



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών



ΘΕΩΡΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Γεράσιμος Ποταμιάνος

*Αναπλ. Καθηγητής,
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών*

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

<http://www.inf.uth.gr/~gpotamianos>



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ



Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών



ΘΕΩΡΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Ενότητα 3: ΣΕΙΡΕΣ FOURIER ΠΕΡΙΟΔΙΚΩΝ ΣΗΜΑΤΩΝ

3.1. Εισαγωγή

3.2. Απόκριση Γ.Χ.Α. Συστημάτων σε Μιγαδικά Εκθετικά

3.3. Σειρά Fourier Περιοδικών Σημάτων Συνεχούς Χρόνου

3.4,5. Σύγκλιση / Ιδιότητες Σειρών Fourier

3.6. Σειρά Fourier Περιοδικών Σημάτων Διακριτού Χρόνου

3.7. Σειρές Fourier και Γ.Χ.Α. Συστήματα



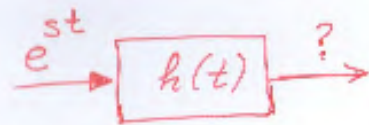
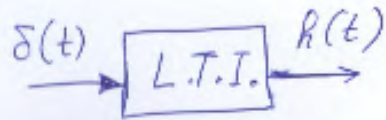
3.1. Εισαγωγή

- Έχουμε μάθει την αναπαράσταση / ανάλυση Γ.Χ.Α. συστημάτων με βάση την κρουστική τους απόκριση.
 - ✓ Βασίζεται στην αναπαράσταση σημάτων ως γραμμικό συνδυασμό μετατοπισμένων **κρουστικών** σημάτων.
- Εδώ στοχεύουμε σε εναλλακτικό τρόπο αναπαράστασης.
 - ✓ Βασίζεται στην αναπαράσταση σημάτων ως γραμμικό συνδυασμό μιγαδικών **εκθετικών**.
- Ξεκινάμε με αναπαράσταση περιοδικών σημάτων ως σειρών Fourier.
- Επεκτείνουμε αργότερα την προσέγγιση και σε μη περιοδικά σήματα πεπερασμένης ενέργειας.
- Οδηγούμαστε έτσι σε πολύ χρήσιμα εργαλεία για ανάλυση Γ.Χ.Α. συστημάτων στο πεδίο της συχνότητας.
- Προσέγγιση βασίζεται σε εργασίες των Euler και Fourier (1807).





3.2. Απόκριση Γ.Χ.Α. Συστημάτων σε Μιγαδικά Εκθετικά (I)



Ⓢ μιγαδικός

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{st} e^{-s\tau} d\tau \\
 &= e^{st} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau \\
 &= H(s) e^{st}
 \end{aligned}$$

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

↪ ΙΔΙΟΣΥΝΑΡΤΗΣΗ (eigenfunction)

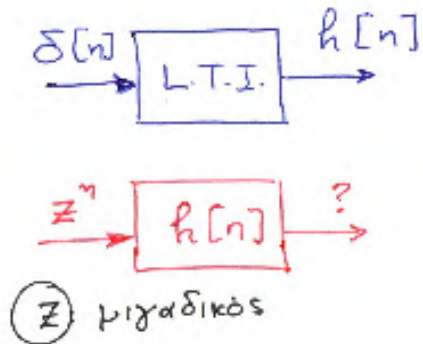
← ΙΔΙΟΤΙΜΗ (eigenvalue)

↪ μπορεί και να τὴν συγκλίνει





3.2. Απόκριση Γ.Χ.Α. Συστημάτων σε Μιγαδικά Εκθετικά (II)



$$\begin{aligned}
 y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] x[n-k] \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] z^{n-k} \\
 &= z^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] z^{-k} \\
 &= H(z) \cdot z^n \quad \rightarrow \text{ΙΔΙΟΣΥΝΑΡΤΗΣΗ}
 \end{aligned}$$

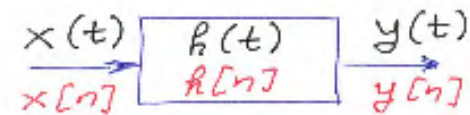
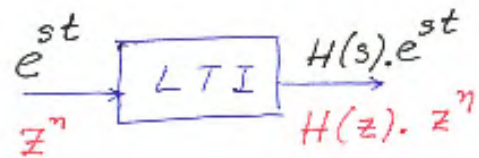
$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] z^{-k}$$

← ΙΔΙΟΤΙΜΗ

↳ μπορεί και να τὴν συγκλίνει ...



3.2. Απόκριση Γ.Χ.Α. Συστημάτων σε Μιγαδικά Εκθετικά (III)



Λόγω γραμμικότητας, αν:

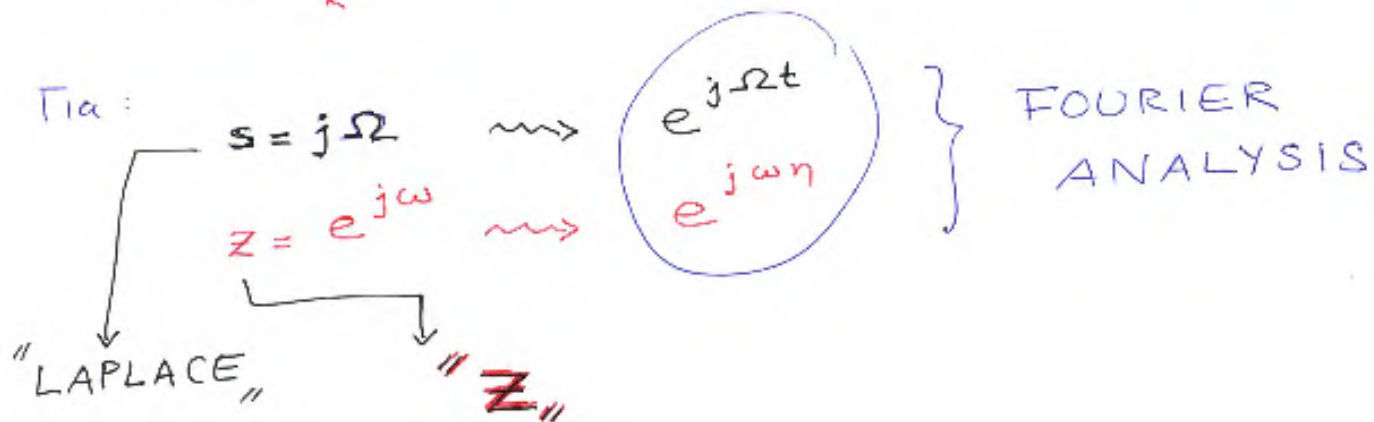
$$x(t) = \sum_k a_k e^{s_k t}$$

$$x[n] = \sum_k a_k z_k^n$$

... τότε:

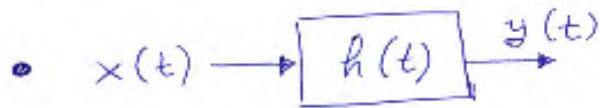
$$\Rightarrow y(t) = \sum_k a_k H(s_k) e^{s_k t}$$

$$\Rightarrow y[n] = \sum_k a_k H(z_k) z_k^n$$





3.2. Απόκριση Γ.Χ.Α. Συστημάτων σε Μιγαδικά Εκθετικά (IV)



$$h(t) = \delta(t-3) \quad \begin{matrix} \text{[ΚΑΘΥΣΤΕΡΗΤΗΣ]} \\ \text{DELAY} \end{matrix}$$

$$y(t) = x(t-3)$$

$$\begin{aligned} \text{Έστω } x(t) = e^{j2t} &\Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau-3) e^{j(2t-2\tau)} d\tau = \\ &= e^{j2t} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau-3) e^{-j2\tau} d\tau \\ &= e^{j2t} \cdot e^{-j6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Έστω } x(t) &= \cos(4t) + \cos(7t) \\ &= \frac{1}{2} e^{j4t} + \frac{1}{2} e^{-j4t} + \frac{1}{2} e^{j7t} + \frac{1}{2} e^{-j7t} \\ \Rightarrow y(t) &= \frac{1}{2} e^{-j12} e^{j4t} + \frac{1}{2} e^{j12} e^{-j4t} + \frac{1}{2} e^{j21} e^{j7t} + \\ &\quad \frac{1}{2} e^{j21} e^{-j7t} = \cos(4(t-3)) + \cos(7(t-3)) \end{aligned}$$





3.3. Σειρές Fourier (συνεχούς χρόνου) – Εισαγωγή (I)

Περιοδικότητα:

$$x(t) = x(t + T), \quad \forall t$$

↳ δεικνός

$T_0 = T$ fundamental period

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

fundamental frequency

Αρμονικές εκθετικές:

$$e^{j\Omega_0 t}$$

$$f_k(t) = e^{jk\Omega_0 t} = e^{jk\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

(επίσης περιοδικά με περίοδο T)

↳ $T/|k| \quad k \neq 0$

→ γραμμικός συνδυασμός τους επίσης περιοδικό σήμα με περίοδο T

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\Omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}$$





3.3. Σειρές Fourier – Εισαγωγή (II)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$$\Omega_0 = 2\pi$$

$$x(t) = \sum_{k=-3}^{+3} a_k e^{jk2\pi t}$$

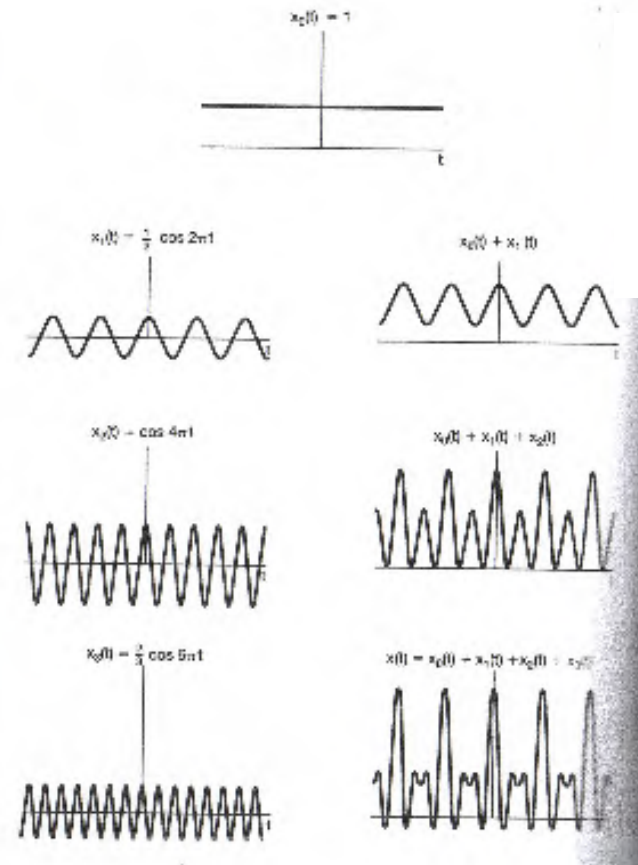
$$a_0 = 1$$

$$a_1 = a_{-1} = 1/4$$

$$a_2 = a_{-2} = 1/2$$

$$a_3 = a_{-3} = 1/3$$

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2} \cos(2\pi t) + \cos(4\pi t) + \frac{2}{3} \cos(6\pi t)$$



Σχ. 3.4 από βιβλίο Oppenheim-Willsky





3.3. Σειρές Fourier – Πραγματικά Σήματα

Για πραγματικά $x(t)$:

$$x^*(t) = x(t) \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k^* e^{-jk\Omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{-k}^* e^{jk\Omega_0 t}$$

↙ $k \rightarrow -k$

Άρα: $a_k^* = a_{-k}$

Συνεπώς:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} [a_k e^{jk\Omega_0 t} + a_k^* e^{-jk\Omega_0 t}]$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2 \operatorname{Re}\{a_k e^{jk\Omega_0 t}\}$$

↪ $A_k e^{j\theta_k}$

$$= a_0 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(k\Omega_0 t + \theta_k)$$

$a_k = B_k + jC_k$

$$\equiv a_0 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} [B_k \cos(k\Omega_0 t) - C_k \sin(k\Omega_0 t)]$$





3.3. Σειρές Fourier – Εξίσωση Ανάλυσης (I)

Έστω: $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\Omega_0 t}$ $a_k = ?$

$\cdot e^{-jn\Omega_0 t}$
 $\Rightarrow x(t)e^{-jn\Omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\Omega_0 t} e^{-jn\Omega_0 t}$

\int_0^T
 $\Rightarrow \int_0^T x(t) e^{-jn\Omega_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \int_0^T e^{j(k-n)\Omega_0 t} dt$
 $\oplus T a_k$

\oplus ΓΙΑΤΙ: $\int_0^T e^{j(k-n)\Omega_0 t} dt = \int_0^T \cos[(k-n)\Omega_0 t] dt +$
 $+ j \int_0^T \sin[(k-n)\Omega_0 t] dt$

Για $k \neq n$ και τα δύο ορίσματα είναι περιοδικά με περίοδο $T/|k-n|$

$\Rightarrow \int_0^T () = 0$

Για $k = n$: $\int_0^T dt = T$





3.3. Σειρές Fourier – Εξίσωση Ανάλυσης (II)

Άρα:

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{\text{T}} x(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt$$

ΕΞΙΣΩΣΗ
ΑΝΑΛΥΣΗΣ

ΕΙΔΙΚΑ για $k=0$:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{\text{T}} x(t) dt$$

← ΜΕΣΟΣ
ΘΡΟΣ
 $x(t)$
ΣΕ ΜΙΑ
ΠΕΡΙΟΔΟ

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\Omega_0 t}$$

ΕΞΙΣΩΣΗ
ΣΥΝΘΕΣΗΣ

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

FUNDAMENTAL PERIOD of $x(t)$





3.3. Σειρές Fourier – Παραδείγματα (I)

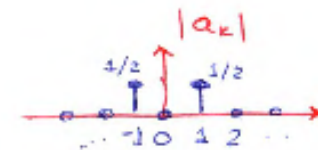
- $x(t) = \sin(\Omega_0 t)$

Με απλή επισκόπηση: $x(t) = \frac{1}{2j} e^{j\Omega_0 t} - \frac{1}{2j} e^{-j\Omega_0 t}$

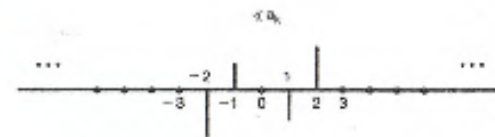
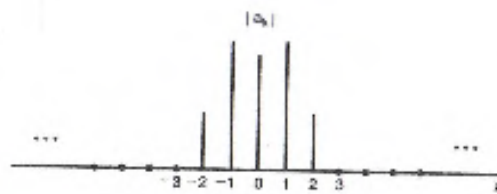
$$a_1 = 1/(2j)$$

$$a_{-1} = -1/(2j)$$

$$a_k = 0 \quad \forall k \neq \pm 1$$



- $x(t) = 1 + \sin(\Omega_0 t) + 2 \cos(\Omega_0 t) + \cos(2\Omega_0 t + \pi/4)$

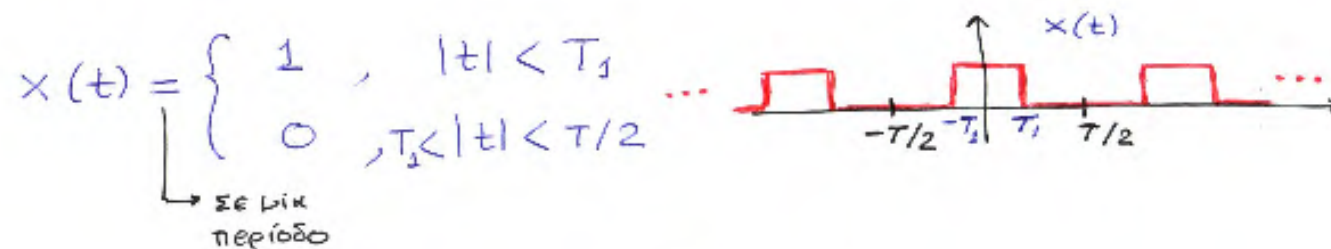


Σχ. 3.5 από βιβλίο Oppenheim-Willsky



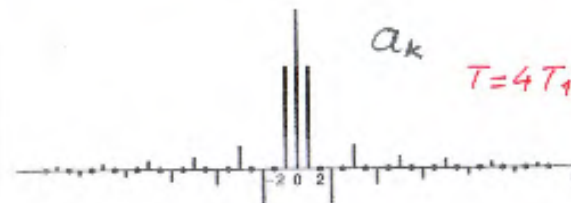


3.3. Σειρές Fourier – Παραδείγματα (II)



$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T_1}^{T_1} dt = \frac{2T_1}{T}$$

$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{1}{T} \int_{-T_1}^{T_1} e^{-jk\Omega_0 t} dt = -\frac{1}{jk\Omega_0 T} e^{-jk\Omega_0 t} \Big|_{-T_1}^{T_1} = \\
 &= \frac{2}{k\Omega_0 T} \left[\frac{e^{jk\Omega_0 T_1} - e^{-jk\Omega_0 T_1}}{2j} \right] = \frac{2 \sin(k\Omega_0 T_1)}{k \underbrace{\Omega_0 T}_{2\pi}} = \\
 &= \frac{\sin(k\Omega_0 T_1)}{k\pi}
 \end{aligned}$$



Σχ. 3.7(a) από βιβλίο Oppenheim-Willsky





3.4. Σύγκλιση Σειρών Fourier (I)

$$e_N(t) = x(t) - \sum_{k=-N}^N a_k e^{jk\Omega_0 t}$$

$$E_N = \int_{\textcircled{T}} |e_N(t)|^2 dt$$

APPROXIMATION
ERROR

→ Τα a_k της εξίσωσης ανάλυσης
ελαχιστοποιούν το E_N !

Αν η σειρά FOURIER Υπάρχει, τότε:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E_N = 0$$

Μια συνθήκη για να ισχύει κάτι τέτοιο:

$$\int_{\textcircled{T}} |x(t)|^2 dt < \infty \Rightarrow \begin{matrix} \text{ΥΠΑΡΧΕΙ} \\ \text{ΣΕΙΡΑ} \\ \text{FOURIER} \end{matrix}$$





3.4. Σύγκλιση Σειρών Fourier (II)

Εναλλακτικό ΣΕΤ ΣΥΝΘΗΚΩΝ ΥΠΑΡΞΗΣ ΣΕΙΡΑΣ FOURIER (ΣΥΝΘΗΚΕΣ DIRICHLET):

- ABSOLUTE INTEGRABILITY: $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty$

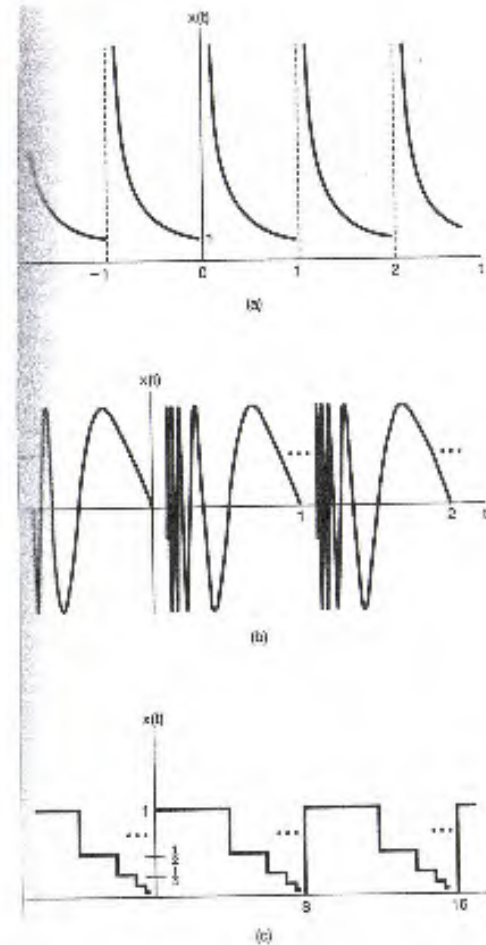
Δεν το τηρεί το: $x(t) = 1/t, 0 < t \leq 1$

- BOUNDED VARIATION: $\left\{ \begin{array}{l} \# \text{ MIN, MAX} \\ \text{ΣΕ ΜΙΑ ΠΕΡΙΟΔΟ} \end{array} \right\}$ είναι πεπερασμένος

Δεν το τηρεί το: $x(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{t}\right), 0 < t \leq 1$

- FINITE NUMBER OF DISCONTINUITIES: (of finite size) (over finite interval)

Δεν το τηρεί το:



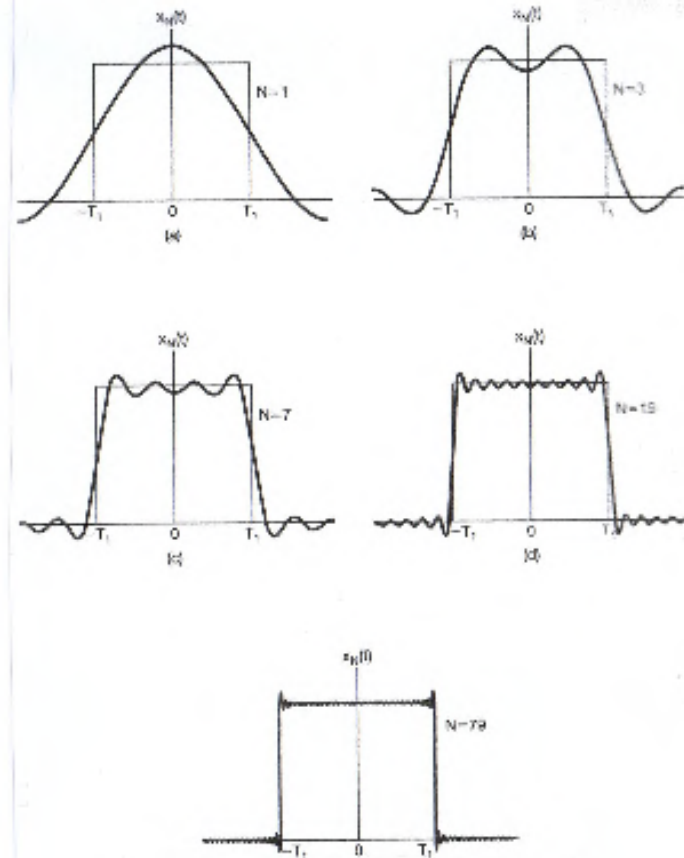
Σχ. 3.8 από βιβλίο Oppenheim-Willsky





3.4. Σύγκλιση Σειρών Fourier (III)

- Σύγκλιση δεν σημαίνει $e_N(t) \rightarrow 0, \forall t$
- Φαινόμενο GIBBS



Σχ. 3.9 από βιβλίο Oppenheim-Willsky





3.5. Ιδιότητες Σειρών Fourier (I)

- Γραμμικότητα: $x(t), y(t)$ περιοδικά σήματα με περίοδο T

$$\begin{matrix} x(t) & \xleftrightarrow{FS} & a_k \\ y(t) & \xleftrightarrow{FS} & b_k \end{matrix} \Rightarrow Ax(t) + By(t) \xleftrightarrow{FS} \boxed{c_k = a_k A + b_k B}$$

- Χρονική ολίσθηση: $x(t)$ περιοδικό με T περίοδο

$$x(t) \xleftrightarrow{FS} a_k \Rightarrow x(t-t_0) \xleftrightarrow{FS} \boxed{e^{-jk \frac{2\pi}{T} t_0} a_k}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

- $y(t) = x(t-t_0)$ επίσης περιοδικό με περίοδο T

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{T} \int_{\textcircled{T}} x(t-t_0) e^{-jk\Omega_0 t} dt \stackrel{z=t-t_0}{=} \frac{1}{T} \int_{\textcircled{T}} x(\tau) e^{-jk\Omega_0(\tau+t_0)} d\tau \\ &= e^{-jk\Omega_0 t_0} \frac{1}{T} \int_{\textcircled{T}} x(\tau) e^{-jk\Omega_0 \tau} d\tau = a_k e^{-jk \frac{2\pi}{T} t_0} \end{aligned}$$





3.5. Ιδιότητες Σειρών Fourier (III)

- Πολλαπλασιασμός: $x(t), y(t)$ περιοδικά με περίοδο T

$$\begin{array}{l}
 x(t) \xleftrightarrow{\text{FS}} a_k \\
 y(t) \xleftrightarrow{\text{FS}} b_k
 \end{array}
 \Rightarrow
 x(t)y(t) \xleftrightarrow{\text{FS}}
 \boxed{c_k = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l b_{k-l}}$$

$a_k * b_k$
ΣΥΝΕΛΙΞΗ

- Συζυγία / Συμμετρία: $x(t)$ περιοδικό με περίοδο T

$$x(t) \xleftrightarrow{\text{FS}} a_k \Rightarrow x^*(t) \xleftrightarrow{\text{FS}} a_{-k}^*$$

$$\oplus x(t) \in \mathbb{R}, \forall t \Rightarrow a_{-k} = a_k^* \Rightarrow
 \begin{array}{l}
 a_0 \in \mathbb{R} \\
 |a_k| = |a_{-k}| \\
 \angle a_k = -\angle a_{-k} \\
 \dots\dots
 \end{array}$$

- Parseval: $x(t)$ περιοδικό με περίοδο T

$$\boxed{\frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2}$$





3.5. Ιδιότητες Σειρών Fourier (IV)

- ΠΕΡΙΟΔΙΚΗ ΣΥΝΕΛΙΞΗ: $x(t), y(t)$ περιοδικά με περίοδο \mathcal{T}

$$\begin{array}{l} x(t) \xleftrightarrow{FS} a_k \\ y(t) \xleftrightarrow{FS} b_k \end{array} \Rightarrow \int_{\mathcal{T}} x(\tau) y(t-\tau) d\tau \xleftrightarrow{FS} \mathcal{T} a_k b_k$$

- ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ: $x(t)$ περιοδικά με περίοδο \mathcal{T}

$$x(t) \xleftrightarrow{FS} a_k \Rightarrow \frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{FS} \boxed{j k \omega_0 a_k} = j k \frac{2\pi}{\mathcal{T}} a_k$$





3.5. Ιδιότητες Σειρών Fourier (V) -- Παραδείγματα

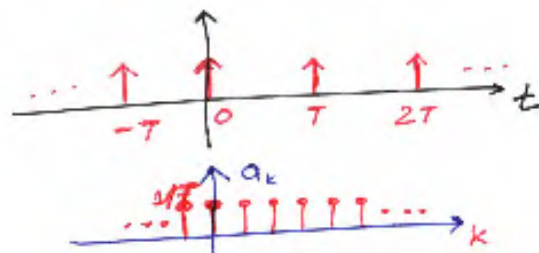
Περιοδικό με περίοδο $T=4$

Μπορούμε να γράψουμε $g(t) = x(t-1) - 1/2$

FS $\begin{cases} 0, & k \neq 0 \\ -1/2, & k = 0 \end{cases}$

FS $\begin{cases} \frac{\sin(\pi k/2)}{k\pi} e^{-jk\pi/2}, & k \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & k = 0 \end{cases}$

$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$



$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt = \frac{1}{T}$





3.6. Διακριτή Σειρά Fourier (Discrete Fourier Series) (I)

- Προκύπτει πεπερασμένη σειρά.
- Δεν υπάρχουν όρια σύγκλισης.
- Περιοδικά σήματα διακριτού χρόνου:

$$x[n] = x[n+N], \quad \forall n$$

↳ fundamental period
(smallest positive N)

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

fundamental period

- Μιγαδικά εκθετικά με περίοδο N:

$$\phi_k[n] = e^{jk\omega_0 n} = e^{jk \frac{2\pi}{N} n}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

- Μόνο \mathcal{N} είναι διακριτά:

$$\phi_k[n] = \phi_{k+rN}[n]$$





3.6. Διακριτή Σειρά Fourier (II)

- DISCRETE FOURIER SERIES PAIR:

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\omega_0 n}$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\omega_0 n}$$

$\rightarrow 0, 1, \dots, N-1$
 ή κάποια άλλη περίοδος ...

ΣΥΝΘΕΣΗ
 $\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$
 ΑΝΑΛΥΣΗ

- DISCRETE FOURIER TRANSFORM:

Ακριβώς όπως οι παραπάνω τύποι, για ένα πεπερασμένης διάρκειας σήμα.

$$L \leq N$$





3.6. Διακριτή Σειρά Fourier (III) – Παράδειγμα

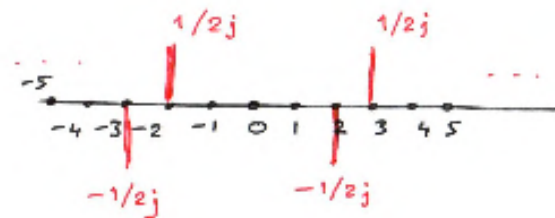
• $x[n] = \sin \frac{6\pi n}{5}$

Περιοδικό με περίοδο $N = \left(\frac{2\pi}{6\pi} \cdot 5\right) M = 5$

$$x[n] = \frac{1}{2j} e^{j 3 \frac{2\pi}{5} n} - \frac{1}{2j} e^{-j 3 \frac{2\pi}{5} n}$$

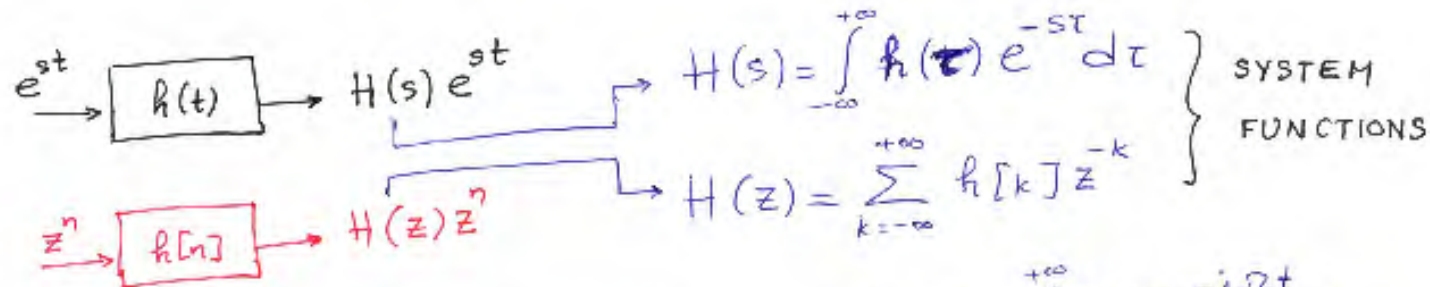
$$a_3 = \frac{1}{2j}$$

$$a_{-3} = a_2 = -\frac{1}{2j}$$





3.7. Σειρές Fourier και Γ.Χ.Α. Συστήματα (I)



ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ :

$s = j\Omega$

$z = e^{j\omega}$

$H(j\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j\Omega t} dt$
 $H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[n] e^{-j\omega n}$

ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

ΛΟΓΩ Γ.Χ.Α. ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ :

$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\Omega_0 t} \Rightarrow y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k H(jk\Omega_0) e^{jk\Omega_0 t}$

(Red arrow from a_k to a_k in $y(t)$) → ΙΔΙΑ ΠΕΡΙΟΔΟΣ!
 (Blue arrow from $H(jk\Omega_0)$ to $H(jk\Omega_0)$ in $y(t)$) → ΑΛΛΑΖΟΥΝ

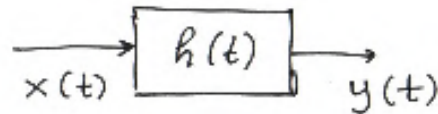
$x[n] = \sum_{k < N} a_k e^{jk \frac{2\pi}{N} n} \Rightarrow y[n] = \sum_{k < N} a_k H(e^{j \frac{2\pi k}{N}}) e^{jk \frac{2\pi}{N} n}$

(Red arrow from a_k to a_k in $y[n]$) → ΙΔΙΑ ΠΕΡΙΟΔΟΣ
 (Blue arrow from $H(e^{j \frac{2\pi k}{N}})$ to $H(e^{j \frac{2\pi k}{N}})$ in $y[n]$) → ΑΛΛΑΖΟΥΝ





3.7. Σειρές Fourier και Γ.Χ.Α. Συστήματα (II)



$$x(t) = \sum_{k=-3}^{+3} a_k e^{jk2\pi t} \rightarrow \Omega_0$$

$$h(t) = e^{-t} u(t) \Rightarrow H(j\Omega) = \int_0^{+\infty} e^{-\tau} e^{-j\Omega\tau} d\tau = -\frac{1}{1+j\Omega} e^{-\tau(1+j\Omega)} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{1+j\Omega}$$

Άρα:

$$y(t) = \sum_{k=-3}^{+3} a_k \frac{1}{1+jk2\pi} e^{jk2\pi t}$$

