5ο ΜΑΘΗΜΑ 26/10/2010

Όνομα: Παπαδημητρίου Δημήτρης

Routing Games

$G = (V, E)$

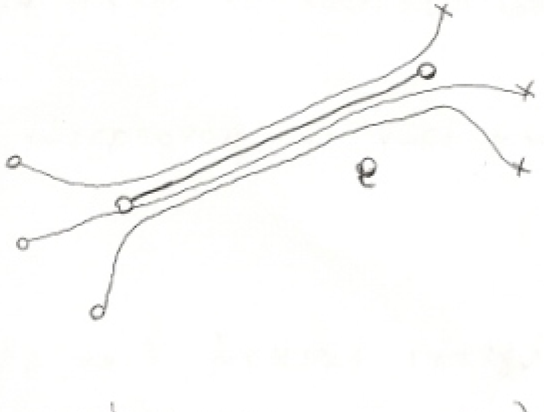
vertex edge

$\forall$ παίκτη i $\exists$ (s_i, t_i) : $s_i \in V$ source vertex

$t_i \in V$ destination vertex

Κάθε παίκτης i έχει συγκεκριμένο r_i (bps) που εκφράζει το ρυθμό με τον οποίο εισάγεται πληροφορία μέσα στο δίκτυο από τον παίκτη i.

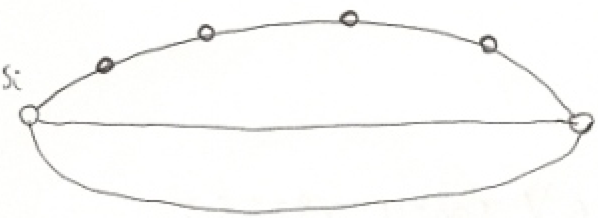
$\forall e \in E$ $\exists$ συνάρτηση $l_e(x)$, latency function, η οποία εκφράζει την καθυστέρηση ανά μονάδα κίνησης πάνω στην ακμή e. (latency per unit traffic).



$l_e(x)$: συνάρτηση του συνολικού φόρτου πάνω στην ακμή.

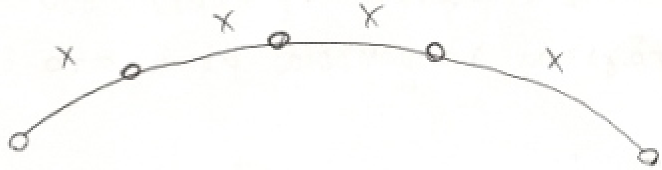
Παραγωγίσιμη και non-decreasing

Κάθε παίκτης i έχει $\mathcal{P}_i$ σύνολο μονοπατιών με τα οποία η κίνησή του μπορεί να πάει από το s_i στο t_i.



Ορίζουμε ως f_p τη ροή πάνω από το μονοπάτι p.

Έστω $f_p = x$ Εκφράζει το μέρος του r_i που διαλέγει το μονοπάτι p για να δρομολογηθεί.



Για κάθε ακμή κατά μήκος του μονοπατιού p έχουμε ροή x.

Ορίζουμε ως f_e τη ροή πάνω σε ακμή e.

$$\forall e \in E \quad f_e = \sum_{p \in \mathcal{P} : e \in p} f_p$$

Η ροή όλων των μονοπατιών που περιέχουν την ακμή e.

Ορίζουμε $\mathcal{P} = \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{P}_i$ Η ένωση όλων των μονοπατιών του συστήματος.

Μια ροή f λέγεται εφικτή όταν εξυπηρετεί το r_i,

δηλαδή $$r_i = \sum_{p \in \mathcal{P}_i} f_p$$

Ορίζουμε $l_p(f) = \sum_{e \in p} l_e(f_e)$ ως την καθυστέρηση κατά μήκος ενός μονοπατιού

$l_e(f_e) \to$ nonnegative, continuous, non decreasing

Social Cost

Για ένα game (G, r, l) ορίζουμε ως social cost:

$$C(f) = \sum_{p \in P} f_p \cdot l_p(f) = \sum_{e \in E} f_e \cdot \underset{\uparrow \text{congestion}}{l_e(f_e)}$$

Άλλο πιθανό κόστος θα μπορούσε να είναι

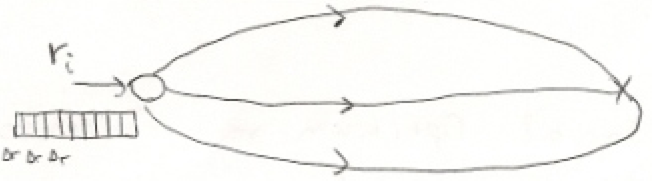
$$C(f) = \max_{p \in P} f_p \, l_p(f)$$

Συνήθως θα θεωρούμε ως social cost το πρώτο.
Ενδιαφερόμαστε δηλαδή να ελαχιστοποιήσουμε τη συνολική μέση καθυστέρηση.

Έχουμε δύο είδη routing games:

Nonatomic

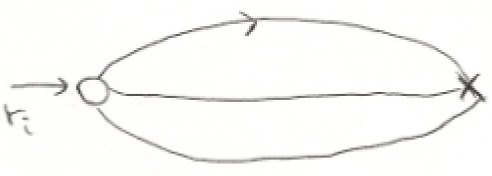
Η ροή που εισάγει στο δίκτυο ένας παίκτης i, r_i, σπάει κατά μήκος των μονοπατιών.



(multipath routing)

Θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ότι το r_i αποτελείται από πολλούς απειροστούς παίκτες που καθένας ελέγχει ένα απειροστό μέρος της κίνησης και διαλέγει ένα μονοπάτι.

Atomic



Πρέπει $f_p = r_i$ για ένα μόνο μονοπάτι p.

Όλη η ροή θα διέλθει από ένα μόνο μονοπάτι

Στα atomic routing games το P_oA είναι εν γένει χειρότερο σε σχέση με τα nonatomic.

Ορίζουμε $c_e(x) = x \cdot l_e(x)$

Οπότε:

$$C(f) = \sum_{p \in P} f_p \, l_p(f) = \sum_{e \in E} \overbrace{f_e \cdot l_e(f_e)}^{c_e(f_e)} = \sum_{e \in E} c_e(f_e)$$

Nonatomic (splittable) routing

Nash Equilibrium

Μια εφικτή ροή f είναι Nash Equilibrium αν για κάθε παίκτη $i \in \{1, \ldots, N\}$ και κάθε ζευγάρι μονοπατιών $P, P' \in P_i$,

αν $f_P > 0 \implies l_P(f) \leq l_{P'}(f)$

Συμπέρασμα

Έστω στο N.E. έχουμε τρία μονοπάτια P_1, P_2, P_3.

Τότε $l_{P_1}(f) = l_{P_2}(f) = l_{P_3}(f)$.

Στο N.E. όλα τα μονοπάτια που χρησιμοποιούνται, δηλαδή που έχουνε $f_P > 0$ έχουνε και το ίδιο latency.

Social Optimum

Θέλουμε για να πετύχουμε το Social Optimum να ελαχιστοποιήσουμε τη συνολική μέση καθυστέρηση

$$\text{minimize} \sum_{e \in E} f_e \, l_e(f_e) \iff \text{minimize} \sum_{e \in E} c_e(f_e)$$

$$f_e = \sum_{P \in P_i : e \in P} f_P \qquad r_i = \sum_{P \in P_i} f_P$$

Θεώρημα

Μία ροή f είναι κοινωνικά βέλτιστη (optimal), δηλαδή επιλύει βέλτιστα το minimize $\sum_{e\in E} C_e(f_e)$

όταν $\forall$ παίκτη i και $\forall$ ζευγάρι μονοπατιών $P, P' \in \mathcal{P}_i$,

αν $f_P > 0 \Rightarrow C'_P(f) \leq C'_{P'}(f)$

Συμπέρασμα

Στην κοινωνικά βέλτιστη ροή f οι παράγωγοι του κόστους των μονοπατιών που χρησιμοποιούνται είναι ίσοι.

Απόδειξη

Έστω $\exists P' : C'_P(f) > C'_{P'}(f)$ για την κοινωνικά βέλτιστη ροή f.

Τότε μπορούμε να μεταφέρουμε ροή από P σε P'.

Έστω ότι μεταφέρουμε ροή $\varepsilon > 0$ από το P στο P'.

$$C(f_{P'}+\varepsilon, f_P-\varepsilon) - C(f_{P'}, f_P) \overset{*}{=}$$

$$= \underbrace{\varepsilon}_{>0} \cdot \big(\underbrace{C'_{P'}(f) - C'_P(f)}_{\substack{<0 \\ \text{από υπόθεση}}} \big) < 0$$

Άτοπο, γιατί υποθέτοντας ότι υπάρχει P' με μικρότερο κόστος, μεταφέρουμε ροή από το P στο P' και καταλήγουμε σε μικρότερο συνολικό κόστος απ'ότι είχαμε με την f που από την υπόθεση είναι η βέλτιστη ροή.

(*) Η ισότητα προκύπτει από τον τύπο

$$f(x+\Delta x) \simeq f(x) + \nabla^T(f(x)) \cdot \Delta x$$

Λήμμα

$\forall$ ακμή e έχουμε τη συνάρτηση $l_e(x)$.

Ορίζουμε την $\tilde{l}_e(x) = C_e'(x) = (x\, l_e(x))' = l_e(x) + x \cdot l_e'(x)$

Αν η f είναι optimal flow για το game $(G, r, l) \Leftrightarrow$

η f είναι Nash Equilibrium flow για το game $(G, r, \tilde{l})$

① Υπάρχει τουλάχιστον ένα Nash Equilibrium.

Χρησιμοποιούμε την potential method για να επιλύουμε προβλήματα existence και best response.

Βρίσκουμε συνάρτηση $\Phi()$ της οποίας το(α) ελάχιστο(α) είναι Nash equilibrium.

Ορίζουμε $\forall e \in E$
$$h_e'(x) = l_e(x)$$
$$h(x) = \int_0^x l_e(z)\,dz$$

σωρευτικό κόστος από 0 έως x της συνάρτησης καθυστέρησης.

Έστω $\Phi(f) = \sum_e h_e(f_e)$

Οι $h_e'(x)$ είναι αύξουσες θετικές και παραγωγίσιμες και οι $h_e(x)$ είναι αύξουσες, θετικές και παραγωγίσιμες συναρτήσεις $\Rightarrow \Phi(x)$ convex.

Άρα αφού η $\Phi()$ είναι convex έχει τουλάχιστον ένα ελάχιστο και αυτό(α) είναι Nash Equilibrium.

② Αν υπάρχουν f, f' Nash equilibria $\Rightarrow \forall e \; l_e(f) = l_e(f')$

Απόδειξη

Έστω f, f' Nash Equilibria

και έστω $g = \lambda \cdot f + (1-\lambda)\cdot f'$, $\lambda \in [0,1]$

Η συνάρτηση $\Phi()$ έχουμε πει ότι είναι convex

Άρα εξ ορισμού $\Phi(g) \leq \lambda \Phi(f) + (1-\lambda)\cdot \Phi(f')$

Οι ροές f και f' αφού είναι Nash Equilibria ελαχιστοποιούν τη $\Phi()$.

Άρα $\Phi(f) = \Phi(f')$

$$\left.\begin{array}{l} \Phi(f) \leq \Phi(g) \Rightarrow \lambda \Phi(f) \leq \lambda \Phi(g) \\ \Phi(f') \leq \Phi(g) \Rightarrow (1-\lambda)\cdot \Phi(f') \leq (1-\lambda)\cdot \Phi(g) \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{Αθροίζουμε κατά μέλη}}$$

$\Phi(g) \geq \lambda \cdot \Phi(f) + (1-\lambda)\cdot \Phi(f')$

Άρα $\Phi(g) = \lambda \cdot \Phi(f) + (1-\lambda)\cdot \Phi(f') \xRightarrow{\Phi_e(f) = \Phi_e(f')} \Phi(g) = \Phi(f) = \Phi(f') \Rightarrow$

$\xRightarrow{*} l_e(g) = l_e(f) = l_e(f')$

(*) $h_e(x) = \int_0^x l_e(z)dz$, $\Phi(f) = \sum_e h_e(f_e)$

Στο Nash Equilibrium δύο ροές f και f' έχουν το ίδιο load.

PoA

$$P_oA = \frac{\text{Συνολικό κόστος (N.E)}}{\text{Συνολικό κόστος (S.opt.)}} \geq 1$$

Θεώρημα

If $\exists\ a > 1$ such that $a \cdot h_e(x) \overset{(H)}{\geq} C_e(x) \Rightarrow P_oA \leq a$

Απόδειξη

$$h_e(x) = \int_0^x l_e(y)\,dy \leq x \cdot l_e(x) = C_e(x)$$

Άρα $h_e(x) \leq C_e(x)$ (1)

Έστω ροή f Nash Equilibrium

Στο Nash Equilibrium έχουμε κόστος:

$$C(f_{N.E.}) = \sum_{e \in E} C_e(f_e) \overset{(H)}{\leq} a \cdot \overbrace{\sum_{e \in E} h_e(f_e)}^{\Phi(f)} \leq a \cdot \sum_{e \in E} h_e(f_e^*) \leq$$

↓ βέλτιστη ροή

$$\overset{(1)}{\leq} a \cdot \sum_{e \in E} C_e(f_e^*) = a \cdot C(f^*)$$

Άρα $P_oA = \dfrac{C(f_{N.E.})}{C(f^*)} \leq a$

Λήμμα

Αν $l_e()$ polynomial βαθμού d, δηλαδή

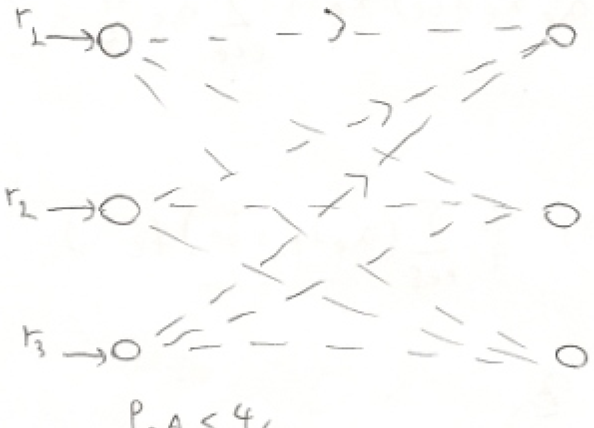
$$l_e(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_d \cdot x^d$$

Τότε $PoA \leq d+1$

Αν $d=1$ $PoA \leq 2$ γραμμική $l_e(x)$

~

Έστω ότι έχουμε το παρακάτω σύστημα client, server.



$PoA \leq 4/3$

Έστω ότι η συνάρτηση που εκφράζει την καθυστέρηση που εισάγει ο server στην εξυπηρέτηση κάθε αίτησης είναι

$$l_e(x) = a_e x + b_e$$

Στην προκειμένη περίπτωση ο server εξυπηρετεί τις αιτήσεις round-robin.

Εν δίνει να δειχτεί ότι αν η $l_e(x) = a_e x + b_e$ τότε το $PoA \leq 4/3$.

① Πρώτα δείχνουμε ότι $x \cdot y \leq x^2 + y^2/4$ $\forall x, y \geq 0$

$$x \cdot y \leq x^2 + y^2/4 \iff 4xy \leq 4x^2 + y^2 \iff (2x-y)^2 \geq 0 \text{ που ισχύει.}$$

Έστω f η Nash Equilibrium flow και f^* η social optimal flow.

② Στο λήμμα 18.20 του κεφαλαίου 18 Roughgarden Routing Games, από το βιβλίο Algorithmic Game Theory αποδεικνύεται ότι:

αν η ροή f είναι Nash Equilibrium $\iff \sum_{e \in E} f_e \cdot l_e(f_e) \leq \sum_{e \in E} x_e \cdot l_e(f_e)$ $\forall$ εφικτή ροή x

⑨

Απόδειξη

$$C_f(x) = \sum_{e\in E} (a_e f_e + b_e)\cdot x_e$$

Από το ② συνεπάγεται ότι $C_f(x) \geq C_f(f)$

$\forall$ feasible flow x $\quad C_f(x) = \sum_{e\in E}(a_e \cdot f_e + b_e)\cdot x_e =$

$$= \sum_{e\in E}(a_e f_e x_e + b_e x_e) \overset{①}{\leq} \sum_{e\in E}\left(a_e \cdot \left(x_e^2 + \frac{f_e^2}{4}\right) + b_e x_e\right) =$$

$$= \sum_{e\in E}\left(a_e x_e^2 + a_e \cdot \frac{f_e^2}{4} + b_e x_e\right) = \sum_{e\in E}(a_e x_e + b_e)\cdot x_e + \sum_{e\in E} a_e \frac{f_e^2}{4} =$$

$$= C_x(x) + \frac{1}{4}\cdot\sum_{e\in E} a_e f_e \cdot f_e \leq C_x(x) + \frac{1}{4}\sum_{e\in E}(a_e f_e + b_e)\cdot f_e \Rightarrow$$

$$C_f(x) \leq C_x(x) + \frac{1}{4} C_f(f) \overset{②}{\Rightarrow}$$

$$C_f(f) \leq C_x(x) + \frac{1}{4} C_f(f) \Rightarrow$$

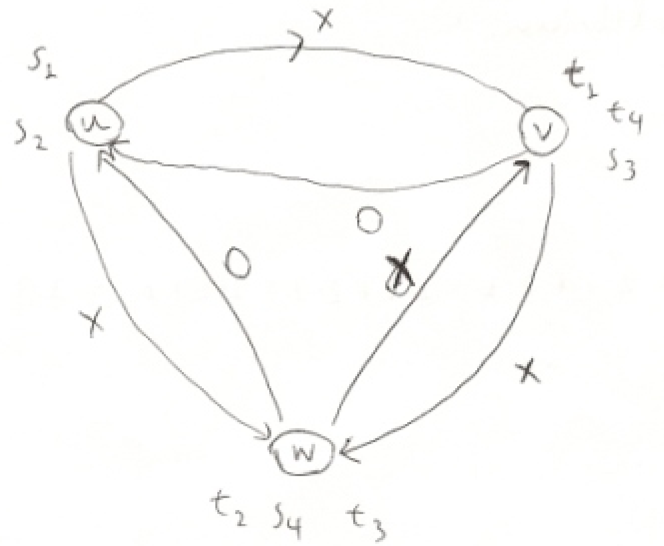
$$\frac{3}{4} C_f(f) \leq C_x(x) \overset{x=f^*}{\Rightarrow}$$

$$\frac{3}{4} C_f(f) \leq C_{f^*}(f^*) \Rightarrow$$

$$\frac{C_{N.E.}}{C_{S.Opt.}} \leq 4/3$$

Atomic (unsplittable routing)

- Δεν υπάρχει εγγύηση ύπαρξης Nash Equilibrium
- Διαφορετικές ροές Nash Equilibrium έχουν διαφορετικά κόστη
- PoA ↑↑ αυξάνεται σε σχέση με το Nonatomic routing



$\forall i \ \exists \ s_i \to t_i$

και $\forall i \ \exists \ r_i = 1.$

① $u \to v$ ② $u \to w$ ③ $v \to w$ ④ $w \to v$

Υπάρχουν δύο στρατηγικές: η κίνηση θα πάει είτε με ένα είτε με δύο hops.

Οπότε για κάθε παίκτη έχουμε:

$$1: \begin{cases} u \to v \\ u \to w \to v \end{cases} \qquad 2: \begin{cases} u \to w \\ u \to v \to w \end{cases}$$

$$3: \begin{cases} v \to w \\ v \to u \to w \end{cases} \qquad 4: \begin{cases} w \to v \\ w \to u \to v \end{cases}$$

Optimal solution

$u \to v$
$u \to w$ $\qquad$ 1 hop
$v \to w$
$w \to v$ $\qquad$ Total optimum cost $= 1\cdot1 + 1\cdot1 + 1\cdot1 + 1\cdot1 = 4$

Η λύση αυτή είναι και Nash Equilibrium.

Υπάρχει και άλλο Nash Equilibrium.

$u \to w \to v$
$u \to v \to w$ $\qquad$ 2 hops.
$v \to u \to w$
$w \to u \to v$ $\qquad$ Total cost $= 2\cdot1 + 2\cdot1 + 2\cdot1 + 2\cdot1 + 1\cdot1 + 1\cdot1 = 10$

$$PoA = \max_{x : x \text{ N.E.}} \frac{C(x)}{C(x^*)}$$

Για γραμμικές συναρτήσεις κόστους, $l_e(f_e) = a_e f_e + b_e$ αποδεικνύεται πως $PoA \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2} \simeq 2{,}618$

Έστω f ροή Nash Equilibrium και f^* optimal flow

Έστω ότι ο παίκτης i χρησιμοποιεί το μονοπάτι P_i στην f και P_i^* στην f^*

Τότε

Λήμμα 1

$$\sum_{e \in P_i} [a_e f_e + b_e] \leq \sum_{e \in P_i^*} [a_e (f_e + r_i) + b_e]$$

Λήμμα 2

$$C(f) \leq C(f^*) + \sum_{e \in E} a_e f_e f_e^*$$