t$

$\forall t$

$\hookrightarrow B_y$

1.6.δ. Χρονικά Αναλλοίωτα Συστήματα (I)

- Συμπεριφορά/χαρακτηριστικά συστήματος δεν αλλάζουν με τον χρόνο } "INFORMAL" "ΔΙΑΙΣΘΗΤΙΚΑ"

- ΟΡΙΣΜΟΣ: Χρονική μετατόπιση σήματος εισόδου συνεπάγεται αντίστοιχη χρονική μετατόπιση σήματος εξόδου

$$x[n] \xrightarrow{S} y[n] \implies x[n-n_0] \xrightarrow{S} y[n-n_0]$$

$$x(t) \xrightarrow{S} y(t) \implies x(t-t_0) \xrightarrow{S} y(t-t_0)$$

1.6.δ. Χρονικά Αναλλοίωτα Συστήματα (ΙΙ)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

$$y(t) = \sin(x(t))$$

ΕΙΝΑΙ!

INPUT SHIFT: $x(t-t_0) \longrightarrow \sin(x(t-t_0)) = y(t-t_0)$

OUTPUT of shifted input

ORIGINAL OUTPUT SHIFT

$$y[n] = n\,x[n]$$

ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ!

ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$x_1[n] = \delta[n] \Longrightarrow y_1[n] = n\,\delta[n] = 0$

SHIFT of 0 CANNOT GIVE

$x_2[n] = \delta[n-1] \Longrightarrow y_2[n] = n\,\delta[n-1] = \delta[n-1]$

INPUT SHIFT

OUTPUT OF SHIFTED INPUT

$\neq$

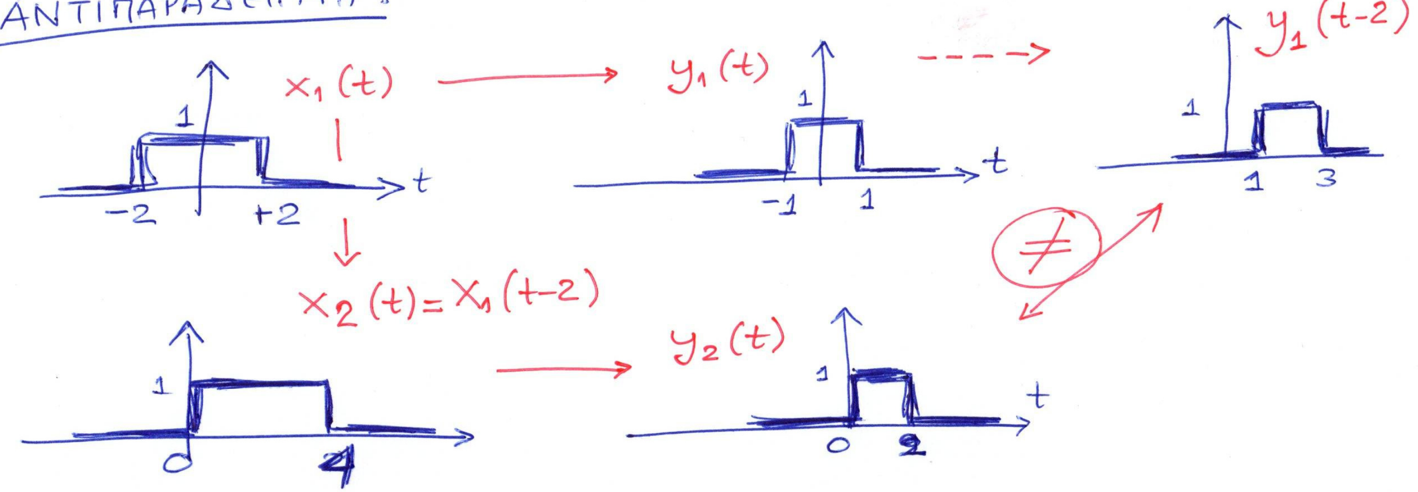
1.6.δ. Χρονικά Αναλλοίωτα Συστήματα (III)

- $y(t) = 2x(t)$ ΕΙΝΑΙ!

$$\underset{\text{ΕΙΣΟΔΟΣ}}{x(t-t_0)} \longrightarrow \underset{\text{ΕΞΟΔΟΣ}}{2x(t-t_0)} = y(t-t_0)$$

- $y(t) = x(2t)$ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ!

ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:



1.6.ε. Γραμμικότητα (Ι)

"ΔΙΑΙΣΘΗΤΙΚΑ" INFORMALLY

Γραμμικός συνδυασμός εισόδων
$\Downarrow$
Γραμμικός συνδυασμός εξόδων

ΟΡΙΣΜΟΣ

1) ΠΡΟΣΘΕΤΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ (additive):

$$x_1[n] \to y_1[n], \quad x_2[n] \to y_2[n] \Longrightarrow x_1[n] + x_2[n] \to y_1[n] + y_2[n]$$

2) ΚΛΙΜΑΚΩΣΗ (scaling/homogeneity):

$$x[n] \to y[n] \Longrightarrow ax[n] \to ay[n]$$

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ: » $\Longrightarrow ax_1[n] + \beta x_2[n] \to ay_1[n] + \beta y_2[n]$

ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ: $\left(\sum_k a_k x_k[n]\right) \to \left(\sum_k a_k y_k[n]\right)$

1.6.ε. Γραμμικότητα (ΙΙ)

- Αντίστοιχα για συστήματα συνεχή χρόνου: $x_k(t) \to y_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$

$$\Downarrow$$

$$\sum_k a_k x_k(t) \to \sum_k a_k y_k(t)$$

[ΑΡΧΗ ΕΠΑΛΛΗΛΙΑΣ
SUPERPOSITION PROPERTY]

- Για γραμμικά συστήματα: Μηδενική είσοδος ⇒ Μηδενική έξοδος

πχ: $x[n] \to y[n] \Rightarrow \underbrace{0 \cdot x[n]}_{0,\ \forall n} \to \underbrace{0 \cdot y[n]}_{0,\ \forall n}$

(αντίστοιχα για συνεχή χρόνο)

1.6.ε. Γραμμικότητα (III)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ :

$$y(t) = t\,x(t)$$

ΕΙΝΑΙ ΓΡΑΜΜΙΚΟ

$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = t\,x_1(t)$

$x_2(t) \rightarrow y_2(t) = t\,x_2(t)$

$x_3(t) = a x_1(t) + \beta x_2(t) \longrightarrow$

$\longrightarrow y_3(t) = t\,(a x_1(t) + \beta x_2(t)) =$

$= a\,t\,x_1(t) + \beta\,t\,x_2(t) =$

$= a\,y_1(t) + \beta\,y_2(t)$

• $y(t) = x^2(t)$

ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟ

$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = x_1^2(t)$

$x_2(t) \rightarrow y_2(t) = x_2^2(t)$

$x_3(t) = a x_1(t) + \beta x_2(t) \longrightarrow$

$\longrightarrow y_3(t) = (a x_1(t) + \beta x_2(t))^2 = a^2 x_1^2(t) + \beta^2 x_2^2(t) + 2a\beta\, x_1(t) \cdot x_2(t)$

$= a^2 y_1(t) + \beta^2 y_2(t) + 2a\beta\, x_1(t)\, x_2(t)$

$\neq a\,y_1(t) + \beta\,y_2(t)$ [εν γένει]

1.6.ε. Γραμμικότητα (IV)

- $y[n] = \mathrm{Re}\{x[n]\}$ [ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟ]

Απόδειξη με αντιπαράδειγμα:

REAL

$$x_1[n] = r[n] + j\,s[n] \longrightarrow y_1[n] = r[n]$$

$a = j$

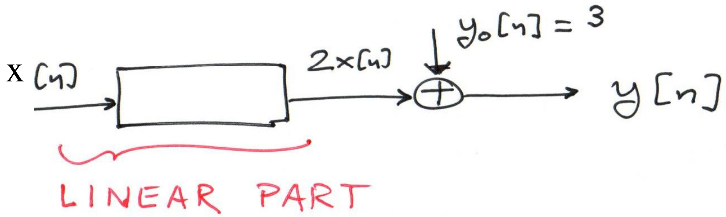
$$x_2[n] = a\,x_1[n] = -s[n] + j\,r[n] \longrightarrow y_2[n] = -s[n]$$

$$\neq$$

$$j\,y_1[n] = j\,r[n]$$

- $y[n] = 2x[n] + 3$ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟ

$$x_1[n] + x_2[n] \longrightarrow 2x_1[n] + 2x_2[n] + 3 \neq \underbrace{2x_1[n] + 2x_2[n] + 6}_{y_1[n] + y_2[n]}$$



1.6.στ. Γ.Χ.Α. Συστήματα

Γραμμικά Χρονικά Αναλλοίωτα (Αμετάβλητα) Συστήματα (Γ.Χ.Α.)

Linear Time Invariant (L.T.I.) Systems -- ή --

Linear Shift Invariant (L.S.I.) Systems

- Παρουσιάζουν και τις δύο τελευταίες ιδιότητες
  - Χρονική αμεταβλητότητα.
  - Γραμμικότητα.
- Επιτρέπουν περιγραφή συστήματος μέσω της κρουστικής απόκρισης (h[n] , h(t))

1.7. Βασικά Συστήματα

	ΣΥΝΕΧΗΣ ΧΡΟΝΟΣ	ΔΙΑΚΡΙΤΟΣ ΧΡΟΝΟΣ
Διαφοριστής/ Διαφορά [Differentiator / Difference]	$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$	$y[n] = x[n] - x[n-1]$
Ολοκληρωτής/ Αθροιστής [Integrator / Accumulator]	$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$	$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} x[m]$
Καθυστερητής [Delay]	$y(t) = x(t - t_0)$	$y[n] = x[n - n_0]$
Ταυτοτικό [Identity]	$y(t) = x(t)$	$y[n] = x[n]$
Τρέχων μέσος [Moving average]	$y(t) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t-\tau)\,d\tau$	$y[n] = \frac{1}{2M+1} \sum_{m=-M}^{M} x[n-m]$