ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

ΘΕΩΡΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Γεράσιμος Ποταμιάνος

Αναπλ. Καθηγητής,
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

http://www.inf.uth.gr/~gpotamianos

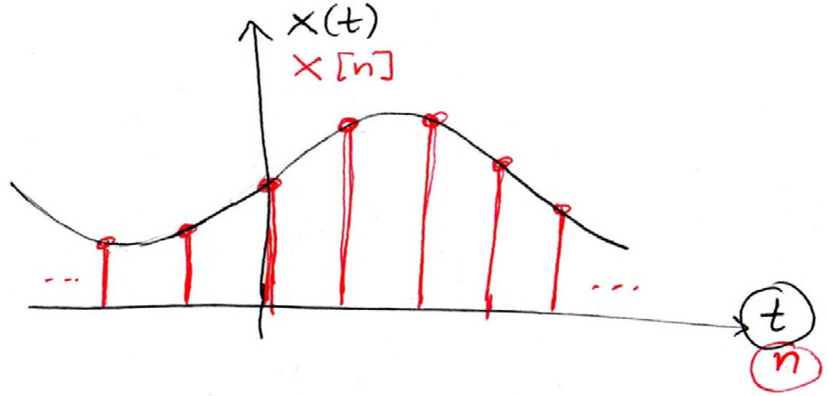
ΘΕΩΡΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Ενότητα 1Α: ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

1.1. Μετασχηματισμοί Ανεξάρτητης Μεταβλητής
1.2. Ιδιότητες Σημάτων
1.3. Βασικά Σήματα

1.0. Σήματα Συνεχούς & Διακριτού Χρόνου

- ΣΗΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΧΡΟΝΟΥ: $x(t)$
- ΣΗΜΑΤΑ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ: $x[n]$



1.1. Μετασχηματισμοί Σημάτων (Ι)

Μετατροπές ανεξάρτητης μεταβλητής:

$$x(t) \longrightarrow x(at+\beta)$$

Μετατροπές πλάτους:

$$x(t) \longrightarrow r\,x(t) + g \qquad (\kappa.\tau.\lambda.)$$

Μετατροπή "χρόνου" & πλάτους:

$$x(t) \longrightarrow r\,x(at+\beta) + g$$

1.1. Μετασχηματισμοί Σημάτων (ΙΙ)

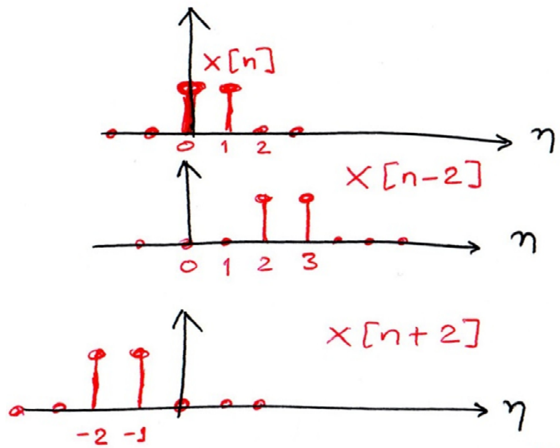
- Χρονική Μετατόπιση:
  (time shift)

$x[n] \to x[n-n_0]$

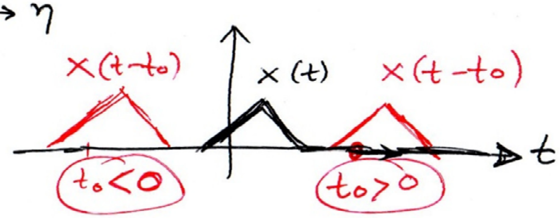
$x(t) \to x(t-t_0)$

$n_0, t_0 > 0 \Rightarrow$ ΚΑΘΥΣΤΕΡΗΣΗ (delay)

$n_0, t_0 < 0 \Rightarrow$ ΠΡΟΑΓΩΓΗ (advancement)

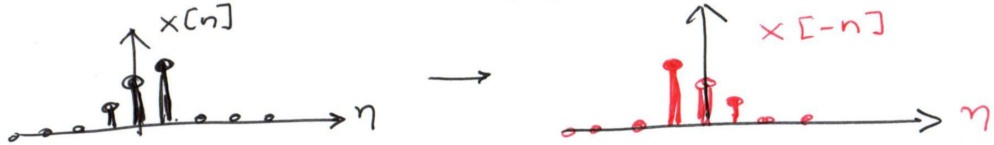


- Δεν αλλάζει το "σχήμα" του σήματος – απλώς μετατοπίζεται



1.1. Μετασχηματισμοί Σημάτων (ΙΙΙ)

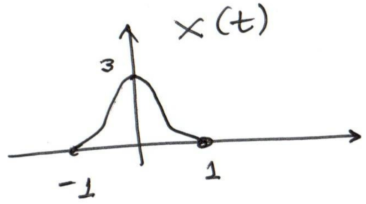
- Ανάκλαση: $x[n] \to x[-n]$
  (time reversal) $x(t) \to x(-t)$

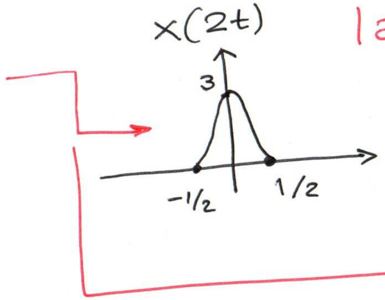


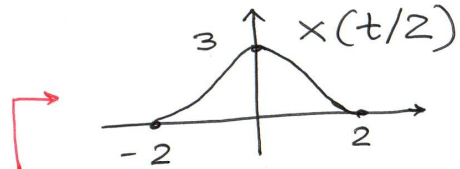
- Χρονική κλιμάκωση: $x(t) \to x(at)$
  (time scaling)

$|a| > 1 \to$ ΣΥΣΤΟΛΗ COMPRESS

$|a| < 1 \to$ ΔΙΑΣΤΟΛΗ STRETCH



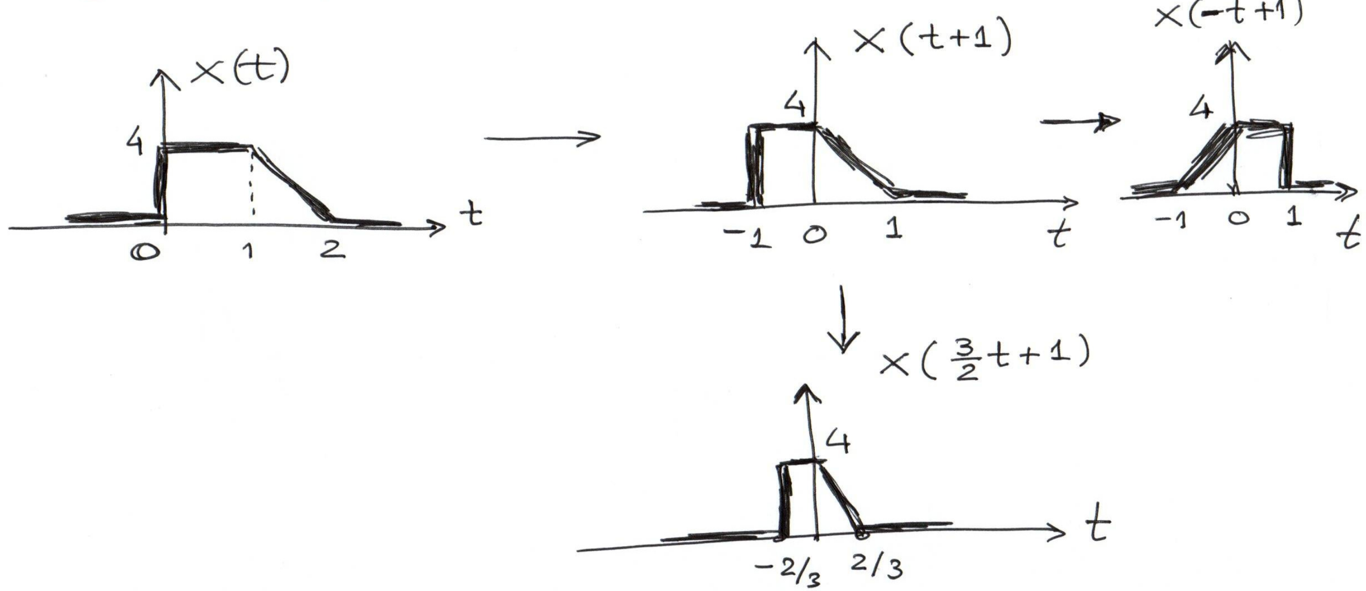




1.1. Μετασχηματισμοί Σημάτων (IV)

- ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΠΑΝΩ: $x(t) \longrightarrow x(at+\beta)$
  - $|a|>1 \rightarrow$ COMPRESSION
    $|a|<1 \rightarrow$ STRETCHING
  - $a<0 \longrightarrow$ TIME REVERSAL
  - $\beta \neq 0 \longrightarrow$ TIME SHIFT

- ΣΕΙΡΑ:
  - TIME SHIFT πρώτα
  - SCALING μετά



1.2. Ιδιότητες Σημάτων (Ι)

- Πεπερασμένης / άπειρης διάρκειας σήματα.
- Αιτιατά / μή αιτιατά σήματα.
- Ενέργεια και ισχύς σημάτων.
- ‘Αρτια και περιττά σήματα.
- Περιοδικά και μή περιοδικά σήματα.

1.2.α. Ιδιότητες Σημάτων – Διάρκεια (Ι)

ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΗΣ ΔΙΑΡΚΕΙΑΣ:
(finite duration)

$\exists\ n_1 < n_2 :$

$x[n] = 0 \quad \forall\ n < n_1$
$\qquad\qquad\ \ \forall\ n > n_2$

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: $n_2 - n_1 + 1$

$\exists\ t_1 < t_2 :$

$x(t) = 0 \quad \forall\ t < t_1$
$\qquad\qquad\ \ \forall\ t > t_2$

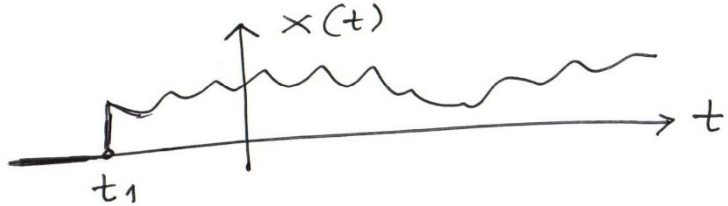
ΔΙΑΡΚΕΙΑ: $t_2 - t_1$

αλλιώς ΑΠΕΙΡΗΣ ΔΙΑΡΚΕΙΑΣ
(infinite duration)

1.2.α. Ιδιότητες Σημάτων – Διάρκεια (ΙΙ)

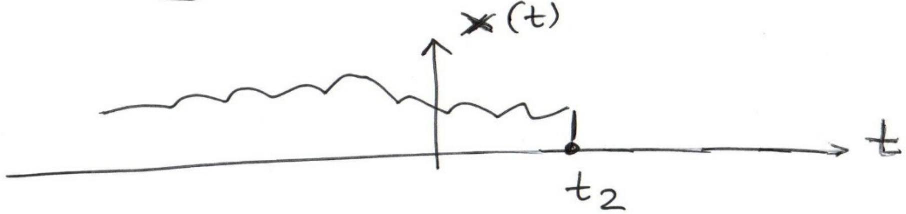
- "ΔΕΞΙΑ" ΑΚΟΛΟΥΘΙΑ / ΣΗΜΑ:

$$\exists\, n_1 : \quad x[n]=0 \quad \forall\, n<n_1$$



- "ΑΡΙΣΤΕΡΗ" ΑΚΟΛΟΥΘΙΑ / ΣΗΜΑ:

$$\exists\, n_2 : \quad x[n]=0 \quad \forall\, n>n_2$$



1.2.α. Ιδιότητες Σημάτων – Αιτιατότητα

- ΑΙΤΙΑΤΑ: (causal) $x[n]=0, \forall n<0$
  $x(t)=0, \forall t<0$
- αλλιώς μή αιτιατά (non-causal)
- Ιδιαίτερα σημαντική για <u>ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ</u>
  (όχι τόσο για σήματα)

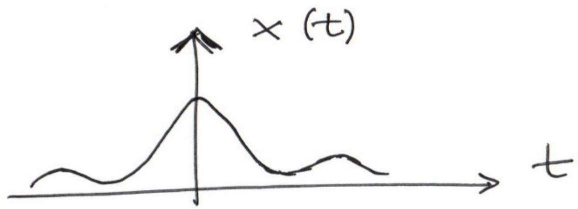
1.2.β. Ιδιότητες Σημάτων – Άρτια / Περιττά (Ι)

- "ΑΡΤΙΑ" ΣΗΜΑΤΑ

  "even"

$$x(t) = x(-t)$$

$$x[n] = x[-n]$$

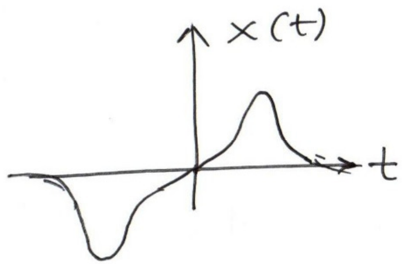


πχ $\cos(\cdot)$

- "ΠΕΡΙΤΤΑ" ΣΗΜΑΤΑ

  "ODD"

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= -x(-t) \\ x[n] &= -x[-n] \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x(0) &= 0 \\ x[0] &= 0 \end{aligned}$$



πχ $\sin(\cdot)$

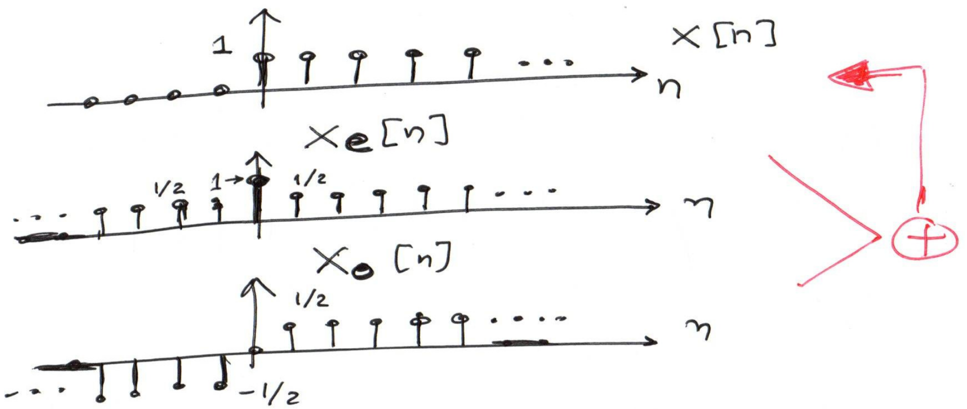
1.2.β. Ιδιότητες Σημάτων – Άρτια / Περιττά (ΙΙ)

Κάθε σήμα μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα άρτιου & περιττού σήματος.

(even + odd decomposition)

- $$x(t) = \underbrace{\frac{1}{2}\left[x(t) + x(-t)\right]}_{\text{EVEN}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left[x(t) - x(-t)\right]}_{\text{ODD}}$$

- ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ



1.2.γ. Ιδιότητες Σημάτων – Ενέργεια / Ισχύς (Ι)

ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΣΕ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ (energy)

$$\int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt \qquad \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2$$

- ΙΣΧΥΣ (power)

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt \qquad \frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{n_1}^{n_2} |x[n]|^2$$

- ΤΑ ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΜΑΣ ΕΝΔΙΑΦΕΡΟΥΝ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ,

ΟΠΟΤΕ . . . .

1.2.γ. Ιδιότητες Σημάτων – Ενέργεια / Ισχύς (ΙΙ)

- ΕΝΕΡΓΕΙΑ (energy):

$$E_\infty = \lim_{T \to \infty} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

$$E_\infty = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2$$

- ΙΣΧΥΣ (power):

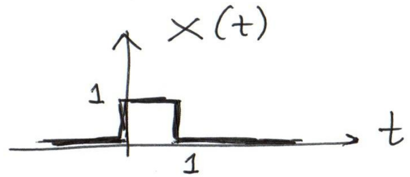
$$P_\infty = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt$$

$$P_\infty = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^{+N} |x[n]|^2$$

1.2.γ. Ιδιότητες Σημάτων – Ενέργεια / Ισχύς (ΙΙΙ)

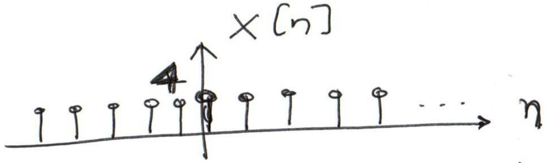
- ΣΗΜΑΤΑ
  - → Ενέργειας: $E_\infty < \infty$, $P_\infty = 0$
  - → Ισχύος: $0 < P_\infty < \infty$ $(\Rightarrow E_\infty = \infty)$
  - → Τίποτε από τα δύο: $E_\infty, P_\infty = \infty$

- ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:



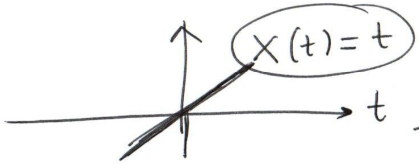
Πεπερασμένης διάρκειας
(μάλλον) ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Πράγματι: $E_\infty = 1$



Περιοδικό ⇝ μάλλον ΙΣΧΥΟΣ

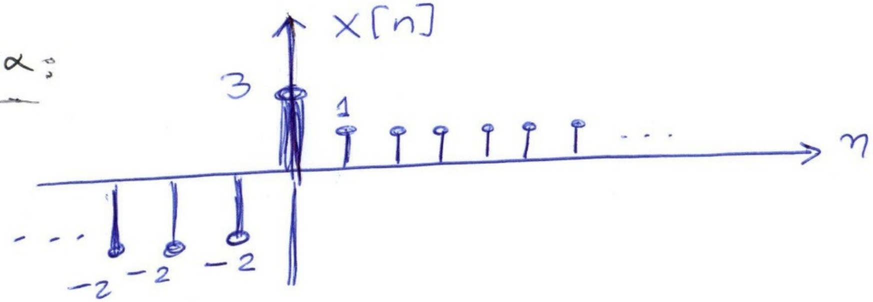
Πράγματι: $P_\infty = 16$



Τίποτε από τα δύο $E_\infty = \infty$, $P_\infty = \infty$

1.2.γ. Ιδιότητες Σημάτων – Ενέργεια / Ισχύς (IV)

- Παραδείγματα:



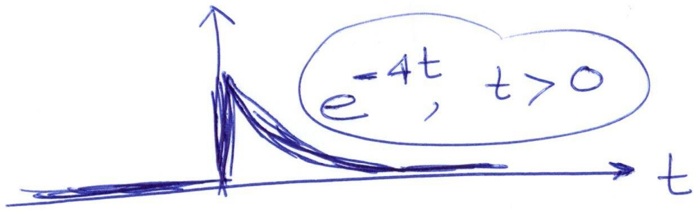
Μάλλον ισχύος ....

$$P_\infty = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{2N+1}\sum_{-N}^{N}|x[n]|^2\right) = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{2N+1}(4N+9+N)\right)$$

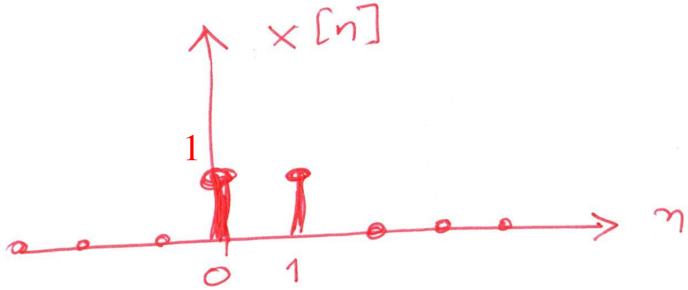
$$= \lim_{N\to\infty}\frac{5N+9}{2N+1} = 2.5$$

1.2.γ. Ιδιότητες Σημάτων – Ενέργεια / Ισχύς (V)

• Παραδείγματα :



$$E_\infty = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{0}^{+\infty} (e^{-4t})^2 dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-8t} dt = -\frac{1}{8} e^{-8t} \Big|_{0}^{+\infty} = \frac{1}{8}$$



$$E_\infty = \sum_{-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = 1 + 1 = 2$$

1.2.γ. Ιδιότητες Σημάτων – Ενέργεια / Ισχύς (VI)

. Παράδειγμα :

RECALL: $\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{8}\right)$$

... μάλλον ισχύος ...

$$\frac{1}{2N+1}\sum_{-N}^{N} \cos^2\left(\frac{\pi n}{8}\right) = \frac{1}{2N+1}\sum_{-N}^{N}\frac{1}{2} + \frac{1}{2N+1}\sum_{-N}^{N}\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{\cancel{2N+1}}\,\frac{\cancel{2N+1}}{2} + \frac{1}{2N+1}\sum_{0}^{N}\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2N+1}\sum_{n=0}^{8\lfloor N/8\rfloor}\left(\cos\frac{\pi n}{4}\right) + \frac{1}{2N+1}\sum_{8\lfloor N/8\rfloor+1}^{N}(\cdot)$$

$N \to \infty$

$$= \frac{1}{2} + 0 + \text{ΟΡΙΟ ΜΗΔΕΝ}$$

P_∞

1.2.δ. Περιοδικότητα (Ι)

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΣΗΜΑ Periodic Signal

$$x(t) = x(t+T), \ \forall t$$

για κάποιο θετικό $T > 0$

αλλιώς μή περιοδικό (aperiodic)

Ισχύει επίσης: $x(t) = x(t + mT)$

↳ m INTEGER

ΒΑΣΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ T_0 (FUNDAMENTAL PERIOD): Το μικρότερο θετικό T για το οποίο ισχύει το παραπάνω

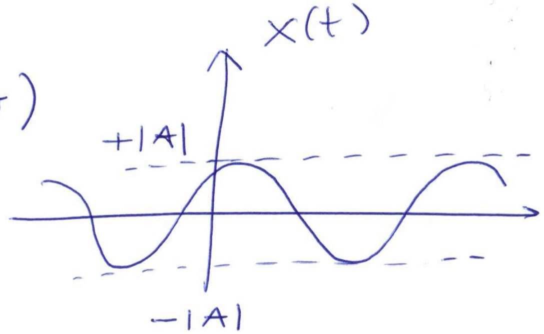
Το σταθερό σήμα θεωρείται περιοδικό αλλά με μή ορισμένο T_0 (undefined)

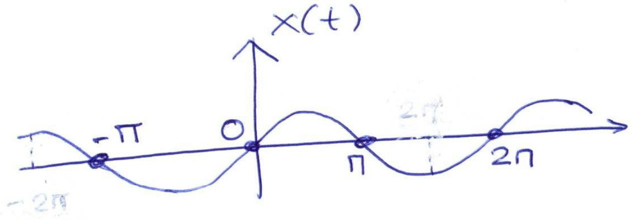
1.2.δ. Περιοδικότητα (ΙΙ)

• ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

• $x(t) = A\cos(\Omega t + \theta)$

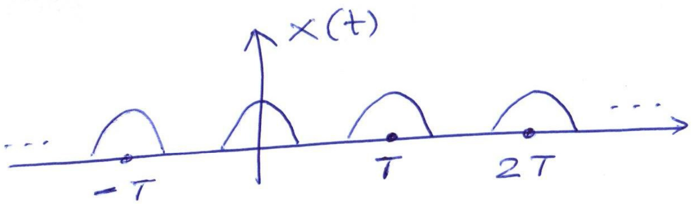
$\hookrightarrow T = \dfrac{2\pi}{|\Omega|}$



• 

$x(t) = \sin(t)$

$\hookrightarrow \boxed{T = 2\pi}$

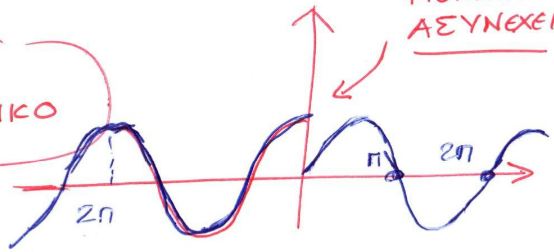
• 

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΜΕ περίοδο T

• $x(t) = \begin{cases} \cos(t), & t < 0 \\ \sin(t), & t \geq 0 \end{cases}$

ΜΗ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ

ΜΟΝΑΔΙΚΗ ΑΣΥΝΕΧΕΙΑ



1.2.δ. Περιοδικότητα (ΙΙΙ)

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΣΗΜΑ — Periodic Signal

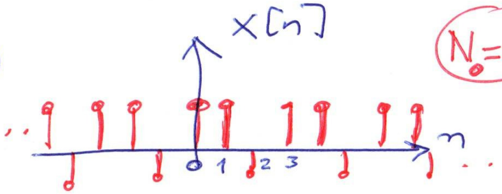
$$x[n]=x[n+N], \quad \forall n$$

για κάποιο $N>0$ (θετικός ακέραιος)

αλλιώς μη περιοδικό (aperiodic)

- Ισχύει επίσης N περίοδος $\Rightarrow$ $2N, 3N, \ldots$ επίσης περίοδοι
- Βασική περίοδος (N_0): Το μικρότερο θετικό N για το οποίο ισχύει το παραπάνω (FUNDAMENTAL PERIOD)

πχ



$N_0=3$

πχ

$$x[n]=A\cos(\omega_0 n+\theta)$$

ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΠΑΝΤΟΤΕ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ

1.2.δ. Ιδιότητες Σημάτων – Περιοδικότητα (IV)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

• $x(t) = \cos(10t + 2) + \sin(4t)$

Περιοδικό με $T_1 = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$

$T_2 = \frac{2\pi}{4} = \pi/2$

Άθροισμα επίσης περιοδικό με

$T = \text{εκπ}\left\{\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{2}\right\} = \pi$

• $x[n] = (-1)^n + \cos\left(\frac{2\pi}{7} n\right)$

$\cos(\pi n)$

$N_1 = 2$

$N_2 = 7$

$N = \text{εκπ}\{2, 7\} = 14$

1.3. Βασικά Σήματα

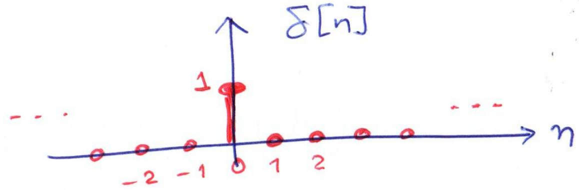
- Μοναδιαίο δείγμα + παλμός.
  - Διακριτός χρόνος: u[n], δ[n]
  - Συνεχής χρόνος: u(t), δ(t)
- Διάφορα άλλα σήματα.
- Εκθετικά / ημιτονοειδή.
  - Συνεχής χρόνος.
  - Διακριτός χρόνος.

1.3.α. Μοναδιαίο δείγμα/παλμός – Διακριτά (I)

ΜΟΝΑΔΙΑΙΟ ΔΕΙΓΜΑ / ΠΑΛΜΟΣ:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

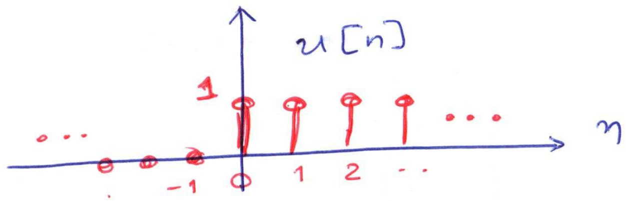
(UNIT IMPULSE / SAMPLE)



ΜΟΝΑΔΙΑΙΟ ΒΗΜΑΤΙΚΟ ΣΗΜΑ:

$$u[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0 \end{cases}$$

(UNIT STEP)



ΣΧΕΣΕΙΣ:

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$$

1.3.α. Μοναδιαίο δείγμα/παλμός – Διακριτά (ΙΙ)

$\delta[n]$ ΧΡΗΣΙΜΟ ΣΤΗΝ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ.

- $x[n]\delta[n] = x[0]\,\delta[n]$ στο 0
- $x[n]\delta[n-n_0] = x[n_0]\,\delta[n-n_0]$ στο n_0

ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ – ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,\delta[n-k] = x[n] * \delta[n]$$

ΣΥΝΕΛΙΞΗ

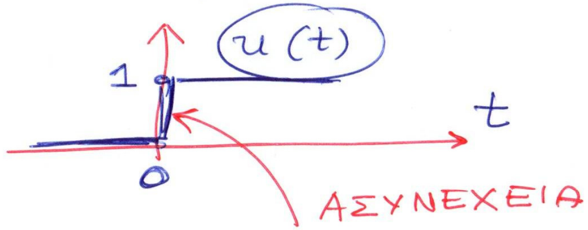
ΤΑΥΤΟΤΙΚΟ ΣΤΟΙΧΕΙΟ ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ

1.3.β. Μοναδιαίο δείγμα/παλμός – Συνεχή (Ι)

ΒΗΜΑΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

(UNIT STEP FUNCTION)

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ 1, & t>0 \end{cases}$$

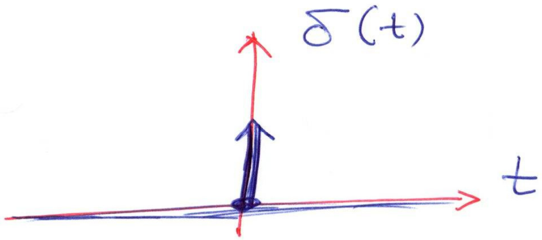


ΚΡΟΥΣΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

(UNIT IMPULSE FUNCTION)

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

← ΟΧΙ ΚΑΛΩΣ ΟΡΙΣΜΕΝΗ



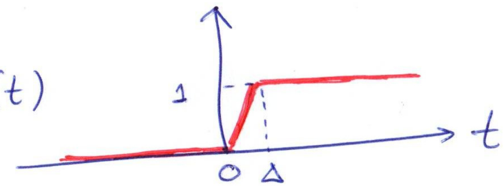
$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,d\tau$$

$$= \int_{0}^{\infty} \delta(t-\tau)\,d\tau$$

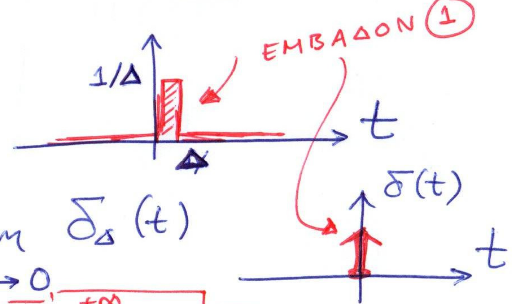
1.3.β. Μοναδιαίο δείγμα/παλμός – Συνεχή (ΙΙ)

ΔΙΑΦΟΡΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ ΕΙΝΑΙ ΔΥΝΑΤΟΙ:

πχ $u_\Delta(t)$



$$\Rightarrow \delta_\Delta(t) = \frac{du_\Delta(t)}{dt}$$



$$\Rightarrow \delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \delta_\Delta(t)$$

ΕΜΒΑΔΟΝ: $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = 1}$

ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ

$$x(t)\,\delta(t) = x(0)\,\delta(t) \quad \text{ΣΤΟ } 0$$

$$x(t)\,\delta(t-t_0) = x(t_0)\,\delta(t-t_0) \quad \text{ΣΤΟ } t_0$$

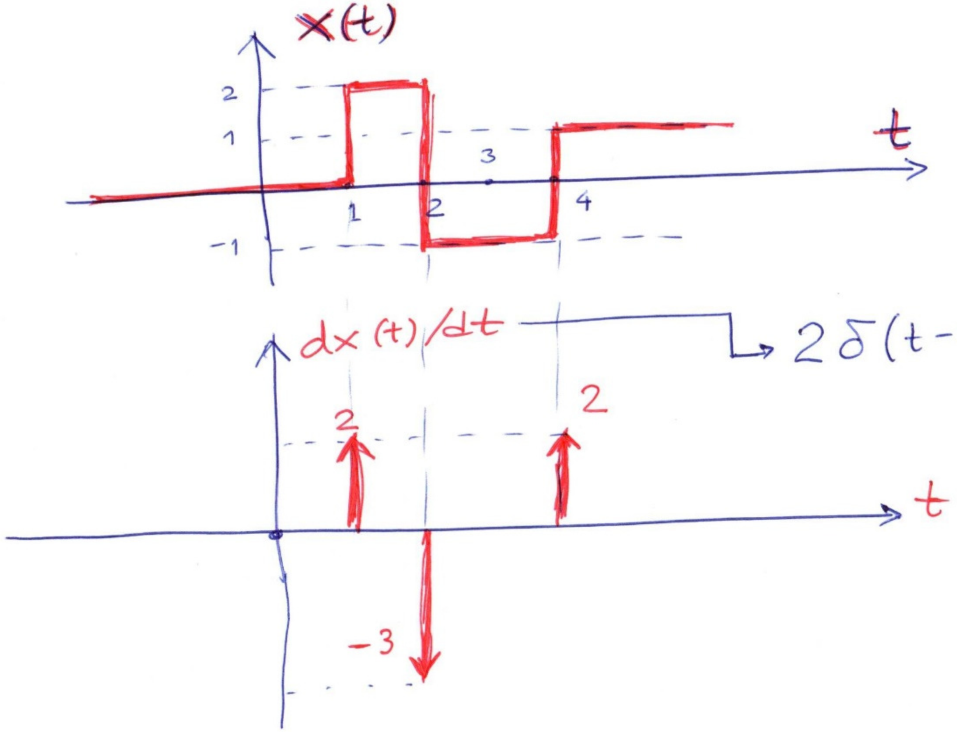
ΣΥΝΕΛΙΞΗ: $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau =$

$$= x(t) * \delta(t)$$

1.3.β. Μοναδιαίο δείγμα/παλμός – Συνεχή (ΙΙΙ)

Παράδειγμα :

$$x(t) = 2u(t-1) - 3u(t-2) + 2u(t-4)$$

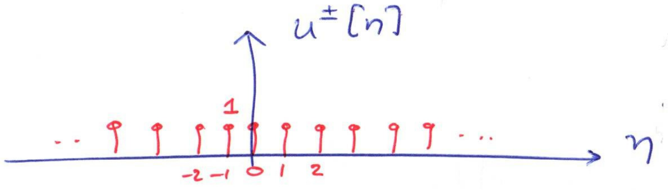


$$\frac{dx(t)}{dt} \rightarrow 2\delta(t-1) - 3\delta(t-2) + 2\delta(t-4)$$

1.3.γ. Περισσότερα Σήματα (I)

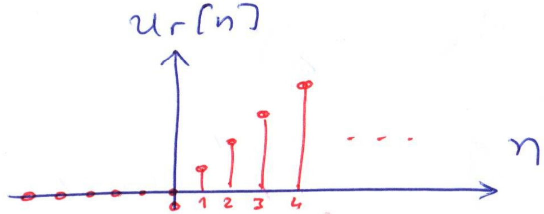
Μοναδιαίο σταθερό σήμα:

$$u^{\pm}[n] = 1 \quad , \forall n$$



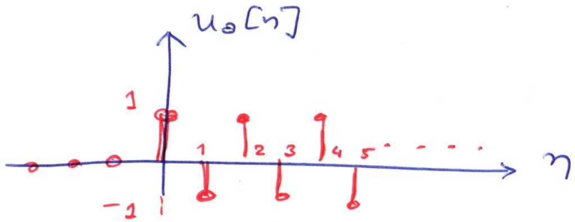
Σήμα μοναδιαίας κλίσης:

$$u_r[n] = \begin{cases} n, & \forall n \geq 0 \\ 0, & \forall n < 0 \end{cases}$$



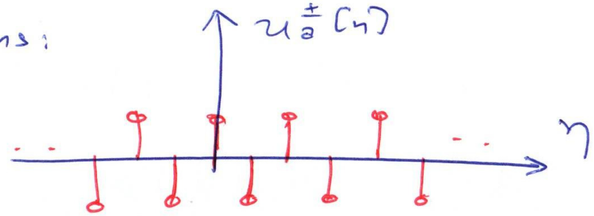
Μοναδιαίο εναλλακτικό σήμα:

$$u_a[n] = \begin{cases} (-1)^n, & \forall n \geq 0 \\ 0, & \forall n < 0 \end{cases}$$



Σήμα μέγιστης συχνότητας παλινδρόμησης:

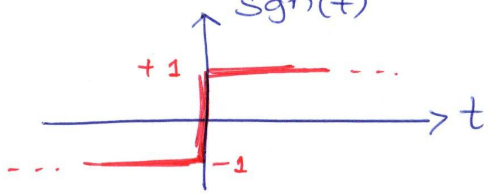
$$u_a^{\pm}[n] = (-1)^n$$



1.3.γ. Περισσότερα Σήματα (ΙΙ)

Συνάρτηση προσήμου:

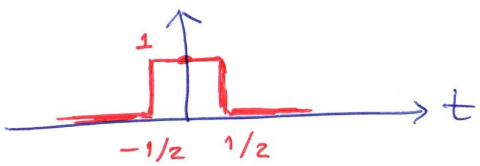
$$\mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$$



$$u(t) = \frac{\overset{\text{ΑΡΤΙΟ}}{1} + \overset{\text{ΠΕΡΙΤΤΟ}}{\mathrm{sgn}(t)}}{2}, \quad \mathrm{sgn}(t) = u(t) - u(-t)$$

Τετραγωνικός παλμός:

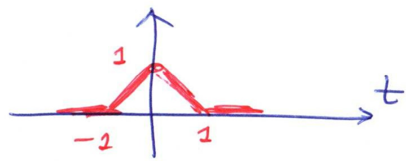
$$\mathrm{rect}(t) = \begin{cases} 1, & |t| \le 1/2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$



Αποκοπή σήματος στο $[t_0, t_0+T]$: πολ/σμός με $\mathrm{rect}\left(\dfrac{t - t_0 - T/2}{T}\right)$

Τριγωνικός παλμός:

$$\mathrm{trig}(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| \le 1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$



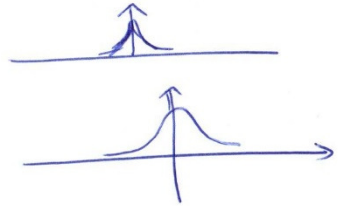
1.3.γ. Περισσότερα Σήματα (ΙΙΙ)

GAUSSIAN / LAPLACIAN

$$g(t) = A \exp(-a|t|^p), \quad p > 0$$

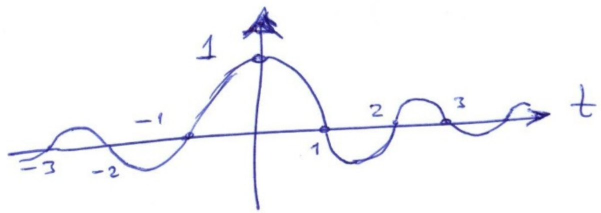
$p = 1 \rightsquigarrow$ LAPLACIAN

$p = 2 \rightsquigarrow$ GAUSSIAN



SINC FUNCTION

$$x(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$



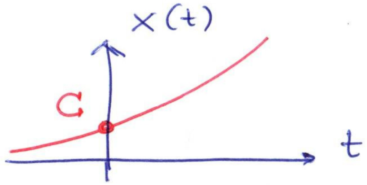
1.3.δ. Εκθετικά / Ημιτονοειδή – Συνεχή (Ι)

Μιγαδικό εκθετικό σήμα : $x(t) = Ce^{at}$

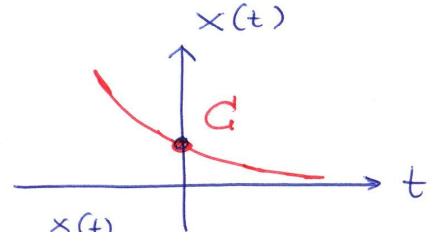
COMPLEX EXPONENTIAL

$\boxed{\text{με } C, a \in \mathbb{R}}$

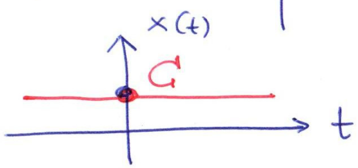
$a > 0 \longrightarrow$



$a < 0 \longrightarrow$



$a = 0 \rightarrow \boxed{x(t) = C}$



• $\boxed{\text{με } a \text{ ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΟ}, C = 1}$ $\quad \boxed{x(t) = e^{j\Omega_0 t}}$

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΜΕ $T_0 = \dfrac{2\pi}{|\Omega_0|}$ $\rightarrow \neq 0$

$$\boxed{\begin{aligned} E_{PERIOD} &= T_0 \\ P_{PERIOD} &= 1 = P_\infty \end{aligned}}$$

1.3.δ. Εκθετικά / Ημιτονοειδή – Συνεχή (ΙΙ)

$\boxed{\text{ΗΜΙΤΟΝΟΕΙΔΗ :}}$

$$x(t) = A\cos(\Omega_0 t + \phi)$$

$\Omega_0 \to 2\pi F_0$

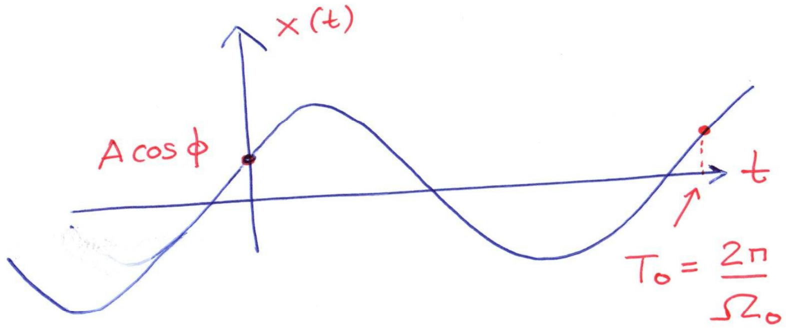
$\Omega_0 \to \boxed{\text{RAD/SEC}}$

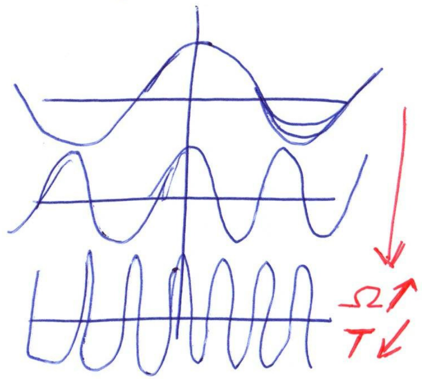
$F_0 \to \boxed{\text{HERTZ}}$

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ με: $T_0 = \dfrac{2\pi}{|\Omega_0|}$

EULER: $e^{j\Omega_0 t} = \cos(\Omega_0 t) + j\sin(\Omega_0 t)$

ΑΡΑ : $x(t) = A \cdot \mathrm{Re}\left\{ e^{j(\Omega_0 t + \varphi)} \right\}$





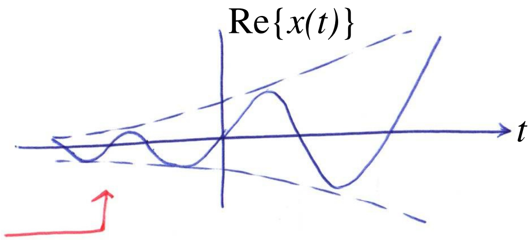
1.3.δ. Εκθετικά / Ημιτονοειδή – Συνεχή (ΙΙΙ)

ΓΕΝΙΚΑ ΕΚΘΕΤΙΚΑ:

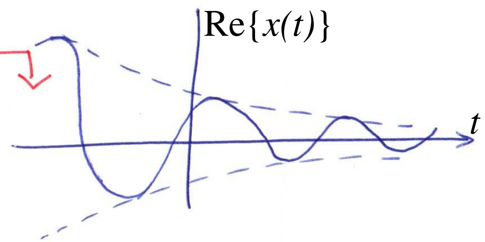
$$x(t) = C e^{at} = |C| e^{rt} \cos(\Omega_0 t + \theta) + j |C| e^{rt} \sin(\Omega_0 t + \theta)$$

$C = |C| e^{j\theta}$ $\quad$ $a = r + j\Omega_0$

- $r = 0$ ⇝ ημιτονοειδή
- $r > 0$ ⇝ πολ/σμός με αύξον εκθετικό



- $r < 0$ ⇝ πολ/σμός με φθίνον εκθετικό



1.3.ε. Εκθετικά / Ημιτονοειδή – Διακριτά (Ι)

$$x[n] = C a^{n} = C e^{\beta n}$$

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΑ ΕΚΘΕΤΙΚΑ: $C, a \in \mathbb{R}$

$|a| > 1 \longrightarrow$ ΑΥΞΑΝΕΙ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΥΣΑ

$|a| < 1 \longrightarrow$ ΜΕΙΩΝΕΤΑΙ

$a > 0 \longrightarrow$ ΟΧΙ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗ

$a < 0 \longrightarrow$ ΝΑΙ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗ

$a = 1 \longrightarrow$ ΣΤΑΘΕΡΟ C

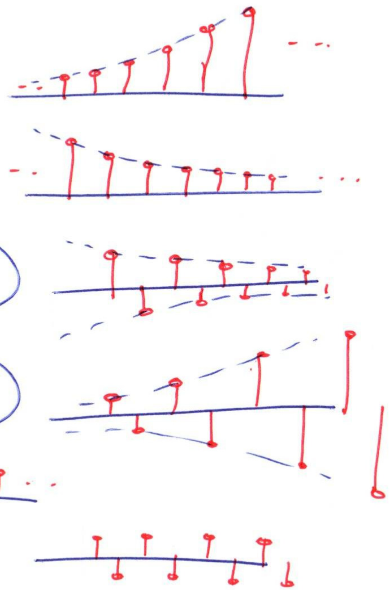
$a = -1 \Rightarrow$ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗ $\pm C$

$a > 1$

$0 < a < 1$

$-1 < a < 0$

$a < -1$



1.3.ε. Εκθετικά / Ημιτονοειδή – Διακριτά (II)

ΗΜΙΤΟΝΟΕΙΔΗ: β ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΟ $= j\omega_0$

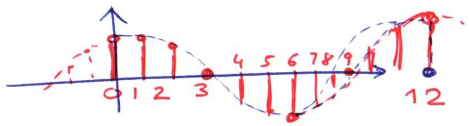
$$\boxed{x[n] = e^{j\omega_0 n}}$$

Μέσω EULER [ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ]

$$\boxed{x[n] = A\cos(\omega_0 n + \varphi)}$$

ΠΕΡΙΟΔΟΣ

πχ $x[n] = \cos\left(\frac{2\pi n}{12}\right)$



$N = 12$

$x[n] = \cos\left(\frac{8\pi n}{31}\right)$ ⇝ 4 "περίοδοι" σε 31 δείγματα ⇝ $N = 31$

$x[n] = \cos(\pi/6)$ ⇝ $\cancel{N = ?}$

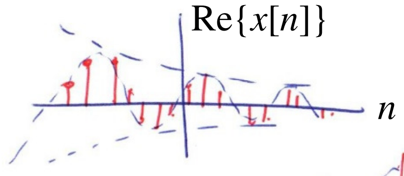
1.3.ε. Εκθετικά / Ημιτονοειδή – Διακριτά (ΙΙΙ)

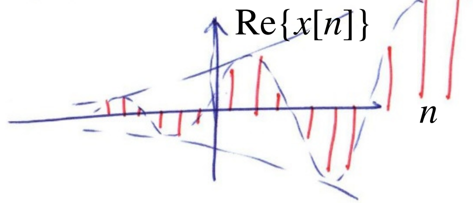
ΓΕΝΙΚΑ ΕΚΘΕΤΙΚΑ (ΜΙΓΑΔΙΚΑ)

$$x[n] = C a^n \longrightarrow |C||a|^n \cos(\omega_0 n + \theta) + j|C||a|^n \sin(\omega_0 n + \theta)$$

$C = |C| e^{j\theta}$, $a = |a| e^{j\omega_0}$

- $|a| = 0 \rightsquigarrow$ ΗΜΙΤΟΝΟΕΙΔΗ
- $|a| < 1 \longrightarrow$ φθίνοντες περιβάλλουσες
- $|a| > 1 \longrightarrow$ αύξοντες »





1.3.στ. Εκθετικά / Ημιτονοειδή – Διαφορές (Ι)

Σοβαρές διαφορές μεταξύ: $e^{j\omega_0 n}$ & $e^{j\Omega_0 t}$

ΔΕΝ ΙΣΧΥΟΥΝ ⟸

(a) → $\Omega_0 \uparrow \Rightarrow$ αυξάνει η ταλάντωση

(b) → Πάντα ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ $T_0 = \frac{2\pi}{|\Omega_0|}$

- ΓΙΑΤΙ? (a)

$$e^{j(\omega_0 + 2\pi)n} = e^{j\omega_0 n}$$

$\omega_0 \in [0, 2\pi]$ ΣΥΝΗΘΩΣ

ΜΕΓΑΛΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΣΤΑ $\pm\pi$ (HIGH FREQUENCY)

ΚΑΘΟΛΟΥ » ΣΤΑ 0, 2π (LOW FREQUENCY)

1.3.στ. Εκθετικά / Ημιτονοειδή – Διαφορές (ΙΙ)

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΤΗΤΑ (b)

$$e^{j\omega_0(n+N)} = e^{j\omega_0 n} \Longleftrightarrow e^{j\omega_0 N} = 1$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\omega_0 N = 2\pi m} \Longleftrightarrow \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N}$$

$$\Longleftrightarrow N = m\left(\frac{2\pi}{\omega_0}\right)$$

ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ ΠΑΝΤΑ ΤΕΤΟΙΟΣ ΑΚΕΡΑΙΟΣ !

π.χ.:

$x(t) = \cos\frac{2\pi t}{12}$ $(T_0 = 12) \longrightarrow x[n] = \cos\frac{2\pi n}{12} \rightarrow N_0 = 12$

$x(t) = \cos\frac{8\pi t}{31}$ $(T_0 = 31/4) \longrightarrow x[n] = \cos\frac{8\pi n}{31} \rightarrow N_0 = 31$

$x(t) = \cos\left(\frac{t}{6}\right)$ $(T_0 = 12\pi) \longrightarrow x[n] = \cos\frac{n}{6} \rightarrow \cancel{N_0}$

1.3.στ. Εκθετικά / Ημιτονοειδή – Διαφορές (ΙΙΙ)

Αρμονικές

ΣΥΝΕΧΗΣ ΧΡΟΝΟΣ :

$$\varphi_k(t) = e^{jk\Omega_0 t}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

ΠΕΡΙΟΔΟΣ $\frac{T_0}{|k|}$

ΑΠΕΙΡΕΣ ΑΡΜΟΝΙΚΕΣ

ΔΙΑΚΡΙΤΟΣ ΧΡΟΝΟΣ :

$$\varphi_k[n] = e^{jk\frac{2\pi}{N}n}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

N διαφορετικές αρμονικές :

$$\varphi_0[n] = 1$$

$$\vdots$$

$$\varphi_{N-1}[n] = e^{j2\pi\frac{(N-1)}{N}n}$$