ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

ΘΕΩΡΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Γεράσιμος Ποταμιάνος

Αναπλ. Καθηγητής,
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

http://www.inf.uth.gr/~gpotamianos

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

ΘΕΩΡΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Ενότητα 10: ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ Z

10.0. Εισαγωγή

- Αποτελεί γενίκευση του μ/σ Fourier διακριτού χρόνου.
- Προσφέρει επιπλέον εργαλεία για ανάλυση σημάτων και Γ.Χ.Α. συστημάτων διακριτού χρόνου.
- Επιπλέον επιτρέπει ανάλυση πολλών Γ.Χ.Α. συστημάτων που είναι ασταθή – και για τα οποία ο μ/σ Fourier διακριτού χρόνου δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί.
- Υπάρχουν δύο μορφές του μ/σ Z:
  - ✓ Δίπλευρος (double-sided)
  - ✓ Μονόπλευρος (one-sided)
- Θα επικεντρωθούμε κυρίως στον πρώτο.
- Θα ακολουθήσουμε παρόμοια προσέγγιση με το Κεφ. 9 (μ/σ Laplace).
- Υπάρχουν ομοιότητες αλλά και σημαντικές διαφορές με μ/σ Laplace.

10.1. Μ/Σ Z – Ορισμός

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ:

$$x[n] = z_0^n \rightarrow \boxed{h[n]} \rightarrow y[n] = H(z_0)\, z_0^n$$

$$H(z_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]\, z_0^{-n}$$

ΕΙΔΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: $\boxed{z_0 = e^{j\omega_0}}$

ΟΡΙΣΜΟΣ Μ/Σ Z:

$$\boxed{X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, z^{-n}}$$

z: ΜΙΓΑΔΙΚΟΣ

$$\boxed{x[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X(z)}$$

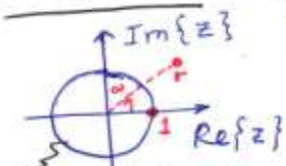
ΣΧΕΣΗ ΜΕ DTFT:

$$z = r e^{j\omega} = |z|\, e^{j\measuredangle z}$$

$$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] (re^{j\omega})^{-n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (x[n] r^{-n})\, e^{-j\omega n}$$

$$= \text{DTFT}\{x[n] r^{-n}\}$$



ΜΟΝΑΔΙΑΙΟΣ ΚΥΚΛΟΣ / UNIT CIRCLE

ΕΙΔΙΚΑ ΓΙΑ

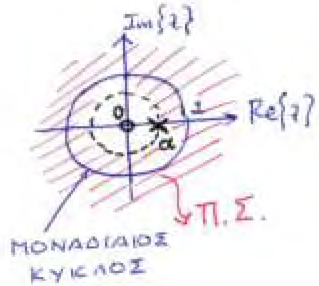
$\hookrightarrow r = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$ ΕΧΟΥΜΕ

$$\boxed{X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = X(e^{j\omega}) = \text{DTFT}\{x[n]\}}$$

10.1. Μ/Σ Z – Παραδείγματα (I)

- $\boxed{x[n] = a^n u[n]}$ $\Rightarrow X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (a z^{-1})^n \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{X(z) = \frac{1}{1 - a z^{-1}} = \frac{z}{z-a}}$$



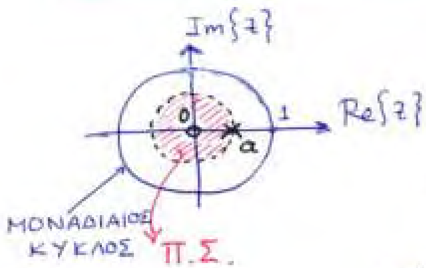
Πρέπει βέβαια: $|a z^{-1}| < 1 \Leftrightarrow$ $\boxed{\text{ROC: } \Pi.\Sigma.: \ |z| > |a|}$

ΠΟΛΟΙ: $\{a\}$
(POLES)
ΜΗΔΕΝΙΚΑ: $\{0\}$
(ZEROS)

- $\boxed{x[n] = -a^n u[-n-1]}$ $\Rightarrow X(z) = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[-n-1] z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n}$

$$\underset{n \to -n}{=} -\sum_{n=1}^{+\infty} a^{-n} z^n \underset{\pm 1}{=} 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1} z)^n =$$

$$= 1 - \frac{1}{1 - a^{-1} z}, \text{ για } |a^{-1} z| < 1$$



$$\Rightarrow \boxed{X(z) = \frac{1}{1 - a z^{-1}} = \frac{z}{z-a}} \quad \boxed{\text{ROC: } |z| < |a|}$$

Πόλοι, μηδενικά όπως πιο πάνω.

ΑΡΑ: Δύο διαφορετικές ακολουθίες έχουν ίδια αλγεβρική έκφραση ως μ/σ Z, αλλά με διαφορετικές Π.Σ.

10.1. Μ/Σ Ζ – Παραδείγματα (ΙΙ)

- $$\boxed{x[n] = 7\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]} \Rightarrow$$

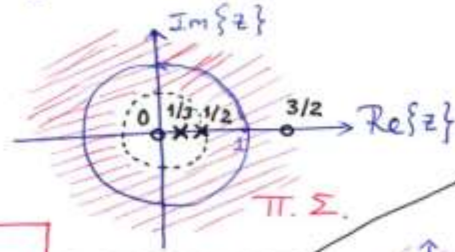
$$\Rightarrow X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} = \cdots = \underbrace{\frac{7}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}}_{\text{ROC: } |z|>1/3} - \underbrace{\frac{6}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}}_{\text{ROC: } |z|>1/2} =$$

ΤΟΜΗ

$$= \frac{1-\frac{3}{2}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)} = \frac{z\left(z-\frac{3}{2}\right)}{\left(z-\frac{1}{3}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)} \qquad \boxed{\text{ROC: } |z|>1/2}$$

ΠΟΛΟΙ: $\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right\}$

ΜΗΔΕΝΙΚΑ: $\left\{0, \frac{3}{2}\right\}$



- $$\boxed{x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right) u[n]} =$$

$$= \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{3}e^{j\frac{\pi}{4}}\right)^n u[n] - \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{3}e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)^n u[n]$$

ΠΟΛΟΙ: $\left\{\frac{1}{3}e^{\pm j\frac{\pi}{4}}\right\}$

ΜΗΔΕΝΙΚΑ: $\{0, \infty\}$

$$\Rightarrow X(z) = \frac{1}{2j}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{1}{3}e^{j\frac{\pi}{4}}\right)z^{-1}} - \frac{1}{2j}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{1}{3}e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)z^{-1}}$$

$$= \frac{(1/3\sqrt{2})\, z}{(z - 1/3\, e^{j\pi/4})(z - 1/3\, e^{-j\pi/4})}$$

ROC: $|z| > 1/3$

10.2. Περιοχή Σύγκλισης Μ/Σ Z (I)

ΙΔΙΟΤΗΤΑ (1): Η περιοχή σύγκλισης του μ/σ Z αποτελείται από ΔΑΚΤΥΛΙΟ (RING) με κέντρο το 0.

ΓΙΑΤΙ: Το αν το: $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| r^{-n} < \infty$ εξαρτάται από το r

Κατά συνέπεια η σύγκλιση εξαρτάται μόνο από το $|z|$

ΙΔΙΟΤΗΤΑ (2): Η περιοχή σύγκλισης του μ/σ Z δεν περιλαμβάνει πόλους

ΓΙΑΤΙ: Προφανές.... Το $X(z)$ απειρίζεται σε πόλους.

10.2. Περιοχή Σύγκλισης Μ/Σ Ζ (ΙΙ)

ΙΔΙΟΤΗΤΑ 3:

$\boxed{\text{Αν το } x[n] \text{ είναι πεπερασμένης διάρκειας τότε η Π.Σ. είναι όλο το επίπεδο των } z \text{ εκτός πιθανώς του } z=0 \text{ ή/και } z=\infty}$

ΓΙΑΤΙ: $X(z) = \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n] z^{-n}$

Άθροισμα πεπερασμένων όρων $\Rightarrow$ συγκλίνει παντού εκτός αν $z^{-n} = \infty$ για κάποια n

- $N_1 < 0$: $z = \infty$ ΕΚΤΟΣ ROC
- $N_2 > 0$: $z = 0$ ΕΚΤΟΣ ROC

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

$x[n] = \delta[n] \Longrightarrow X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n] z^{-n} = 1$ ΣΥΓΚΛΙΝΕΙ ΠΑΝΤΟΥ

$x[n] = \delta[n-1] \Longrightarrow X(z) = z^{-1}$ ΠΑΝΤΟΥ ΕΚΤΟΣ $z=0$ ΠΟΛΟΣ

$x[n] = \delta[n+1] \Longrightarrow X(z) = z$ ΠΑΝΤΟΥ ΕΚΤΟΣ $z=\infty$

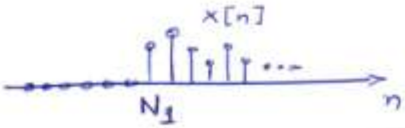
10.2. Περιοχή Σύγκλισης Μ/Σ Ζ (ΙΙΙ)

ΙΔΙΟΤΗΤΑ 4:

Αν η $x[n]$ είναι "ΔΕΞΙΑ" ορισμένη
Αν ο κύκλος $|z| = r_0 \in$ Π.Σ.
$\Rightarrow |z| > r_0$ ΕΠΙΣΗΣ ΣΤΗΝ Π.Σ.

ΓΙΑΤΙ: $|x[n]|\, r_0^{-n}$ ΑΘΡΟΙΣΙΜΗ $\xRightarrow{r_1 > r_0}$ $|x[n]|\, r_1^{-n}$ ΕΠΙΣΗΣ ΑΘΡΟΙΣΙΜΗ ($r_1^{-n} < r_0^{-n}$ για $n > 0$)

ΠΡΟΣΟΧΗ: Αν $N_1 < 0$ το ∞ ΔΕΝ ΠΕΡΙΛΑΜΒΑΝΕΤΑΙ ΣΤΗΝ Π.Σ.

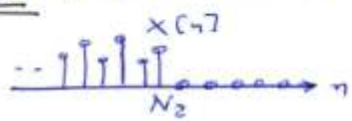


ΙΔΙΟΤΗΤΑ 5:

Αν η $x[n]$ είναι "ΑΡΙΣΤΕΡΑ" ορισμένη
Αν ο κύκλος $|z| = r_0 \in$ Π.Σ.
$\Rightarrow 0 < |z| < r_0$ ΕΠΙΣΗΣ ΣΤΗΝ Π.Σ.

ΓΙΑΤΙ: Παρόμοια με παραπάνω

ΠΡΟΣΟΧΗ: Αν $N_2 > 0$ το 0 ΔΕΝ ΠΕΡΙΛΑΜΒΑΝΕΤΑΙ ΣΤΗΝ Π.Σ.



10.2. Περιοχή Σύγκλισης Μ/Σ Ζ (IV)

ΙΔΙΟΤΗΤΑ 6 :

$\boxed{\begin{array}{l}\text{Αν η } x[n] \text{ είναι ΔΙΠΛΕΥΡΗ} \\ \text{Αν ο κύκλος } |z| = r_0 \in \text{Π.Σ.}\end{array}} \Rightarrow$ Η Π.Σ. θα είναι δακτύλιος που περιλαμ. βάνει το $|z| = r_0$

ΓΙΑΤΙ: Η δίπλευρη ακολουθία μπορεί να γραφεί ως άθροισμα ΔΕΞΙΑΣ + ΑΡΙΣΤΕΡΗΣ

Η Π.Σ. θα είναι η τομή των δύο Π.Σ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (πεπερασμένης διάρκειας ακολουθία):

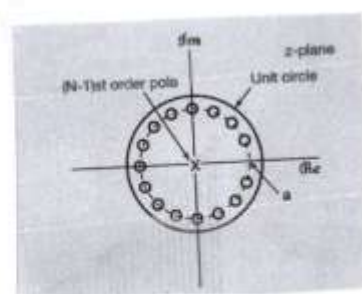
$$x[n] = \begin{cases} a^n, & 0 \le n \le N-1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}, \quad a > 0$$

$$\Rightarrow X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} \underbrace{a^n z^{-n}}_{(az^{-1})^n} = \frac{1-(az^{-1})^N}{1-az^{-1}} = \frac{1}{z^{N-1}} \frac{z^N - a^N}{z-a}$$

Π.Σ. ΟΛΟ ΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΕΚΤΟΣ ΤΟΥ 0

ZEROS: $\{ a e^{j\frac{2\pi k}{N}}, k = 1, \ldots, N-1 \}$

POLES: { 0 , (N−1) ΤΑΞΗΣ }



Σχ. 10.9 από βιβλίο Oppenheim-Willsky

10.2. Περιοχή Σύγκλισης Μ/Σ Ζ (V)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (δίπλευρη ακολουθία)

$$\boxed{x[n] = b^{|n|}, \quad b>0}$$

$$= b^n u[n] + b^{-n} u[-n-1]$$

$$b^n u[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-bz^{-1}}, \quad |z|>b$$

$$b^{-n} u[-n-1] \overset{Z}{\longleftrightarrow} \frac{-1}{1-b^{-1}z^{-1}}, \quad |z|<\frac{1}{b}$$

$$\Rightarrow X(z) = \frac{1}{1-bz^{-1}} - \frac{1}{1-b^{-1}z^{-1}}$$

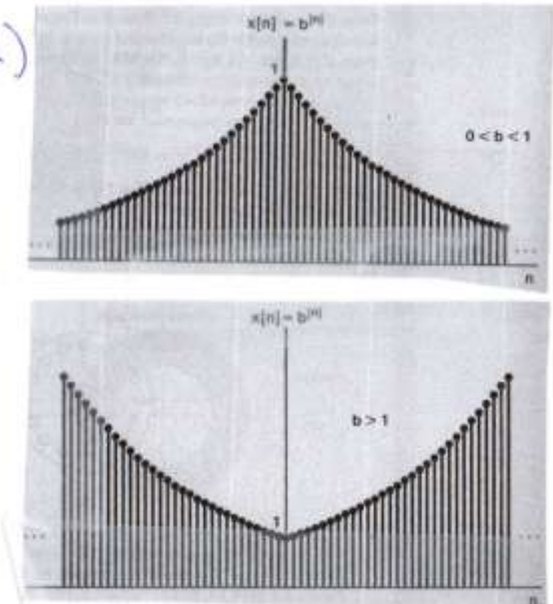
$$= \frac{b^2-1}{b}\,\frac{z}{(z-b)(z-b^{-1})}$$

για $\boxed{b<|z|<1/b}$

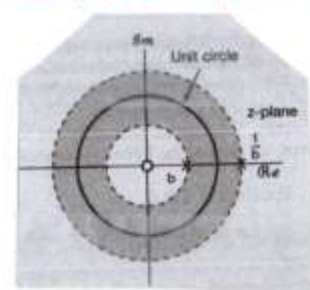
↳ ΥΠΑΡΧΕΙ μόνο για $0<b<1$

ΠΟΛΟΙ: $\{b,\ 1/b\}$

ΜΗΔΕΝΙΚΑ: $\{0,\ \infty\}$



Σχ. 10.10 από βιβλίο Oppenheim-Willsky



Σχ. 10.11(e) από βιβλίο Oppenheim-Willsky

10.2. Περιοχή Σύγκλισης Μ/Σ Ζ (VI)

ΙΔΙΟΤΗΤΑ (7): Αν $X(z)$ είναι ρητή συνάρτηση τότε η Π. Σ. περιορίζεται από πόλους ή επεκτείνεται στο ∞

ΙΔΙΟΤΗΤΑ (8): Αν $X(z)$ είναι ρητή συνάρτηση, Αν $x[n]$ είναι "ΔΕΞΙΑ" ακολουθία $\Rightarrow$ Π. Σ. "ΕΚΤΟΣ" ΤΟΥ ΠΙΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ ΠΟΛΟΥ

ΕΠΙΣΗΣ: Αν $x[n]$ είναι ΑΙΤΙΑΤΗ $\Longrightarrow$ Π. Σ. ΠΕΡΙΛΑΜΒΑΝΕΙ ΤΟ ∞

ΙΔΙΟΤΗΤΑ (9): Αν $X(z)$ είναι ρητή συνάρτηση, Αν $x(n)$ είναι "ΑΡΙΣΤΕΡΗ" ακολουθία $\Rightarrow$ Π. Σ. "ΕΝΤΟΣ" ΤΟΥ ΠΙΟ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΥ ΠΟΛΟΥ

ΕΠΙΣΗΣ: Αν $x[n]$ είναι ΑΝΤΙ-ΑΙΤΙΑΤΗ $\longrightarrow$ Π. Σ. ΠΕΡΙΛΑΜΒΑΝΕΙ ΤΟ 0

10.2. Περιοχή Σύγκλισης Μ/Σ Z (VII)

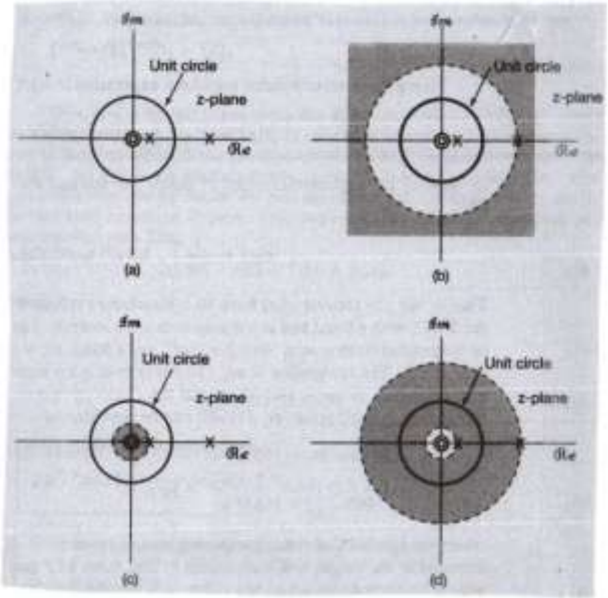
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

$$X(z) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-2z^{-1}\right)}$$

ΠΟΛΟΙ: $\left\{\frac{1}{3}, 2\right\}$

ΜΗΔΕΝΙΚΑ: $\{0, 0\}$

3 πιθανές Π.Σ. $\longrightarrow$



Σχ. 10.12 από βιβλίο Oppenheim-Willsky

10.3. Αντίστροφος Μ/Σ Z – Ορισμός

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ: $X(re^{j\omega}) = \text{DTFT}\{x[n]r^{-n}\}$ (για $re^{j\omega} \in$ ROC)

$\overset{\text{IDTFT}}{\Longrightarrow}$ $x[n]r^{-n} = \text{DTFT}^{-1}\{X(re^{j\omega})\}$

$$\Rightarrow x[n] = r^n \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(re^{j\omega})e^{j\omega n}\,d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(re^{j\omega})(re^{j\omega})^n\,d\omega$$

$\omega \to z$, $dz = jz\,d\omega$ (r σταθερό)

$$\boxed{x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint X(z)z^{n-1}\,dz}$$

κυκλικό, αριστερόστροφο ολοκλήρωμα σε $|z| = r \in$ ROC

ΣΤΗΝ ΠΡΑΞΗ: Ανάπτυξη σε μερικά κλάσματα

$$\boxed{X(z) = \sum_{i=1}^{m} \frac{A_i}{1-a_i z^{-1}}}$$

ΕΙΔΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: (απλές ρίζες, ... κτλ..)

Z^{-1}: $A_i a_i^n u[n]$, $-A_i a_i^n u[-n-1]$

ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΑ: Ανάπτυξη σε δυναμοσειρά

10.3. Αντίστροφος Μ/Σ Z – Παραδείγματα (I)

- $$\boxed{X(z) = \frac{3 - \frac{5}{6}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)}, \quad |z| > \frac{1}{3} \quad \text{ROC}}$$

$\xrightarrow[\text{Μερικά Κλάσματα}]{\text{Ανάλυση σε}}$

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

ROC: $|z| < \frac{1}{4}$, $|z| > 1/4$ — ROC: $|z| < 1/3$, $|z| > 1/3$

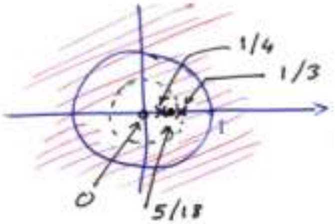
ΣΥΝΕΠΕΙΣ ΜΕ ΕΚΦΩΝΗΣΗ

$$\Longrightarrow \boxed{x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]}$$

"ΔΕΞΙΕΣ" ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

ΠΟΛΟΙ: $\{1/4, 1/3\}$

ΜΗΔΕΝΙΚΑ: $\{0, 5/18\}$



10.3. Αντίστροφος Μ/Σ Z – Παραδείγματα (ΙΙ)

- $X(z)$ ΟΠΩΣ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΩΣ ΑΛΛΑ ΜΕ ROC: $1/4 < |z| < 1/3$

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4} z^{-1}} + \frac{2}{1 - \frac{1}{3} z^{-1}}$$

ROC: $|z| < 1/4$, $|z| > 1/4$ — ROC: $|z| < 1/3$, $|z| > 1/3$

ΣΥΝΕΠΕΙΣ ΜΕ ΕΚΦΩΝΗΣΗ: $|z| > 1/4$, $|z| < 1/3$

$$\Rightarrow \boxed{x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1]}$$

"ΔΕΞΙΑ" ΑΚΟΛΟΥΘΙΑ — "ΑΡΙΣΤΕΡΗ" ΑΚΟΛΟΥΘΙΑ

- $X(z)$ ΟΠΩΣ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΩΣ ΑΛΛΑ ΜΕ ROC: $|z| < 1/4$

$$\Rightarrow \boxed{x[n] = -\left(1/4\right)^n u[-n-1] - 2\left(1/3\right)^n u[-n-1]}$$

"ΑΡΙΣΤΕΡΕΣ" ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

10.3. Αντίστροφος Μ/Σ Z – Παραδείγματα (III)

- $\boxed{X(z) = 4z^2 + 2 + 3z^{-1}}$ $\boxed{\text{ROC: } 0 < |z| < \infty}$

Με απλή επισκόπηση $\left(X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} \right)$: $x[n] = \begin{cases} 4, & n=-2 \\ 2, & n=0 \\ 3, & n=1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

$$\Rightarrow x[n] = 4\delta[n+2] + 2\delta[n] + 3\delta[n-1]$$

- $\boxed{X(z) = \log(1 + a z^{-1})}$ $\boxed{\text{ROC: } |z| > |a|}$

Από σειρά Taylor: $\log(1+\nu) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \nu^n}{n}$, $|\nu| < 1$

$$\Rightarrow X(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} a^n z^{-n}}{n}$$

$$\Rightarrow \boxed{x[n] = (-1)^{n+1} \frac{a^n}{n} u[n-1]}$$

$$= -\frac{(-a)^n}{n} u[n-1]$$

10.4. Ιδιότητες Μ/Σ Z (I)

1) ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑ / LINEARITY

$$\left.\begin{array}{l} x_1[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X_1(z),\ \text{π.Σ} = R_1 \\ x_2[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X_2(z),\ \text{π.Σ} = R_2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a x_1[n] + \beta x_2[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} a X_1(z) + \beta X_2(z)$$

π.Σ περιέχει το $R_1 \cap R_2$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $a^n u[n] - a^n u[n-1] = \delta[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} 1$ ROC: ΟΛΟ ΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

ROC: $|z|>|a|$ $\boxed{1/(1-az^{-1})}$ $\quad$ $|z|>|a|$ $\boxed{az^{-1}/(1-az^{-1})}$

2) ΧΡΟΝΙΚΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ / TIME SHIFTING

$$\left.\begin{array}{l} x[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X(z) \\ \text{π.Σ}: R \end{array}\right\} \Rightarrow x[n-n_0] \overset{Z}{\longleftrightarrow} z^{-n_0} X(z)$$

π.Σ: R με πιθανή πρόσθεση/αφαίρεση των $0, \infty$

ΓΙΑΤΙ: Για $n_0>0$ το z^{-n_0} εισάγει $\boxed{\text{πόλο}}$ στο 0

Για $n_0<0$ το $z_0^{-n_0}$ εισάγει $\boxed{\text{μηδενικά}}$ στο 0
(που μπορούν να απαλείψουν ίσως κάποιο αντίστοιχο πόλο στο 0 του $X(z)$)

(μπορεί φυσικά να απλοποιείται ίσως με κάποιο μηδενικό στο 0 του $X(z)$)

10.4. Ιδιότητες Μ/Σ Ζ (ΙΙ)

③ ΚΛΙΜΑΚΩΣΗ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΤΟΥ Ζ

SCALING IN THE Z-DOMAIN

$x[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z)$, Π.Σ.: R

$\Rightarrow z_0^n x[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} X\left(\frac{z}{z_0}\right)$, Π.Σ.: $|z_0|R$

Δηλαδή $z \in$ ROC του $X(z)$ $\Rightarrow |z_0| z \in$ ROC του $X(z/z_0)$

α πόλος ή μηδενικό του $X(z)$ $\Rightarrow$ $z_0 \alpha$ πόλος ή μηδενικό του $X(z/z_0)$

ΕΙΔΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: $z_0 = e^{j\omega_0}$ ΤΟΤΕ: $|z_0| R = R$

$e^{j\omega_0 n} x[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} X(e^{-j\omega_0} z)$

"ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ" ΠΟΛΩΝ / ΜΗΔΕΝΙΚΩΝ ΚΑΤΑ ω_0

④ ΧΡΟΝΙΚΗ ΑΝΑΚΛΑΣΗ

TIME REVERSAL

$x[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z)$, Π.Σ.: R

$\Rightarrow x[-n] \overset{z}{\longleftrightarrow} X\left(\frac{1}{z}\right)$, Π.Σ.: $1/R$

Δηλαδή:

$z_0 \in$ ROC του $X(z)$ $\rightarrow$

$\Rightarrow 1/z_0 \in$ ROC του $X(1/z)$

10.4. Ιδιότητες Μ/Σ Z (III)

5 ΧΡΟΝΙΚΗ ΕΠΕΚΤΑΣΗ
TIME EXPANSION

$$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n/k], & n \text{ πολ/σιο του } k \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z), \; \text{Π.Σ.: } R \;\Rightarrow\; x_{(k)}[n] \xleftrightarrow{Z} X(z^k), \; \text{Π.Σ.: } R^{1/k}$$

Δηλαδή: $z_0 \in$ ROC του $X(z)$ $\Rightarrow$ $z_0^{1/k} \in$ ROC του $X(z^k)$

a πόλος ή μηδενικό του $X(z)$ $\Rightarrow$ $a^{1/k}$ πόλος ή μηδενικό του $X(z^k)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} \Rightarrow X(z^k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-nk}$$

πολ/σια του k

$m = nk$: $\displaystyle = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x\left[\frac{m}{k}\right] z^{-m}$ (m πολ/σιο του k)

ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΜΗΔΕΝΙΚΩΝ ΟΡΩΝ: $\displaystyle = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_{(k)}[m] z^{-m}$ (όλα τα m)

6 ΣΥΖΥΓΙΑ
CONJUGATION

$$x^*[n] \xleftrightarrow{Z} X^*(z^*), \; \text{Π.Σ.: } R$$

ΕΙΔΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: $x[n]$ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟ ΣΗΜΑ $\Rightarrow X(z) = X^*(z^*)$, δηλαδή πόλος ή μηδενικό στο z_0 $\Rightarrow$ πόλος ή μηδενικό στο z_0^*

10.4. Ιδιότητες Μ/Σ Ζ (IV)

7 ΣΥΝΕΛΙΞΗ
CONVOLUTION

$$\left.\begin{array}{l} x_1[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X_1(z), \text{ Π.Σ: } R_1 \\ x_2[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X_2(z), \text{ Π.Σ: } R_2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1[n] * x_2[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X_1(z) X_2(z)$$

Π.Σ: περιλαμβάνει το $R_1 \cap R_2$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

- $h[n] = \delta[n] - \delta[n-1] \overset{Z}{\longleftrightarrow} H(z) = 1 - z^{-1}$ πόλοι: $\{0\}$ μηδενικά: $\{1\}$

ΣΥΣΤΗΜΑ ΔΙΑΦΟΡΑΣ

Π.Σ: όλο το επίπεδο εκτός από το 0

Άρα: $x[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X(z)$, Π.Σ: R $\Rightarrow y[n] = x[n] * h[n] = \boxed{x[n] - x[n-1]}$

$$\overset{Z}{\longleftrightarrow} \boxed{(1 - z^{-1}) X(z)}$$

με Π.Σ. το R, με πιθανή αφαίρεση του 0 ή με πιθανή πρόσθεση του 1

- $h[n] = u[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} H(z) = \dfrac{1}{1 - z^{-1}}$,

ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΘΡΟΙΣΤΗ

Π.Σ: $|z| > 1$

Άρα: $x[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X(z)$, Π.Σ: R $\Rightarrow$ $y[n] = x[n] * h[n] = \boxed{\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]}$

$$\overset{Z}{\longleftrightarrow} \boxed{\frac{1}{1 - z^{-1}} X(z)}$$ με Π.Σ $R \cap \{|z| > 1\}$

10.4. Ιδιότητες Μ/Σ Z (V)

(8) ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΤΟΥ (z)

DIFFERENTIATION IN THE Z-DOMAIN

$$n\,x[n] \xleftrightarrow{Z} -z\frac{dX(z)}{dz}$$

με Π.Σ. την R

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Απλή διαφόριση του τύπου του μ/σ Z.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

- $\boxed{X(z) = \log\left(1 + az^{-1}\right),\ \text{Π.Σ.: } |z|>|a|} \Rightarrow x[n] = ?$

$$n\,x[n] \xleftrightarrow{z} -z\frac{dX(z)}{dz} = \frac{az^{-1}}{1+az^{-1}},\ \begin{matrix}\text{Π.Σ.}\\ |z|>|a|\end{matrix} = a\cdot z^{-1}\cdot\frac{1}{1-(-a)z^{-1}}$$

$$\Rightarrow n\,x[n] = a(-a)^{n-1}u[n-1] \Rightarrow \boxed{x[n] = \frac{-(-a)^n}{n}u[n-1]}$$

- $\boxed{X(z) = \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2},\ \text{Π.Σ. } |z|>|a|} \Rightarrow x[n] = ?$

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1-az^{-1}},\ |z|>|a| \Rightarrow \boxed{n a^n u[n]} \xleftrightarrow{z} -z\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-az^{-1}}\right) = \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$$

με Π.Σ. $|z|>|a|$

10.4. Ιδιότητες Μ/Σ Z (VI)

9 ΘΕΩΡΗΜΑ ΑΡΧΙΚΗΣ ΤΙΜΗΣ

INITIAL VALUE THEOREM

$x[n]=0,\ \forall n<0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow x[0] = \lim\limits_{z\to\infty} X(z)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: $x[n]=0,\ \forall n<0 \Longrightarrow X(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$

$\lim\limits_{z\to\infty} z^{-n} = \begin{cases} 1, & \text{για } n=0 \\ 0, & \text{για } n>0 \end{cases}$

ΣΥΝΕΠΕΙΑ ① Για αιτιατή ακολουθία $x[n]$, αν το $x[0]$ είναι πεπερασμένο τότε $\lim\limits_{z\to\infty} X(z)$ είναι πεπερασμένο

② Για ΡΗΤΗ $X(z)$, για αιτιατή $x[n]$, ο βαθμός του πολυωνύμου του αριθμητή δεν μπορεί να ξεπερνά αυτόν του παρονομαστή (ως προς z)!

③ Χρήσιμη ιδιότητα για έλεγχο μ/σ. Z

10.4. Ιδιότητες Μ/Σ Z (VII)

$$x[n] \leftrightarrow X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, z^{-n}$$

Δίπλευροι μετασχηματισμοί Z:

Ιδιότητες:

$x[n-n_o] \leftrightarrow z^{-n_o} X(z)$

$z_o^n\, x[n] \leftrightarrow X(\frac{z}{z_o})$

$x[-n] \leftrightarrow X(z^{-1})$

$x^*[n] \leftrightarrow X^*(z^*)$

$x_1[n] * x_2[n] \leftrightarrow X_1(z) X_2(z)$

$x[n] - x[n-1] \leftrightarrow (1-z^{-1}) X(z)$

$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \leftrightarrow \frac{X(z)}{1-z^{-1}}$

$n\, x[n] \leftrightarrow -z \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} X(z)$

Αιτιατά $x[n]$: $x[0] = \lim_{z\to\infty} X(z)$

Ζεύγη:

$\delta[n] \leftrightarrow 1$ $\qquad$ $\delta[n-m] \leftrightarrow z^{-m}$

$u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}\,,\ |z|>1$ $\qquad$ $-u[-n-1] \leftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}\,,\ |z|<1$

$a^n u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}\,,\ |z|>|a|$ $\qquad$ $-a^n u[-n-1] \leftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}\,,\ |z|<|a|$

$n\, a^n u[n] \leftrightarrow \frac{a z^{-1}}{(1-az^{-1})^2} = \frac{a z}{(z-a)^2}\,,\ |z|>|a|$ $\qquad$ $-n\, a^n u[-n-1] \leftrightarrow \frac{a z^{-1}}{(1-az^{-1})^2} = \frac{a z}{(z-a)^2}\,,\ |z|<|a|$

$n(n-1)\ldots(n-k+1)\, a^n u[n] \leftrightarrow \frac{k!\, a^k z}{(z-a)^{k+1}}\,,\ |z|>|a|\,,\ k\ge 1$

$[a^n \cos(\omega_o n)]\, u[n] \leftrightarrow \frac{z^2 - a z \cos\omega_o}{z^2 - 2 a z \cos\omega_o + a^2}\,,\ |z|>|a|$

$[a^n \sin(\omega_o n)]\, u[n] \leftrightarrow \frac{a z \sin\omega_o}{z^2 - 2 a z \cos\omega_o + a^2}\,,\ |z|>|a|$

10.5. Ανάλυση Γ.Χ.Α. Συστημάτων με Μ/Σ Z (I)

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ

$$\begin{matrix} x[n] \\ X(z) \end{matrix} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} h[n] \\ H(z) \end{matrix}} \longrightarrow \begin{matrix} y[n] \\ Y(z) \end{matrix}$$

$y[n] = x[n] * h[n]$

$Y(z) = X(z)H(z)$

↳ ΠΡΟΣΟΧΗ ΣΤΙΣ Π.Σ.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ / SYSTEM FUNCTION

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ / TRANSFER FUNCTION

για $z = e^{j\omega}$ ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

SYSTEM FREQUENCY RESPONSE

↳ (αν ανήκει στην Π.Σ.)

$$z_0^n \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow H(z_0)\, z_0^n$$

(αν το $z_0 \in$ Π.Σ. του $H(z)$)

10.5. Ανάλυση Γ.Χ.Α. Συστημάτων με Μ/Σ Ζ (ΙΙ)

ΑΙΤΙΑΤΟΤΗΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ: (causality)

ΑΙΤΙΑΤΟΤΗΤΑ $\Leftrightarrow$ $h[n] = 0 \quad \forall n < 0$ $\Rightarrow$ "ΔΕΞΙΑ" ή "ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΗ" ΑΚΟΛΟΥΘΙΑ $\Rightarrow$ Π.Σ. εξωτερικό κύκλου (ή και όλο το επίπεδο) [εκτός 0, ∞ ίσως]

$\Updownarrow$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n] z^{-n}$$

Το ∞ ΑΝΗΚΕΙ ΣΤΗΝ Π.Σ.

ΑΡΑ:

ΕΝΑ Γ.Χ.Α. ΣΥΣΤΗΜΑ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΕΙΝΑΙ ΑΙΤΙΑΤΟ $\Leftrightarrow$ Η Π.Σ. ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΕΙΝΑΙ ΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΕΝΟΣ ΚΥΚΛΟΥ ΠΕΡΙΛΑΜΒΑΝΟΜΕΝΟΥ ΤΟΥ ∞

ΓΙΑ ΡΗΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $H(z)$:

ΕΝΑ Γ.Χ.Α. ΣΥΣΤΗΜΑ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΜΕ ΡΗΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΕΙΝΑΙ ΑΙΤΙΑΤΟ $\Leftrightarrow$ Η Π.Σ. ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΕΙΝΑΙ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ ΕΚΤΟΣ ΤΟΥ ΠΙΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ ΠΟΛΟΥ

&

Ο ΒΑΘΜΟΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ ΑΡΙΘΜΗΤΗ (ως προς z) ΔΕΝ ΞΕΠΕΡΝΑ ΑΥΤΟΝ ΤΟΥ ΠΑΡΟΝΟΜΑΣΤΗ (ως προς z)

10.5. Ανάλυση Γ.Χ.Α. Συστημάτων με Μ/Σ Z (III)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ :

- $$H(z) = \frac{z^3 - 2z^2 + z}{z^2 + \frac{1}{4}z + \frac{1}{8}} \Rightarrow \text{ΑΙΤΙΑΤΟΤΗΤΑ ?}$$

ΟΧΙ, δεν μπορεί να είναι αιτιατό, γιατί ο βαθμός του πολυωνύμου του αριθμητή ξεπερνά αυτόν του παρονομαστή (ως προς z) $\Rightarrow \boxed{\lim_{z \to \infty} H(z) = \infty} \Rightarrow$ Το ∞ ΔΕΝ ΑΝΗΚΕΙ ΣΤΗΝ Π. Σ.

- $$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1 - 2z^{-1}}, \quad |z| > 2$$

πόλοι: $\{1/2, 2\}$ Π. Σ. ΕΚΤΟΣ ΤΟΥ ΠΙΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ ΠΟΛΟΥ

$$H(z) = \frac{2 - \frac{5}{2}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - 2z^{-1})} = \frac{2z^2 - \frac{5}{2}z}{z^2 - \frac{5}{2}z + 1}$$

Βαθμός αριθμητή = Παρονομαστή

$\Rightarrow$ ΝΑΙ, είναι αιτιατό.

Εναλλακτικά: $h[n] = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2^n\right] u[n]$

(από συνάρτηση μεταφοράς & Π.Σ.)

10.5. Ανάλυση Γ.Χ.Α. Συστημάτων με Μ/Σ Ζ (IV)

ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ: (Stability)

ΓΕΝΙΚΑ:

ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ Γ.Χ.Α. ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ $\Leftrightarrow$ $h[n]$ ΑΘΡΟΙΣΙΜΗ ΚΑΤ' ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ (absolutely summable) $\Leftrightarrow$ ΥΠΑΡΧΕΙ DTFT $H(e^{j\omega})$ $\Leftrightarrow$ Π.Σ. ΤΗΣ $H(z)$ ΠΕΡΙΛΑΜΒΑΝΕΙ ΤΟΝ ΜΟΝΑΔΙΑΙΟ ΚΥΚΛΟ

ΕΙΔΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ:

Για ΑΙΤΙΑΤΟ Γ.Χ.Α. ΣΥΣΤΗΜΑ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΜΕ ΡΗΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ: ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ $\Leftrightarrow$ ΟΛΟΙ ΟΙ ΠΟΛΟΙ ΒΡΙΣΚΟΝΤΑΙ ΕΝΤΟΣ ΤΟΥ ΜΟΝΑΔΙΑΙΟΥ ΚΥΚΛΟΥ (ΜΕΤΡΟ < 1)

10.5. Ανάλυση Γ.Χ.Α. Συστημάτων με Μ/Σ Z (V)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

- $H(z) = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \dfrac{1}{1-2z^{-1}}$ (*) ΠΟΛΟΙ: $\{1/2, 2\}$

Αν Π.Σ. είναι η: $|z|>2 \overset{(*)}{\Rightarrow} h[n] = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2^n\right]u[n]$ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΑΠΟΛΥΤΩΣ ΑΘΡΟΙΣΙΜΗ

ΔΕΝ ΠΕΡΙΛΑΜΒΑΝΕΙ ΤΟΝ ΜΟΝΑΔΙΑΙΟ ΚΥΚΛΟ $\Leftrightarrow$ ΑΣΤΑΘΕΣ

Αν η Π.Σ είναι η: $\frac{1}{2}<|z|<2 \overset{(*)}{\Rightarrow} h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 2^n u[-n-1]$

ΕΙΝΑΙ ΑΠΟΛΥΤΩΣ ΑΘΡΟΙΣΙΜΗ

ΠΕΡΙΛΑΜΒΑΝΕΙ ΤΟΝ ΜΟΝΑΔΙΑΙΟ ΚΥΚΛΟ $\Leftrightarrow$ ΕΥΣΤΑΘΕΣ

Το σύστημα επίσης είναι $\boxed{\text{ΜΗ ΑΙΤΙΑΤΟ}}$

Αν η Π.Σ. είναι η: $|z|<1/2 \overset{(*)}{\Rightarrow} h[n] = -\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2^n\right]u[-n-1]$

ΑΣΤΑΘΕΣ

Επίσης, το σύστημα είναι $\boxed{\text{ΜΗ ΑΙΤΙΑΤΟ}}$

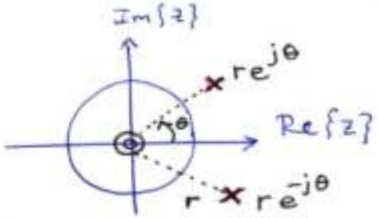
10.5. Ανάλυση Γ.Χ.Α. Συστημάτων με Μ/Σ Ζ (VI)

- $H(z) = \dfrac{1}{1 - a z^{-1}}$ & <u>ΑΙΤΙΑΤΟ</u>

ΠΟΛΟΙ: $\{a\}$
ΑΙΤΙΑΤΟΤΗΤΑ
$\Rightarrow$ Π.Σ.: $|z| > |a|$

ΕΥΣΤΑΘΕΣ ΕΑΝ $|a| < 1$

- $H(z) = \dfrac{1}{1 - (2r\cos\theta) z^{-1} + r^2 z^{-2}}$ & <u>ΑΙΤΙΑΤΟ</u> $(r > 0,\ \theta \in [0, \pi])$



ΠΟΛΟΙ: $\{re^{\pm j\theta}\}$
ΜΗΔΕΝΙΚΑ: $\{0, 0\}$
ΑΙΤΙΑΤΟΤΗΤΑ $\rightarrow$ Π.Σ.: $|z| > |r|$

ΕΥΣΤΑΘΕΣ εάν $|r| < 1$

10.5. Ανάλυση Γ.Χ.Α. Συστημάτων με Μ/Σ Z (VII)

Γ.Χ.Α. ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΕΡΙΓΡΑΦΟΜΕΝΑ ΜΕ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΕΙΣΟΔΟΥ/ΕΞΟΔΟΥ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

$$\xRightarrow{\mu/\sigma\ Z} \sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} X(z)$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

$$\Rightarrow h[n] = \cdots$$

ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΕΣ για Π.Σ. ή ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

10.5. Ανάλυση Γ.Χ.Α. Συστημάτων με Μ/Σ Z (VIII)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] + \frac{1}{3}x[n-1] \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow H(z) = \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

ΠΟΛΟΙ: $\{1/2\}$

Π.Σ

$|z| < 1/2$ $\quad$ $|z| > 1/2$

ΠΣ: $|z| > 1/2 \Longrightarrow h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]$

ΑΙΤΙΑΤΟ & ΕΥΣΤΑΘΕΣ

ΠΣ: $|z| < 1/2 \Longrightarrow h[n] = -\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[-n]$

ΑΝΤΙ-ΑΙΤΙΑΤΟ & ΑΣΤΑΘΕΣ

10.5. Ανάλυση Γ.Χ.Α. Συστημάτων με Μ/Σ Z (IX)

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

ΕΣΤΩ Γ.Χ.Α. ΣΥΣΤΗΜΑ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΜΕ:

1. $x_1[n] = \left(\frac{1}{6}\right)^n u[n] \Rightarrow$
$\Rightarrow y_1[n] = \left[\underbrace{\alpha}_{\text{ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΣ}}\left(\frac{1}{2}\right)^n + 10\left(\frac{1}{3}\right)^n\right] u[n]$

2. $x_2[n] = (-1)^n \Rightarrow y_2[n] = \frac{7}{4}(-1)^n$

$\Rightarrow H(z) = ?$

$$① \Rightarrow \begin{cases} X_1(z) = \dfrac{1}{1-\frac{1}{6}z^{-1}}, & |z| > 1/6 \\ Y_1(z) = \dfrac{a}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \dfrac{10}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} = \dfrac{(a+10) - (5+\frac{a}{2})z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})}, & |z| > 1/2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{Y_1(z)}{X_1(z)} = \frac{\left[(a+10) - (5+\frac{a}{2})z^{-1}\right]\left[1-\frac{1}{6}z^{-1}\right]}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})} \quad ③$$

$$② \Rightarrow z_0 = -1: \; x_2[n] = z_0^n, \; y_2[n] = H(z_0) z_0^n \Rightarrow H(-1) = \frac{7}{4}$$

$-1 \in$ ROC

$\Rightarrow \alpha = -9$

$$\Rightarrow H(z) = \cdots = \frac{z^2 - 13/6\, z + 1/3}{z^2 - 5/6\, z + 1/6}$$

ROC: $|z| > 1/2$

ΕΥΣΤΑΘΕΣ & ΑΙΤΙΑΤΟ

10.5. Ανάλυση Γ.Χ.Α. Συστημάτων με Μ/Σ Ζ (Χ)

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

- ΓΧΑ σύστημα ΕΥΣΤΑΘΕΣ κ ΑΙΤΙΑΤΟ
- Ρητή Συνάρτηση Μεταφοράς $H(z)$
- $H(z)$ έχει πόλο στο $\boxed{z=1/2}$
- $H(z)$ έχει ΜΗΔΕΝΙΚΟ στον $\boxed{\text{μοναδιαίο κύκλο}}$

- $DTFT\{(\frac{1}{2})^n h[n]\}$ ΥΠΑΡΧΕΙ ? $= H(z)\Big|_{z=2}$

ΝΑΙ γιατί το σύστημα είναι αιτιατό & ευσταθές, δηλαδή όλοι οι πόλοι είναι εντός του μοναδιαίου κύκλου!

- $H(e^{j\omega}) = 0$, για κάποιο ω

ΝΑΙ αφού $H(z)$ έχει μηδενικό για κάποιο $z = e^{j\omega}$

- $h[n]$ είναι πεπερασμένης διάρκειας → ΟΧΙ αφού έχουμε πόλο του $H(z)$ στο $z=1/2$

- $n(h[n] * h[n])$ αντιστοιχεί σε ευσταθές σύστημα

$\hookrightarrow G(z) = -z \frac{d}{dz} H^2(z) = -2z H(z) \frac{d}{dz} H(z)$

πόλοι παραμένουν στις ίδιες θέσεις, δηλ. εντός μοναδιαίου κύκλου

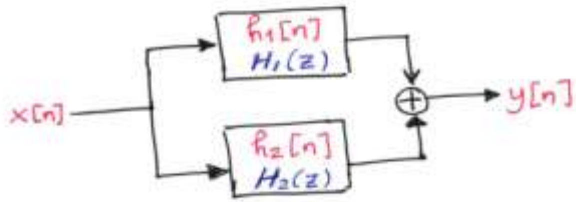
Π.Σ. ΠΕΡΙΕΧΕΙ ΤΟΝ ΜΟΝΑΔΙΑΙΟ ΚΥΚΛΟ $\Rightarrow$ ΕΥΣΤΑΘΕΣ

10.6. Διαγράμματα Υλοποίησης Γ.Χ.Α. Συστημάτων Διακριτού Χρόνου (Ι)

1 ΣΥΝΔΕΣΜΟΛΟΓΙΕΣ Γ.Χ.Α. ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

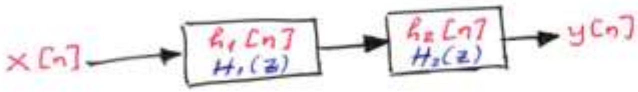
ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ

- ΕΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩ [PARALLEL]



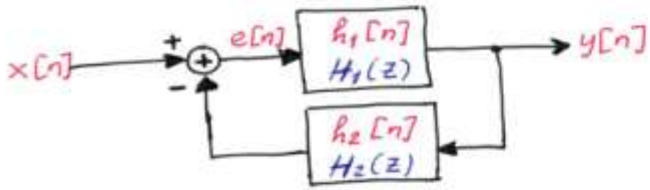
$$h[n] = h_1[n] + h_2[n]$$
$$H(z) = H_1(z) + H_2(z)$$

- ΕΝ ΣΕΙΡΑ [CASCADE]



$$h[n] = h_1[n] * h_2[n]$$
$$H(z) = H_1(z)\,H_2(z)$$

- ΜΕ ΑΝΑΤΡΟΦΟΔΟΤΗΣΗ [FEEDBACK]



$$H(z) = \frac{H_1(z)}{1 + H_1(z)H_2(z)}$$

10.6. Διαγράμματα Υλοποίησης Γ.Χ.Α. Συστημάτων Διακριτού Χρόνου (ΙΙ)

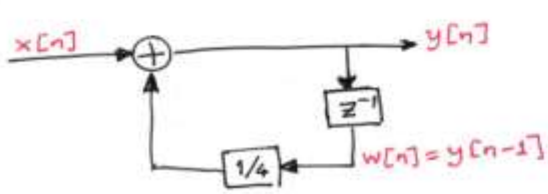
2. ΑΙΤΙΑΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΕΡΙΓΡΑΦΟΜΕΝΑ ΑΠΟ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ / ΡΗΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

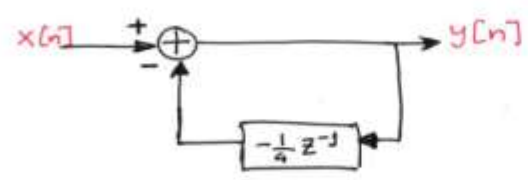
- Βασικά Στοιχεία Υλοποίησης:
  - Άθροιση
  - Πολλαπλασιασμός με συντελεστή
  - Μοναδιαία καθυστέρηση (unit delay)

- Παράδειγμα:

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4} z^{-1}}$$ ΡΗΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

$$y[n] - \frac{1}{4} y[n-1] = x[n]$$ ΕΞΙΣΩΣΗ ΔΙΑΦΟΡΩΝ

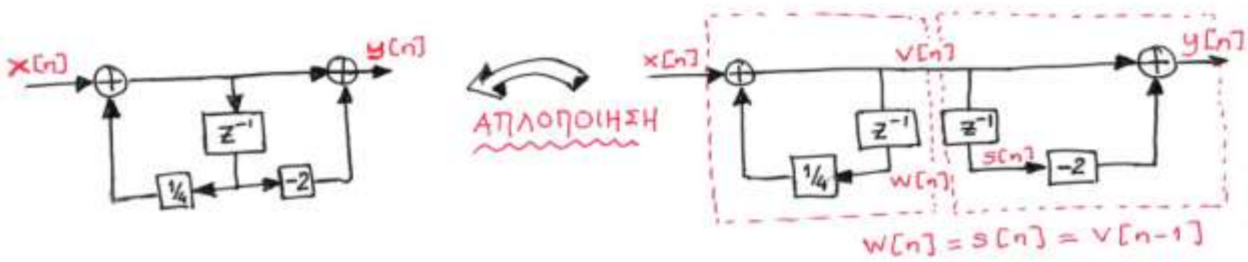




10.6. Διαγράμματα Υλοποίησης Γ.Χ.Α. Συστημάτων Διακριτού Χρόνου (ΙΙΙ)

• ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

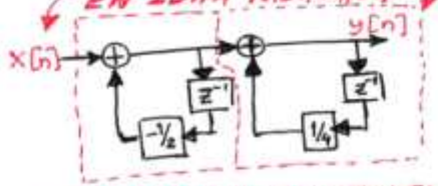
$$H(z) = \frac{1-2z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} = \underbrace{\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}}_{\frac{V(z)}{X(z)}} \cdot \underbrace{(1-2z^{-1})}_{\frac{Y(z)}{V(z)}}$$



10.6. Διαγράμματα Υλοποίησης Γ.Χ.Α. Συστημάτων Διακριτού Χρόνου (IV)

• ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $H(z) = \dfrac{1}{1 + \frac{1}{4} z^{-1} - \frac{1}{8} z^{-2}}$

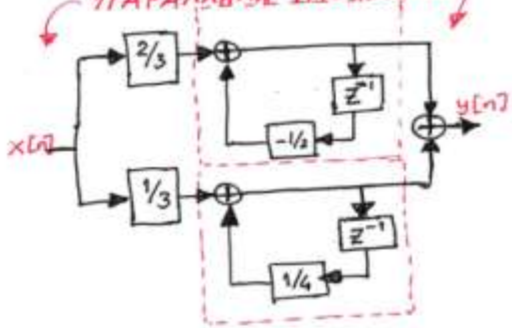
ΕΝ ΣΕΙΡΑ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ



$$= \frac{1}{1 + \frac{1}{2} z^{-1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4} z^{-1}}$$

(ΕΝ ΣΕΙΡΑ) CASCADE

ΠΑΡΑΛΛΗΛΗ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ

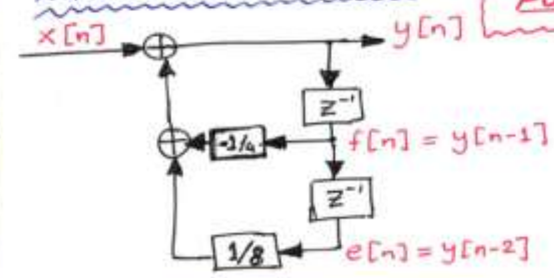


$$= \frac{\frac{2}{3}}{1 + \frac{1}{2} z^{-1}} + \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{4} z^{-1}}$$

(ΠΑΡΑΛΛΗΛΗ) PARALLEL

ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ

DIRECT FORM



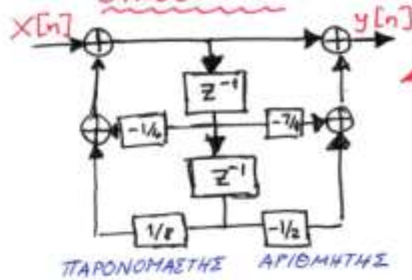
ΕΞΙΣΩΣΗ ΔΙΑΦΟΡΩΝ: $y[n] + \frac{1}{4} y[n-1] - \frac{1}{8} y[n-2] = x[n]$

10.6. Διαγράμματα Υλοποίησης Γ.Χ.Α. Συστημάτων Διακριτού Χρόνου (V)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

$$H(z) = \frac{1 - \frac{7}{4}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}}{1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}}$$

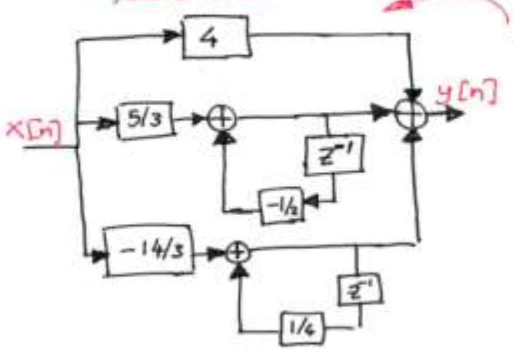
DIRECT FORM



$$= \frac{1}{1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}} \cdot \left(1 - \frac{7}{4}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}\right)$$

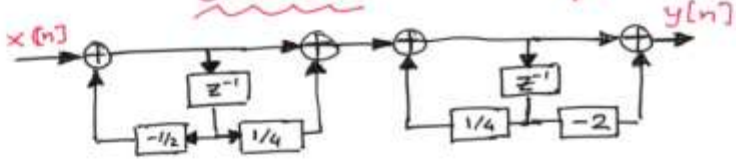
$$= \left(\frac{1 + \frac{1}{4}z^{-1}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}\right) \cdot \left(\frac{1 - 2z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}\right)$$

PARALLEL



$$= 4 + \frac{5/3}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{14/3}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$$

CASCADE



10.7. Μονόπλευρος Μ/Σ Z – Ορισμός

$$\boxed{\mathcal{X}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}}$$

ΜΟΝΟΠΛΕΥΡΟΣ μ/σ Z

UNILATERAL Z-TRANSFORM

- $x[n] \overset{UZ}{\longleftrightarrow} \mathcal{X}(z) = \mathcal{UZ}\{x[n]\}$
- $\mathcal{UZ}\{x[n]\} = \mathcal{Z}\{x[n]u[n]\}$
- $\mathcal{UZ}\{x[n]\} = \mathcal{Z}\{x[n]\}$, για ΑΙΤΙΑΤΑ σήματα. $(x[n]=0,\ n<0)$
- ROC/Π.Σ.: Πάντα προς το εξωτερικό κύκλου.

10.7. Μονόπλευρος Μ/Σ Z – Παραδείγματα

- $\boxed{x[n] = a^n u[n]}$

Αιτιατή ακολουθία $\Rightarrow \mathcal{UZ}\{x[n]\} = \mathcal{Z}\{x[n]\}$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{X}(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|}$$

- $\boxed{x[n] = a^{n+1} u[n+1]}$

δεν είναι αιτιατή ακολουθία, περιμένουμε $\mathcal{UZ}\{x[n]\} \neq \mathcal{Z}\{x[n]\}$

$$X(z) = \frac{z}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|$$ ΔΙΠΛΕΥΡΟΣ

ΔΙΑΦΕΡΟΥΝ

$$\mathcal{X}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^{n+1} z^{-n} = \frac{a}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|$$ ΜΟΝΟΠΛΕΥΡΟΣ

- $\boxed{\mathcal{X}(z) = \frac{3 - \frac{5}{6} z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{4} z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3} z^{-1}\right)} \Rightarrow x[n] = ?}$

ROC: $|z| > 1/3$

$$\boxed{x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]}, \quad n \geq 0$$

10.7. Μονόπλευρος Μ/Σ Z – Ιδιότητες (I)

Μερικές ιδιότητες του ΔΙΠΛΕΥΡΟΥ μ/σ Z

- διαφοροποιούνται στην περίπτωση του ΜΟΝΟΠΛΕΥΡΟΥ μ/σ.

- ΣΥΝΕΛΙΞΗ:

  Απαιτεί: $x_1[n] = x_2[n] = 0, \ \forall n<0$

  Τότε: $\boxed{x_1[n] * x_2[n] \xleftrightarrow{\mathcal{UZ}} \mathcal{X}_1(z)\mathcal{X}_2(z)}$

- ΧΡΟΝΙΚΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ (ΚΑΘΥΣΤΕΡΗΣΗ):

$$x[n-1] \xleftrightarrow{\mathcal{UZ}} z^{-1}\mathcal{X}(z) + x[-1]$$

$$x[n-2] \xleftrightarrow{\mathcal{UZ}} z^{-2}\mathcal{X}(z) + x[-1]z^{-1} + x[-2]$$

. . . . . .

Αποδειξη:

$$y[n]=x[n-1] \Rightarrow \mathcal{Y}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n-1]z^{-n} = x[-1] + \sum_{n=1}^{\infty} x[n-1]z^{-n}$$

$$= x[-1] + \sum_{n=1}^{\infty} x[n-1]z^{-(n-1)}z^{-1}$$

$$\overset{n'=n-1}{=} x[-1] + \left(\sum_{n'=0}^{\infty} x[n']z^{-n'}\right)z^{-1} = x[-1] + z^{-1}\mathcal{X}(z)$$

10.7. Μονόπλευρος Μ/Σ Z – Ιδιότητες (ΙΙ)

- Η ΤΕΛΕΥΤΑΙΑ ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΕΙΝΑΙ ΧΡΗΣΙΜΗ ΣΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ ΜΕ ΜΗ ΜΗΔΕΝΙΚΕΣ ΑΡΧΙΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ.

- ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

ΑΙΤΙΑΤΟ Γ.Χ.Α. ΣΥΣΤΗΜΑ: $\boxed{y[n] + 3y[n-1] = x[n]}$ (*)

ΕΙΣΟΔΟΣ: $\boxed{x[n] = a\,u[n]}$

ΜΗ ΜΗΔΕΝΙΚΗ ΑΡΧΙΚΗ ΣΥΝΘΗΚΗ: $\boxed{y[-1] = \beta}$

$$(*) \Rightarrow Y(z) + 3\beta + 3z^{-1}Y(z) = \frac{a}{1-z^{-1}}$$

$$\Rightarrow Y(z) = \underbrace{-\frac{3\beta}{1+3z^{-1}}}_{\text{ZERO INPUT RESPONSE}} + \underbrace{\frac{a}{(1-z^{-1})(1+3z^{-1})}}_{\text{ZERO STATE RESPONSE}}$$

UZ of:

$\Longrightarrow$ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΣΕ ΜΕΡΙΚΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ & $(UZ)^{-1}$

πχ με $\alpha = 8$, $\beta = 1$: $\boxed{y[n] = [3(-3)^n + 2]\,u[n]}$, $n \geq 0$

10.7. Ιδιότητες Μονόπλευρου Μ/Σ Ζ (III)

Μονόπλευροι μετασχηματισμοί Ζ:

$$x[n] \leftrightarrow \mathcal{X}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x[n]\, z^{-n}$$

Ιδιότητες:

Για αιτιατά $x[n]$: $\mathcal{X}(z) = X(z)$

Για αιτιατά $x_1[n]$, $x_2[n]$: $x_1[n] * x_2[n] \leftrightarrow \mathcal{X}_1(z)\, \mathcal{X}_2(z)$

$$x[n+1] \leftrightarrow z\, \mathcal{X}(z) - z\, x[0]$$

$$x[n-1] \leftrightarrow z^{-1}\, \mathcal{X}(z) + x[-1]$$

$$x[n-k] \leftrightarrow z^{-k}\, \mathcal{X}(z) + \sum_{m=0}^{k-1} z^{-m}\, x[m-k] \quad (\text{για } k > 0)$$