



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ



Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών



ΘΕΩΡΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Γεράσιμος Ποταμιάνος

*Αναπλ. Καθηγητής,
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών*

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

<http://www.inf.uth.gr/~gpotamianos>



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ



Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών



ΘΕΩΡΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Ενότητα 5: ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

5.0. Εισαγωγή

5.1. Μ/Σ Fourier Απεριοδικών Σημάτων Διακριτού Χρόνου

5.2. Μ/Σ Fourier Περιοδικών Σημάτων Διακριτού Χρόνου

5.3-7. Ιδιότητες Μ/Σ Fourier Διακριτού Χρόνου

5.8. Ανάλυση Γ.Χ.Α. Συστημάτων Περιγραφόμενων από Εξισώσεις Διαφορών

– Παράρτημα Α.2: Ανάλυση σε Μερικά Κλάσματα



5.0. Εισαγωγή

- Στο κεφάλαιο 4 μελετήσαμε το μ/σ **Fourier** σημάτων **συνεχούς χρόνου**.
- Στο κεφάλαιο αυτό (5) θα μελετήσουμε το μ/σ **Fourier διακριτού χρόνου**.
 - ✓ Απεριοδικά και περιοδικά σήματα διακριτού χρόνου.
 - ✓ Υπάρχουν πολλές ομοιότητες με τον συνεχή χρόνο, αλλά και σημαντικές διαφορές.
- Δίνουμε μεγάλη σημασία στις **ιδιότητες** μετασχηματισμού Fourier.
 - ✓ Π.χ., συνέλιξη, γινόμενο.
- Εφαρμογή σε Γ.Χ.Α. συστήματα διακριτού χρόνου που περιγράφονται με **εξισώσεις διαφορών**.





5.1. Μ/Σ Fourier Διακριτού Χρόνου (DTFT) για Απεριοδικά Σήματα – Ανάπτυξη (I)

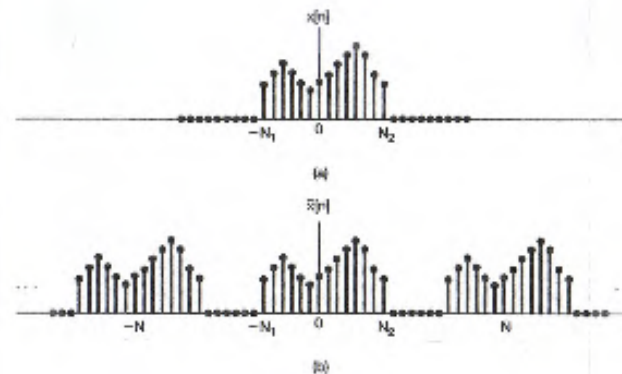
Ανάπτυξη του Μ/Σ ξεκινώντας από την σειρά Fourier Διακριτού χρόνου.

- $x[n]$ ΣΗΜΑ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΗΣ ΔΙΑΡΚΕΙΑΣ, δηλ. $x[n] = 0$ $\forall n > N_2, n < -N_1$

- $\tilde{x}[n]$ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΣΗΜΑ που προκύπτει από επανάληψη του $x[n]$ με περίοδο N

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n - kN]$$

- $\tilde{x}[n] \rightarrow x[n]$
 $N \rightarrow 0$



Σχ. 5.1. από βιβλίο Oppenheim-Willsky





5.1. DTFT για Απεριοδικά Σήματα – Ανάπτυξη (II)

Από σειρά Fourier Διακριτού Χρόνου (DFS):

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk \frac{2\pi}{N} n} \quad (1)$$

με:

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_2} \tilde{x}[n] e^{-jk \frac{2\pi}{N} n} = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-jk \frac{2\pi}{N} n} \Rightarrow a_k = \frac{1}{N} X(e^{jk\omega_0}) \quad (2)$$

Ορίσουμε:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

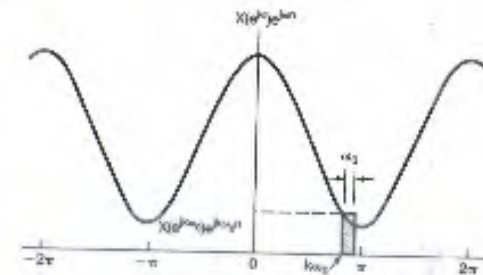
$\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$

ΑΡΑ: (1), (2) \Rightarrow

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} \frac{1}{N} X(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n}$$
$$\stackrel{\omega_0 = \frac{2\pi}{N}}{\equiv} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=\langle N \rangle} X(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n} \omega_0$$

$N \rightarrow \infty$ \downarrow $N \rightarrow \infty$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$



Σχ. 5.2 από βιβλίο Oppenheim-Willsky





5.1. DTFT για Απεριοδικά Σήματα – Ανάπτυξη (III)

ΖΕΥΓΟΣ Μ/Σ FOURIER ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ (DTFT):

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

ΣΥΝΘΕΣΗ
IDTFT

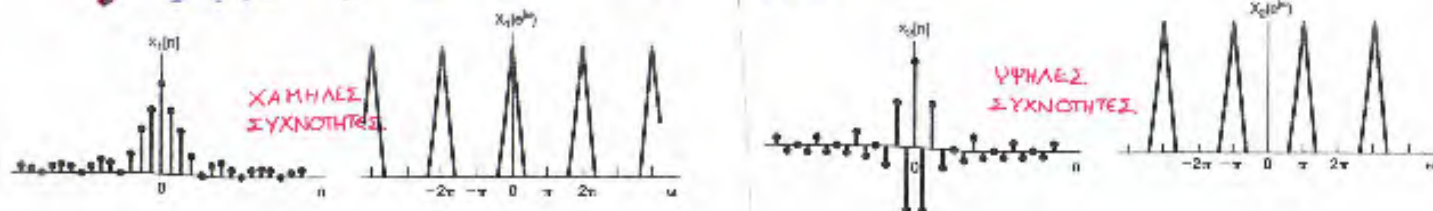
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

ΑΝΑΛΥΣΗ
DTFT

↳ ΦΑΣΜΑ / SPECTRUM

ΟΜΟΙΟΤΗΤΕΣ / ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΜΕ ΣΥΝΕΧΗ ΧΡΟΝΟ (CTFT):

- DFS ακ περιόδικων $\tilde{x}[n]$ εκφράζονται ως δείγματα του $X(e^{j\omega})$
- DTFT άδραστα αντι ολοκληρώματος
- Σύνδεση: ολοκλήρωση σε πεπερασμένο διάστημα (2π) .
- $X(e^{j\omega})$ περιοδικό με περίοδο (2π)



Σχ. 5.3. από βιβλίο Oppenheim-Willsky

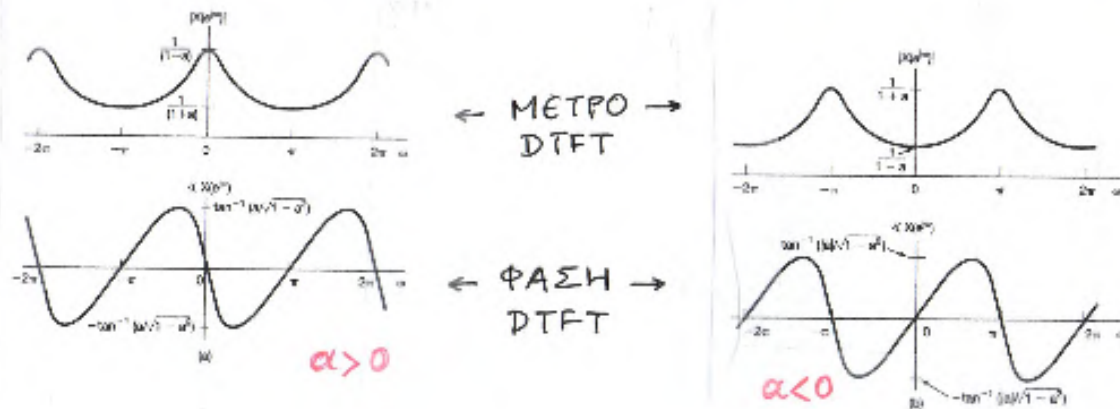




5.1. DTFT για Απεριοδικά Σήματα – Παραδείγματα (I)

① $x[n] = a^n u[n], |a| < 1$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (a e^{-j\omega})^n = \frac{1}{1 - a e^{-j\omega}}$$



Σχ. 5.4 από βιβλίο Oppenheim-Willsky (παραλλαγή)

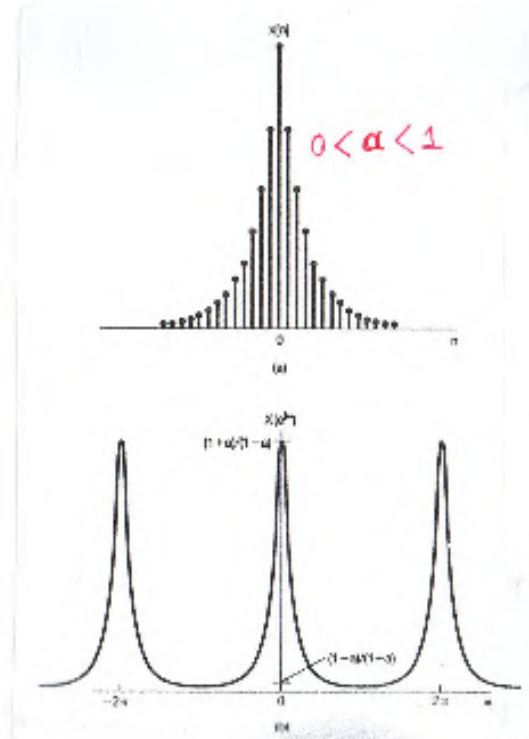




5.1. DTFT για Απεριοδικά Σήματα – Παραδείγματα (II)

$$\textcircled{2} \quad x[n] = a^{|n|}, \quad |a| < 1$$

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^{|n|} e^{-j\omega n} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} (ae^{j\omega})^{-n} \\ &= \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} + \left[\frac{1}{1 - ae^{j\omega}} - 1 \right] \\ &= \frac{1 - a^2}{1 - 2a \cos \omega + a^2} \end{aligned}$$



Σχ. 5.5 από βιβλίο Oppenheim-Willsky

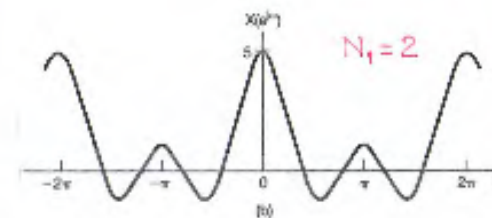
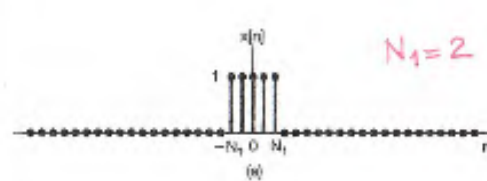




5.1. DTFT για Απεριοδικά Σήματα – Παραδείγματα (III)

$$\textcircled{3} \quad x[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leq N_1 \\ 0, & |n| > N_1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j\omega n} = \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-j\omega(m-N_1)} = \\ &= e^{j\omega N_1} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-j\omega m} = \\ &= e^{j\omega N_1} \frac{1 - e^{-j\omega(2N_1+1)}}{1 - e^{-j\omega}} = \\ &= \frac{e^{-j\frac{\omega}{2}} [e^{j\omega(N_1+\frac{1}{2})} - e^{-j\omega(N_1+\frac{1}{2})}]}{e^{-j\frac{\omega}{2}} [e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}}]} = \frac{\sin[\omega(N_1+\frac{1}{2})]}{\sin(\omega/2)} \end{aligned}$$



Σχ. 5.6 από βιβλίο Oppenheim-Willsky



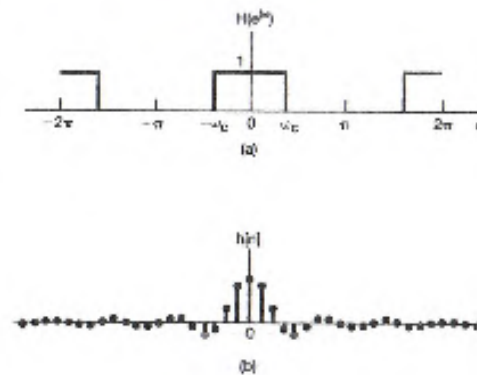


5.1. DTFT για Απεριοδικά Σήματα – Παραδείγματα (IV)

$$\textcircled{4} \quad H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

↳ ΣΤΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ $[-\pi, \pi]$

$$\begin{aligned} h[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{jn} [e^{j\omega_c n} - e^{-j\omega_c n}] \\ &= \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n} \end{aligned}$$



Σχ. 5.17 από βιβλίο Oppenheim-Willsky





5.1. DTFT για Απεριοδικά Σήματα – Παραδείγματα (V)

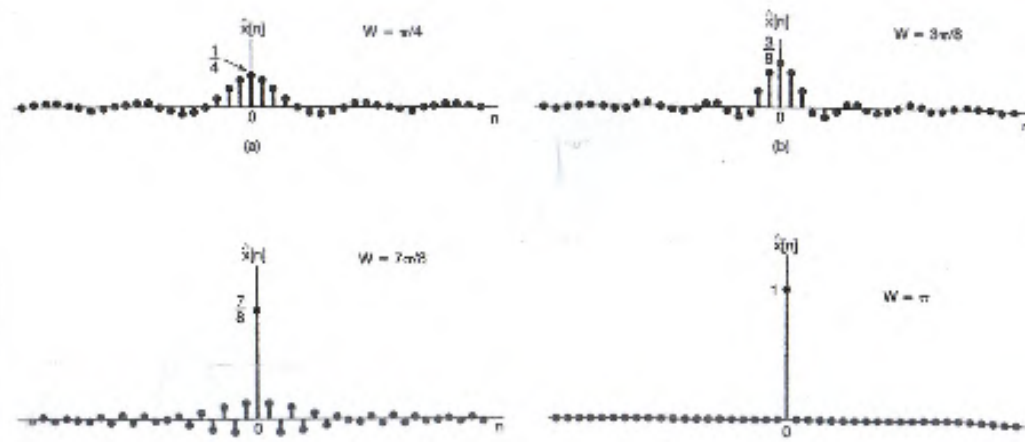
5 $x[n] = \delta[n]$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n} = 1$$

INVERSE :

$$\hat{x}_W[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W e^{j\omega n} d\omega = \frac{\sin Wn}{\pi n} \stackrel{\text{για } W=\pi}{=} \delta[n]$$

NO GIBBS PHENOMENON



Σχ. 5.7 από βιβλίο Oppenheim-Willsky (μερικό)





5.1. DTFT για Απεριοδικά Σήματα – Σύγκλιση

ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΕΑΝ :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| < \infty$$

ABSOLUTE
SUMMABLE

(\Rightarrow)

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 < \infty$$

ΠΕΤΕΡΑΣΜΕΝΗ
ΕΝΕΡΓΕΙΑ

ΤΟΤΕ:

ΕΣΤΩ $\hat{x}_W[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$

$\hat{x}_\pi[n] = x[n]$ για $W = \pi$

(ΔΕΝ ΕΜΦΑΝΙΖΕΤΑΙ ΤΟ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ GIBBS)





5.2. DTFT για Περιοδικά Σήματα (I)

Ενσωμάτωση ΠΕΡΙΟΔΙΚΩΝ ΣΗΜΑΤΩΝ
στον φορτισμένο του DTFT.

Έστω $x[n] = e^{j\omega_0 n}$ \Rightarrow $X(e^{j\omega}) = \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi\ell)$

Απόδειξη: IDTFT $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega =$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi\ell) e^{j\omega n} d\omega$$

$$= \frac{2\pi}{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega n} d\omega = e^{j\omega_0 n} \int_0^{2\pi} \delta(\omega - \omega_0) d\omega$$

για $\omega_0 \in [0, 2\pi)$ $= e^{j\omega_0 n}$



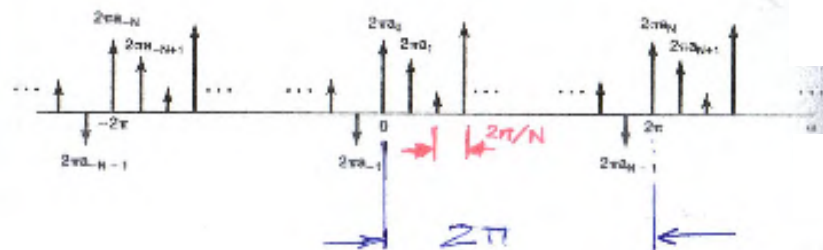


5.2. DTFT για Περιοδικά Σήματα (II)

ΓΕΝΙΚΕΥΟΝΤΑΣ : $x[n]$ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ με ΠΕΡΙΟΔΟ N

$$x[n] = \sum_{k \in \langle N \rangle} a_k e^{jk \left(\frac{2\pi}{N} \right) n} \leftarrow \text{DFS}$$

$$\Rightarrow X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$$



Σχ. 5.9(d) από βιβλίο Oppenheim-Willsky (παραλλαγή)



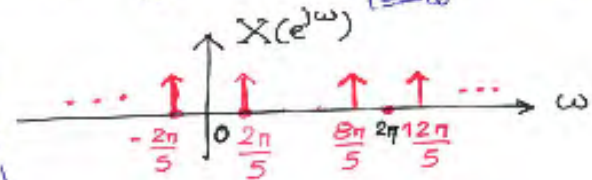


5.2. DTFT για Περιοδικά Σήματα -- Παραδείγματα

① $x[n] = \cos \frac{2\pi}{5} n$ $N=5$, ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ \Rightarrow

\Rightarrow DFS $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right) e^{j \frac{2\pi}{5} n} + \left(\frac{1}{2}\right) e^{-j \frac{2\pi}{5} n}$
 $\hookrightarrow a_1$ $\hookrightarrow a_{-1} = a_4$

$\Rightarrow X(e^{j\omega}) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \pi \delta(\omega - \frac{2\pi}{5} - 2\pi l) + \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \pi \delta(\omega + \frac{2\pi}{5} - 2\pi l)$

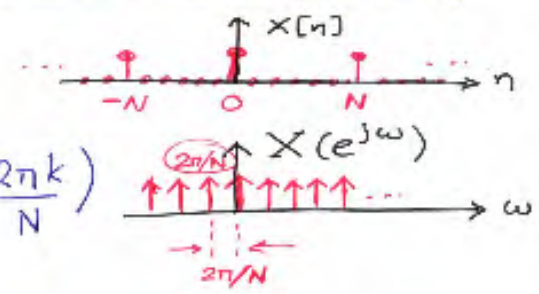


② $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - kN]$

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΜΕ ΠΕΡΙΟΔΟ N

\hookrightarrow DFS: $a_k = 1/N, \forall k$

$\Rightarrow X(e^{j\omega}) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi k}{N})$





5.3. Ιδιότητες DTFT (I)

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ :

$$x[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X(e^{j\omega})$$

$$X(e^{j\omega}) = \text{DTFT} \{ x[n] \}$$

$$x[n] = \text{IDTFT} \{ X(e^{j\omega}) \}$$

① ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΤΗΤΑ
ΤΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ
PERIODICITY

$$X(e^{j(\omega+2\pi)}) = X(e^{j\omega})$$

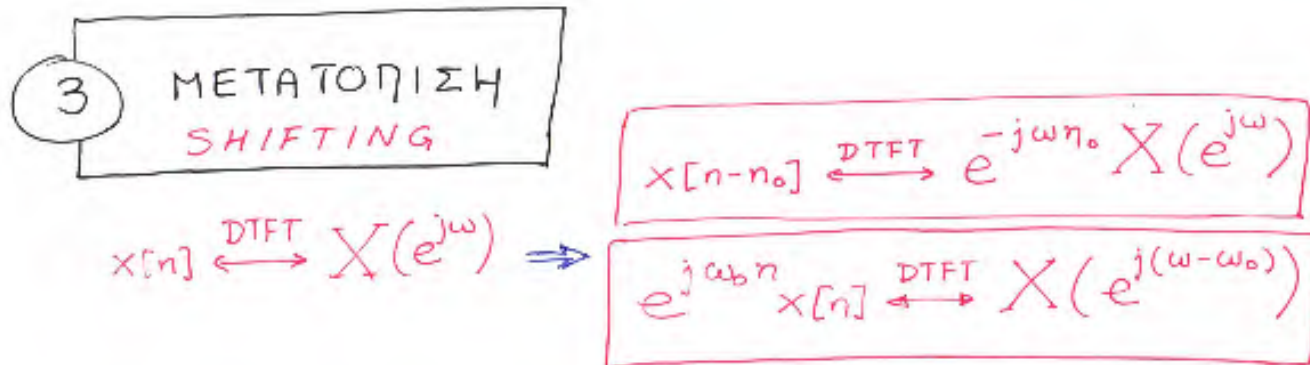
② ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑ
LINEARITY

$$x_i[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X_i(e^{j\omega}), i=1,2 \Rightarrow a x_1[n] + \beta x_2[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} a X_1(e^{j\omega}) + \beta X_2(e^{j\omega})$$





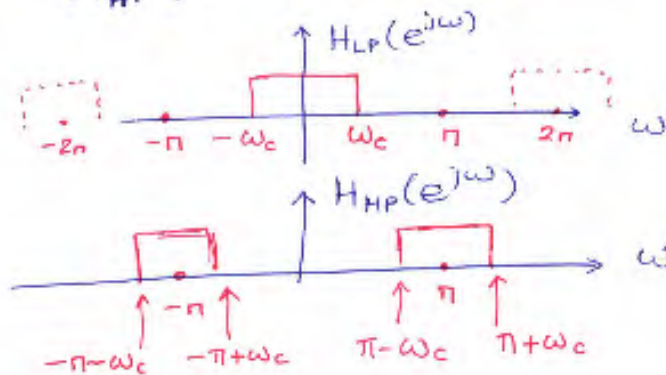
5.3. Ιδιότητες DTFT (II)



• ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

(βαθυπερατό / υψηροπερατό φίλτρο)
LOWPASS / HIGHPASS FILTER

$$H_{HP}(e^{j\omega}) = H_{LP}(e^{j(\omega-\pi)})$$



$$h_{HP}[n] = e^{j\pi n} h_{LP}[n] = (-1)^n h_{LP}[n]$$



5.3. Ιδιότητες DTFT (III)

4 ΣΥΖΥΓΙΑ / ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ
CONJUGATION / CONJUGATE SYMMETRY

$$x[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X(e^{j\omega}) \quad \Rightarrow \quad x^*[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X^*(e^{-j\omega})$$

ΓΙΑ
ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΑ
 $x[n]$

$x[n] \in \mathbb{R}$

$$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$$

ΜΕΤΡΟ: ΑΡΤΙΟ, ΦΑΣΗ: ΠΕΡΙΤΤΗ

$x[n] \in \mathbb{R} \otimes \text{EVEN} \quad \Downarrow$

$X(e^{j\omega}) \quad \text{REAL} \otimes \text{EVEN}$

$x[n] \in \mathbb{R} \otimes \text{ODD} \quad \Downarrow$

$X(e^{j\omega}) \quad \text{IMAGINARY} \otimes \text{ODD}$

$x[n] \in \mathbb{R}$:

$$\text{Ev}\{x[n]\} \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \text{Re}\{X(e^{j\omega})\}$$

$$\text{Od}\{x[n]\} \xleftrightarrow{\text{DTFT}} j \text{Im}\{X(e^{j\omega})\}$$





5.3. Ιδιότητες DTFT (IV)

5 ΔΙΑΦΟΡΑ / ΑΘΡΟΙΣΗ
DIFFERENCING / ACCUMULATION

$$x[n] - x[n-1] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} (1 - e^{-j\omega}) X(e^{j\omega})$$

$$\sum_{m=-\infty}^n x[m] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} X(e^{j\omega}) + \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ :

$$g[n] = \delta[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} G(e^{j\omega}) = 1$$

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^n g[m] = u[n] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} G(e^{j\omega}) + \pi G(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

$$u[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$





5.3. Ιδιότητες DTFT (V)

6 ΑΝΑΚΛΑΣΗ (χρονική)
TIME REVERSAL

$$x[-n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X(e^{-j\omega})$$

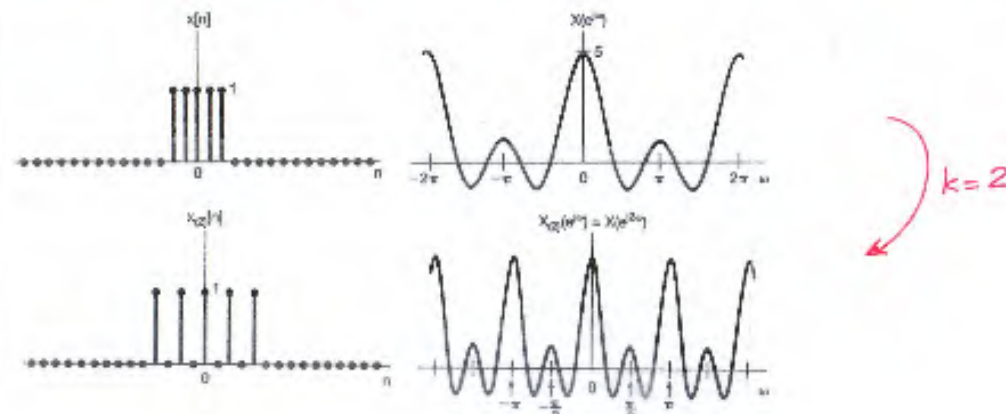
ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

$$y[n] = x[-n] \Rightarrow Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[-n] e^{-j\omega n} \stackrel{m=-n}{=} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] e^{j\omega m}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] e^{-j(-\omega)m} = X(e^{-j\omega})$$

7 ΧΡΟΝΙΚΗ ΔΙΑΣΤΟΛΗ
TIME EXPANSION

$$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n/k], & \text{αν } n \text{ είναι πολλαπλάσιο του } k \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X(e^{jk\omega})$$



Σχ. 5.14 από βιβλίο Oppenheim-Willsky (μερικό)





5.3. Ιδιότητες DTFT (VI)

8 ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΣΤΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ
DIFFERENTIATION IN FREQUENCY

$$nx[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n} \xrightarrow{d/d\omega} \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} -jn x[n] e^{-j\omega n} = \text{DTFT} \{ -jn x[n] \}$$

9 ΣΧΕΣΗ PARSEVAL
PARSEVAL'S RELATION

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΣΗΜΑΤΟΣ
(για αperiodικά σήματα ενέργειας)

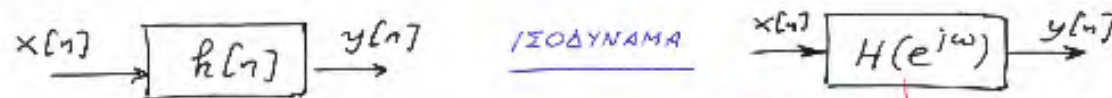




5.4. Ιδιότητα Συνέλιξης DTFT (I)

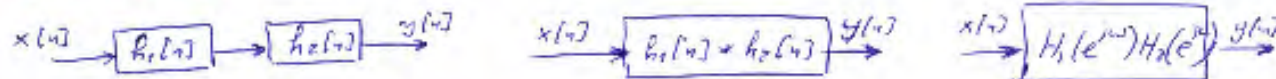
$$y[n] = x[n] * h[n] \implies Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) H(e^{j\omega})$$

- Πολύ χρήσιμη για ανάλυση Γ.Χ.Α. συστημάτων...

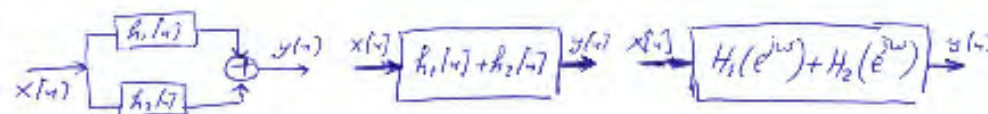


- ΣΥΝΔΕΣΜΟΛΟΓΙΕΣ Γ.Χ.Α. ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ:

- ΕΝ ΣΕΙΡΑ (CASCADE)



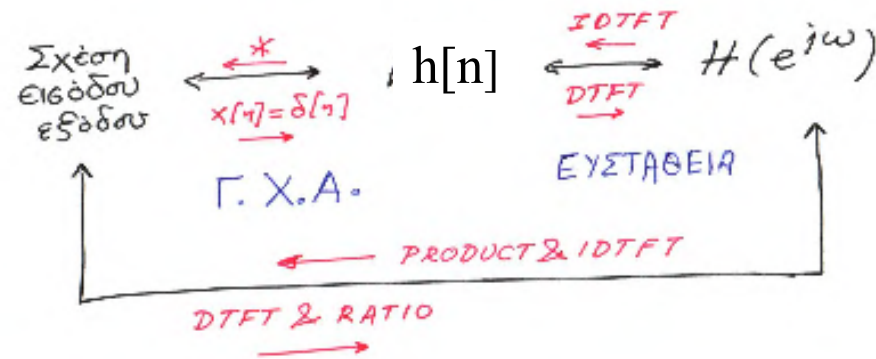
- ΕΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩ (PARALLEL)



Αν υπάρχει, βέβαια...
 Για ευσταδή συστήματα, OK!
 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < \infty$
 αλλιώς απαιτείται χρήση μετασχηματισμού \mathcal{Z}



5.4. Ιδιότητα Συνέλιξης DTFT (II)



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$$h[n] = \delta[n - n_0] \Rightarrow H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_0}$$

$$\Rightarrow Y(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$$

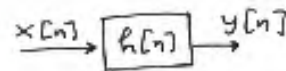
$$\Rightarrow y[n] = x[n - n_0]$$





5.4. Ιδιότητα Συνέλιξης DTFT (III)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:



$$\left. \begin{aligned} h[n] &= a^n u[n] \\ x[n] &= \beta^n u[n] \end{aligned} \right\} \Rightarrow y[n] = ?$$

$|a|, |\beta| < 1$

$$\left. \begin{aligned} \Rightarrow H(e^{j\omega}) &= \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \\ \Rightarrow X(e^{j\omega}) &= \frac{1}{1 - \beta e^{-j\omega}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})(1 - \beta e^{-j\omega})}$$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1
 $a \neq \beta$

$$\Rightarrow Y(e^{j\omega}) = \frac{A}{1 - ae^{-j\omega}} + \frac{B}{1 - \beta e^{-j\omega}}$$

$A = \frac{a}{a-\beta}$ $B = \frac{-\beta}{a-\beta}$

$$\Rightarrow y[n] = \frac{a}{a-\beta} a^n u[n] - \frac{\beta}{a-\beta} \beta^n u[n] = \left[\frac{a^{n+1} - \beta^{n+1}}{a-\beta} \right] u[n]$$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2
 $a = \beta$

$$\Rightarrow Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})^2} = ae^{j\omega} \underbrace{j \frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \right)}_{\substack{\uparrow \text{DTFT} \\ n a^n u[n]}}$$

$$\Rightarrow y[n] = (n+1) a^n u[n+1]$$

$$= \boxed{(n+1) a^n u[n]}$$

$$\underbrace{(n+1) a^{n+1} u[n+1]}_{\substack{\uparrow \text{DTFT} \\ n a^n u[n]}}$$





5.5. Ιδιότητα Πολλαπλασιασμού DTFT (I)

$$x_1[n] x_2[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(e^{j\theta}) X_2(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

↳ ΠΕΡΙΟΔΙΚΗ ΣΥΝΕΛΙΞΗ

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

$$y[n] = x_1[n] x_2[n] \Rightarrow Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1[n] x_2[n] e^{-j\omega n}$$

$$\Rightarrow Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2[n] \left[\int_{2\pi} X_1(e^{j\theta}) \frac{e^{j\theta n}}{2\pi} d\theta \right] e^{-j\omega n}$$

$$\Rightarrow Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(e^{j\theta}) \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2[n] e^{-j(\omega-\theta)n} \right] d\theta$$

$X_2(e^{j(\omega-\theta)})$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(e^{j\theta}) X_2(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$





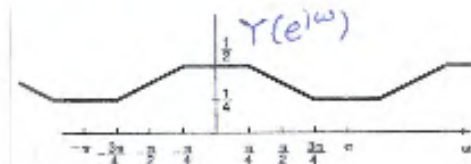
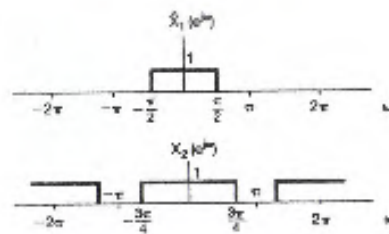
5.5. Ιδιότητα Πολλαπλασιασμού DTFT (II)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ :

$$y[n] = \frac{\sin\left(\frac{3\pi n}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{(\pi n)^2} = \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{3\pi n}{4}\right)}{\pi n}}_{x_1[n]} \cdot \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\pi n}}_{x_2[n]}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow Y(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\theta}) X_2(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{X}_1(e^{j\theta}) X_2(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \end{aligned}$$

↳ ONE PERIOD OF $X_1(e^{j\theta})$



Σχ. 5.20 από βιβλίο Oppenheim-Willsky





5.6. Πίνακας Ιδιοτήτων / Ζευγών DTFT

$$ax[n] + by[n] \leftrightarrow aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$$

$$x[n - n_0] \leftrightarrow e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$$

$$e^{j\omega_0 n} x[n] \leftrightarrow X(e^{j(\omega - \omega_0)})$$

$$x^*[n] \leftrightarrow X^*(e^{-j\omega})$$

$$x[-n] \leftrightarrow X(e^{-j\omega})$$

$$nx[n] \leftrightarrow j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$$

$$\sum_{k=-\infty}^n x[k] \leftrightarrow \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} X(e^{j\omega}) + \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

$$x[n] * y[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega}) Y(e^{j\omega})$$

$$x[n] y[n] \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\theta}) Y(e^{j(\omega - \theta)}) d\theta$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (\text{απεριοδικά } x[n])$$

$$1 \leftrightarrow 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

$$e^{j\omega_0 n} \leftrightarrow 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k)$$

$$\cos(\omega_0 n) \leftrightarrow \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k) + \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi k)]$$

$$\sin(\omega_0 n) \leftrightarrow \frac{\pi}{j} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k) - \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi k)]$$

$$\delta[n] \leftrightarrow 1 \quad \delta[n - n_0] \leftrightarrow e^{-j\omega n_0}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - kN] \leftrightarrow \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$$

$$u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

$$a^n u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1 - a e^{-j\omega}}, \quad |a| < 1$$

$$(n+1) a^n u[n] \leftrightarrow \frac{1}{(1 - a e^{-j\omega})^2}, \quad |a| < 1$$

$$\frac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!} a^n u[n] \leftrightarrow \frac{1}{(1 - a e^{-j\omega})^r}, \quad |a| < 1$$

$$x[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leq N_1 \\ 0, & |n| > N_1 \end{cases} \leftrightarrow \frac{\sin[\omega(N_1 + \frac{1}{2})]}{\sin(\omega/2)}$$

$$\frac{\sin(Wn)}{\pi n} \leftrightarrow X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & 0 \leq |\omega| \leq W \\ 0, & W < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

(για $0 < W < \pi$. Το $X(e^{j\omega})$ είναι περιοδικό.)





5.7. Δυσικότητα (I)

- Εν αντιθέσει με τον συνεχή μετασχηματισμό FOURIER, δεν υπάρχει δυσικότητα στον DTFT, δηλ. μεταξύ $x[n]$ & $X(e^{j\omega})$
- Ωστόσο, υπάρχει δυσικότητα μεταξύ
 - Διακριτής σειράς FOURIER (ανάλυση/σύνθεση περιοδικών σημάτων)
 - DTFT και συνεχούς σειράς FOURIER

	Continuous time		Discrete time	
	Time domain	Frequency domain	Time domain	Frequency domain
Fourier Series	$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$ continuous time periodic in time	$a_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$ discrete frequency aperiodic in frequency	$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 n}$ discrete time periodic in time	$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk\omega_0 n}$ discrete frequency periodic in frequency
Fourier Transform	$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$ continuous time aperiodic in time	$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$ continuous frequency aperiodic in frequency	$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$ discrete time aperiodic in time	$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$ continuous frequency periodic in frequency

Πίνακας 5.3 από βιβλίο Oppenheim-Willsky





5.7. Δυσκότητα (II)

- Υπενθυμίζουμε (DFS):

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk \frac{2\pi}{N} n}, \text{ για } x[n] \text{ ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ με περίοδο } N$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{\eta=-\infty}^{\infty} x[\eta] e^{-jk \frac{2\pi}{N} \eta} \leftarrow \text{επίσης ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ με περίοδο } N$$

Εύκολο να δούμε πως:

$$x[n] \xleftrightarrow{\text{DFS}} a_k$$

$$a_k \xleftrightarrow{\text{DFS}} \frac{1}{N} x[-n]$$

- Υπενθυμίζουμε: **DTFT**

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \quad \text{ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ } 2\pi$$

$$\xrightarrow{\text{Συνάρτηση του } \omega} \text{CFS} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega} \quad L = x[-k]$$

CFS

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad \text{ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ } 2\pi/\omega_0$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$





5.8. Ανάλυση Γ.Χ.Α. Συστημάτων Περιγραφόμενων με Εξισώσεις Διαφορών

ΕΞΙΣΩΣΗ ΔΙΑΦΟΡΩΝ : Γ.Χ.Α. ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ Γ.Χ.Α. ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

$$H(e^{j\omega}) = ?$$

DTFT{LHS} = DTFT{RHS}

ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΣ ΧΡΟΝΙΚΗ ΜΕΤΑΒΟΛΙΣΗ

$$\sum_{k=0}^N a_k e^{-jk\omega} Y(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^M b_k e^{-jk\omega} X(e^{j\omega})$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-jk\omega}}{\sum_{k=0}^N a_k e^{-jk\omega}}$$

ΡΗΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ $e^{-j\omega}$



5.8. Γ.Χ.Α. Συστήματα με Εξ. Διαφορών – Παραδείγματα (I)

ΑΙΤΙΑΤΟ Γ.Χ.Α. ΣΥΣΤΗΜΑ
ΜΕ ΕΙΣΩΡΣΗ ΔΙΑΦΟΡΩΝ

① $y[n] - ay[n-1] = x[n], |a| < 1$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \Rightarrow h[n] = a^n u[n]$$

ΑΙΤΙΑΤΟ Γ.Χ.Α. ΣΥΣΤΗΜΑ
ΜΕ ΕΙΣΩΡΣΗ ΔΙΑΦΟΡΩΝ

② $y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = 2x[n]$

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \frac{2}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\omega} + \frac{1}{8}e^{-j2\omega}} \\ &= \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)} \\ &= \frac{4}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} - \frac{2}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}} \Rightarrow h[n] = \left[4\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]u[n] \end{aligned}$$





5.8. Γ.Χ.Α. Συστήματα με Εξ. Διαφορών – Παραδείγματα (II)

3 ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΟ ΣΥΣΤΗΜΑ (2) $\Rightarrow y[n] = ?$
 $x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= H(e^{j\omega}) X(e^{j\omega}) = \\ &= \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}} \\ &= \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)^2} = \\ &= -\frac{4}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}} - \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)^2} + \frac{8}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} \end{aligned}$$

$$\rightarrow y[n] = \left\{ -4\left(\frac{1}{4}\right)^n - 2(n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^n + 8\left(\frac{1}{2}\right)^n \right\} u[n]$$





A.2. Ανάλυση Ρητής Συνάρτησης σε Μερικά Κλάσματα

Έστω:

$$G(u) = \frac{\beta_{n-1}u^{n-1} + \dots + \beta_1u + \beta_0}{a_nu^n + \dots + a_1u + a_0}$$

ΓΙΑ DTFT: $u = e^{-j\omega}$

Διατρέψτε
 \Rightarrow
 με a_0

$$G(u) = \frac{d_{n-1}u^{n-1} + \dots + d_1u + d_0}{f_nu^n + \dots + f_1u + 1} \quad \begin{matrix} (d_i = \beta_i/a_0) \\ (f_i = a_i/a_0) \end{matrix}$$

ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ

\Rightarrow

$$G(u) = \frac{d_{n-1}u^{n-1} + \dots + d_1u + d_0}{(1 - p_1^{-1}u)^{\sigma_1} (1 - p_2^{-1}u)^{\sigma_2} \dots (1 - p_r^{-1}u)^{\sigma_r}}$$

ΠΑΡΟΝΟΜΑΣΤΗ

ΡΙΖΕΣ: p_1, p_2, \dots, p_r

ΠΟΛ/ΤΗΤΕΣ: $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$

\Rightarrow

ΜΕΡΙΚΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

$$G(u) = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{\sigma_i} \frac{B_{ik}}{(1 - p_i^{-1}u)^k}$$

ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΕΣ

ΡΙΖΕΣ p_i

ΟΠΟΥ:

$$B_{ik} = \frac{1}{(\sigma_i - k)!} (-p_i)^{\sigma_i - k} \left[\frac{d^{\sigma_i - k}}{du^{\sigma_i - k}} [(1 - p_i^{-1}u)^{\sigma_i} G(u)] \right] \Big|_{u=p_i}$$



A.2. Ανάλυση Ρητής Συνάρτησης – Παραδείγματα (I)

<p>1 ΑΙΤΙΑΤΟ Γ.Χ.Α. ΣΥΣΤΗΜΑ</p>	$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = 2x[n]$
---	--

$$\Rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{2}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\omega} + \frac{1}{8}e^{-2j\omega}}$$

$u = e^{-j\omega}$

$$\Rightarrow G(u) = \frac{2}{1 - \frac{3}{4}u + \frac{1}{8}u^2} = \frac{2}{(1 - \frac{1}{2}u)(1 - \frac{1}{4}u)} = \frac{B_{21}}{1 - \frac{1}{2}u} + \frac{B_{22}}{1 - \frac{1}{4}u}$$

ΡΙΖΕΣ: 2, 4

$$B_{21} = (1 - \frac{1}{2}u)G(u) \Big|_{u=2} = \frac{2}{1 - \frac{1}{4}u} \Big|_{u=2} = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}} = 4$$

$$B_{22} = (1 - \frac{1}{4}u)G(u) \Big|_{u=4} = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}u} \Big|_{u=4} = \frac{2}{1 - 2} = -2$$

$u = e^{-j\omega}$

$$\Rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{4}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} - \frac{2}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}} \xrightarrow{\text{IDTFT}} \boxed{h[n] = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 2\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]}$$





A.2. Ανάλυση Ρητής Συνάρτησης – Παραδείγματα (II)

ΕΙΣΟΔΟΣ ΣΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΤΟΥ ΠΑΡ. 1

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \implies y[n] = ?$$

Από το προηγούμενο παράδειγμα:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)}$$

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \implies X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)^2}$$

$v = e^{-j\omega}$

$$G(v) = \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{2}v\right)\left(1 - \frac{1}{4}v\right)^2} = \frac{B_{11}}{1 - \frac{1}{2}v} + \frac{B_{21}}{1 - \frac{1}{4}v} + \frac{B_{22}}{\left(1 - \frac{1}{4}v\right)^2}$$

ΡΙΖΕΣ: 2, ΑΠΛΗ
4, ΔΙΠΛΗ

$$\left\{ \begin{aligned} B_{11} &= \left. \left(1 - \frac{1}{2}v\right) G(v) \right|_{v=2} = \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{4}v\right)^2} \Big|_{v=2} = \frac{2}{(1/2)^2} = 8 \\ B_{21} &= (-4) \left[\frac{d}{dv} \left(\left(1 - \frac{1}{4}v\right)^2 G(v) \right) \right] \Big|_{v=4} = -4 \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}v\right)^2} \Big|_{v=4} = -4 \\ B_{22} &= \left. \left(1 - \frac{1}{4}v\right)^2 G(v) \right|_{v=4} = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}v} \Big|_{v=4} = -2 \end{aligned} \right.$$





A.2. Ανάλυση Ρητής Συνάρτησης – Παραδείγματα (III)

$$\begin{aligned} & \Rightarrow \text{ } \overset{v=e^{-j\omega}}{\text{}} Y(e^{j\omega}) = \frac{8}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} - \frac{4}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}} - \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)^2} \end{aligned}$$

IDTFT
 \Rightarrow

$$y[n] = \left\{ 8 \left(\frac{1}{2}\right)^n - 4 \left(\frac{1}{4}\right)^n - 2(n+1) \left(\frac{1}{4}\right)^n \right\} u[n]$$





A.2. Ανάλυση Ρητής Συνάρτησης – Παραδείγματα (IV)

<p>3 ΑΙΤΙΑΤΟ Γ.Χ.Α. ΣΥΣΤΗΜΑ</p>	$y[n] + \frac{5}{6}y[n-1] + \frac{1}{6}y[n-2] = x[n] + 3x[n-1] + \frac{11}{6}x[n-2] + \frac{1}{3}x[n-3]$
---	--

$$\Rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{1 + 3e^{-j\omega} + (11/6)e^{-j2\omega} + (1/3)e^{-j3\omega}}{1 + (5/6)e^{-j\omega} + (1/6)e^{-j2\omega}}$$

$$\Rightarrow G(u) = \frac{1 + 3u + (11/6)u^2 + (1/3)u^3}{1 + (5/6)u + (1/6)u^2} = c_0 + c_1u + \frac{b_1u + b_0}{1 + \frac{5}{6}u + \frac{1}{6}u^2}$$

Κάνοντας πράξεις...

$$1 + 3u + \frac{11}{6}u^2 + \frac{1}{3}u^3 = (c_0 + b_0) + \left(\frac{5}{6}c_0 + c_1 + b_1\right)u + \left(\frac{1}{6}c_0 + \frac{5}{6}c_1\right)u^2 + \left(\frac{1}{6}c_1\right)u^3$$

$$\Rightarrow c_1 = 2, c_0 = 1, b_1 = 1/6, b_0 = 0$$

$$\text{Άρα: } G(u) = 1 + 2u + \frac{\frac{1}{6}u}{1 + \frac{5}{6}u + \frac{1}{6}u^2} = 1 + 2u + \frac{\frac{1}{6}u}{\underbrace{\left(1 + \frac{1}{3}u\right)\left(1 + \frac{1}{2}u\right)}} = 1 + 2u + \frac{1}{4 + \frac{1}{3}u} - \frac{1}{4 + \frac{1}{2}u}$$

$$\Rightarrow H(e^{j\omega}) = 1 + 2e^{-j\omega} + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}e^{-j\omega}} - \frac{1}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

$$\Rightarrow \text{IDTFT } h[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + \left[\left(-\frac{1}{3}\right)^n - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right] u[n]$$

