3ο Μάθημα

Όνομα: Παπαποστόλου Αλέξανδρος

12/10/2010

Μεικτές Στρατηγικές:

S_i: Σύνολο των διαθέσιμων στρατηγικών του παίκτη i

$(s_1^*, \dots, s_n^*)$: Nash Equilibrium, αν για ∀ παίκτη i,
s_i^* είναι το best response του παίκτη i για όλες τις στρατηγικές των άλλων $n-1$ παικτών:

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*) \quad (NE)$$

για κάθε στρατηγική s_i στο S_i.

- Στην ουσία, η στρατηγική του ∀ παίκτη είναι διάνυσμα μάζας πιθανότητας πάνω στο χώρο των στρατηγικών:

$$v_i(\underline{p}_i^*, \underline{p}_{-i}^*) \geq v_i(\underline{p}_i, \underline{p}_{-i}^*), \text{ για } \forall i$$

$$\underline{p}_i = (p_{i1}, \dots, p_{iN})$$

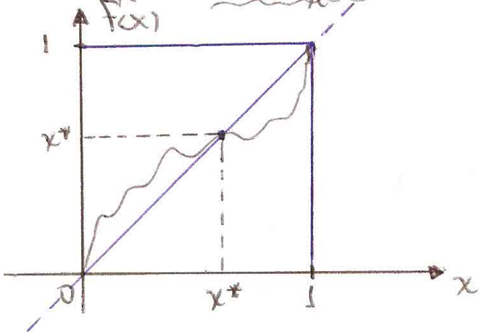
Θεώρημα (Nash 1950):
Έστω G παίγνιο με n παίκτες (n: πεπερασμένο) και S_i πεπερασμένα για $\forall i$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα Nash Equilibrium, πιθανώς ~~με~~ εμπεριέχοντας μεικτές στρατηγικές. (Γενίκευση της Pure)

Ιδέα Απόδειξης:

Η απόδειξη του Θεωρήματος Nash χρησιμοποιεί το Θεώρημα Fixed Point

Fixed Point Theorem (Brouwer)

Έστω $f(x) \in \mathbb{R}$, συνεχής με Πεδίο Ορισμού $[0,1] \to [0,1]$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα x^* τέτοιο ώστε $f(x^*) = x^*$ $(x^* \in [0,1])$



p_i: επιλογή στρατηγικής του παίκτη i

p_{-i}: οι επιλογές στρατηγικών των άλλων παικτών

(συνέχεια ιδέας απόδειξης)

Για ∀ παίκτη i βρίσκουμε τη best response στρατηγική του i, p_i έναντι των στρατηγικών των άλλων παικτών p_{-i} ώστε για κάθε $p_i \neq p_i^*$ να έχουμε: $u_i(p_i^*, p_{-i}) > u(p_i, p_{-i})$

$$p_i^* = BR_i(p_{-i})$$

Έστω $\Delta(S_i)$: η μεικτή επέκταση των στρατηγικών του παίκτη i.

Σχεδιάζουμε μετασχηματισμό από $\Delta(S_1)\times\Delta(S_2)\times\dots\times\Delta(S_n)$ στον εαυτό του, πού είναι ο μετασχηματισμός best response: $(p_1^*,\dots,p_n^*) \to BR(p_1^*),\dots,BR(p_n^*)$

Το fixed point αυτού του μετασχηματισμού είναι το Nash Equilibrium.

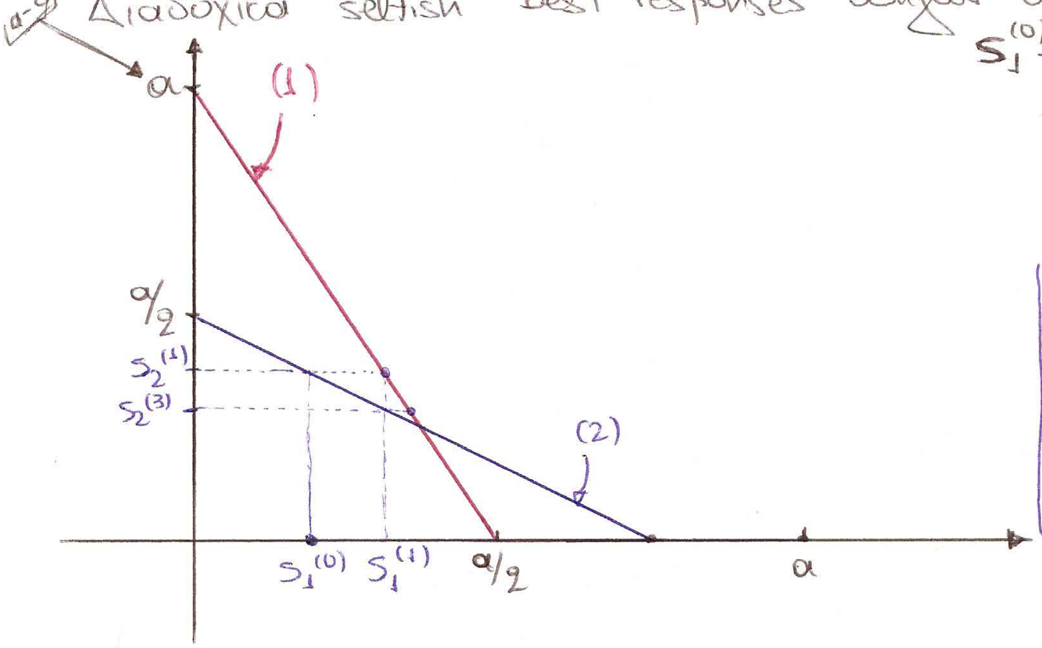
$$p_i^* = BR(p_{-i}^*) \Leftrightarrow N.E.$$

[Υπάρχει περίπτωση ΔΙΔ, να υπάρχει σημείο $(p_1^*,\dots,p_N^*) \to (p_1^*,\dots,p_N^*)$ που να απεικονίζεται στον εαυτό του]

Μπορεί να υπάρχουν παραπάνω από ένα best responses.

Διαδοχικά selfish best responses οδηγούν στο Equilibrium.

$$s_1^{(0)} \to s_2^{(1)} \to s_1^{(2)} \to s_2^{(3)}$$



$$s_1 = \frac{a-c-s_2}{2} \quad (1)$$

$$s_2 = \frac{a-c-s_1}{2} \quad (2)$$

Αποτέλεσμα Βελτιστοποίησης

$s_1 = \arg\max_{\Delta s_1} u_1(s_1, s_2)$

$s_2 = \arg\max_{\Delta s_2} u_2(s_1, s_2)$

Από (1) κ' (2) $(s_1^*, s_2^*) = \frac{a-c}{3}$

(Τέλος εισαγωγής στη Θεωρία Παιγνίων)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

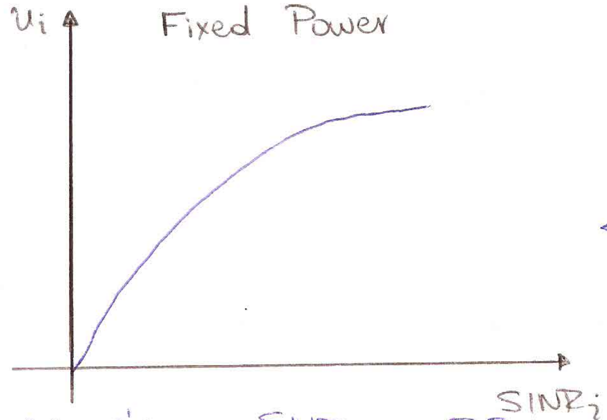
~~Μοντελοποίηση~~ ~~Utilization~~

Power Control Game ~~Παράδειγμα~~: ("Efficient Power Control via Pricing in Wireless Data Networks" 2002 - Saraydar, Narayan, Mandayam)

Utility: QoS (quality of service) ασύρματου κόμβου

Distributed Power Control: Power Control Game ⟶ Social Optimum (οι χρήστες μεγιστοποιούν το συνολικό utility)

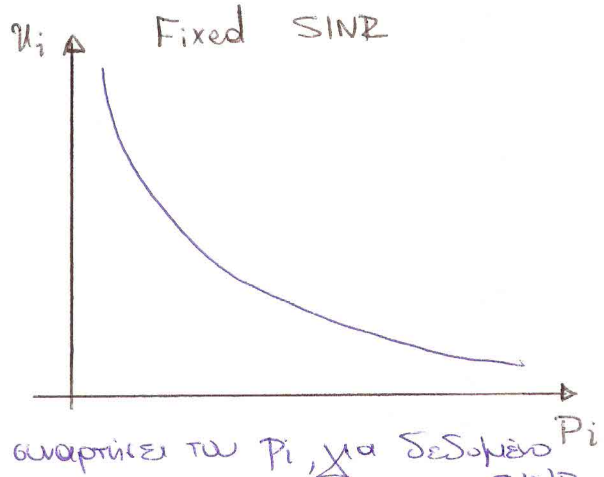
* Το $u_i \uparrow$ αυξάνεται σ' ένα παίκτη όταν $SINR_i \uparrow$ αυξάνεται
* Το $u_i \uparrow$ αυξάνεται, όταν η ισχύς που μεταδίδει $P_i \downarrow$ είναι χαμηλή.



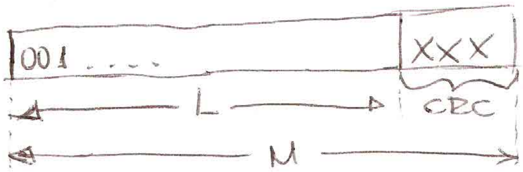
$$u_i = f(SNR_i, p_i)$$

$$u_i = \log(1+SNR_i)$$

u_i συναρτήσει του $SINR_i$, για δεδομένο P_i



u_i συναρτήσει του P_i, για δεδομένο $SINR_i$

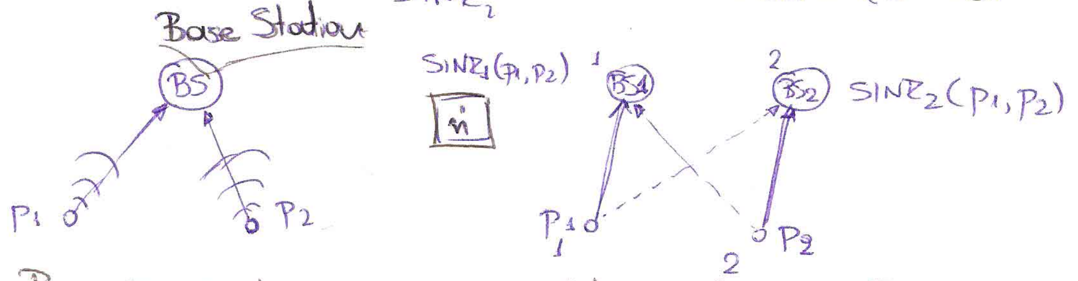


$$u_i = \frac{L}{M} \times \frac{1}{P_i} \times P_{correction}$$

$P_{cor.}$: Πιθανότητα της ομάδας των M bits να φθάσουν σωστά.

P_e: Πιθανότητα 1 bit να φθάσει λάθος (BER)

$$P_{cor} = (1-P_e)^M$$



BER ή P_e ως συνάρτηση του γ (ή SNR) για διάφορες διαμορφώσεις.

$P_e = Q(\sqrt{2\gamma})$, (BPSK)

$P_e = \frac{1}{2}e^{-\gamma}$, (DPSK)

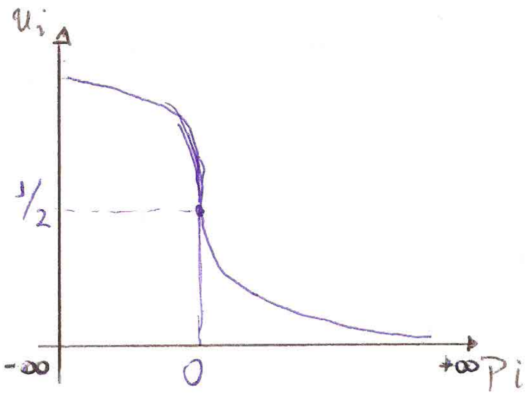
$P_e = Q(\sqrt{\gamma})$, (Coherent FSK)

$Q(0) = \frac{1}{2}$

Αν $\gamma = 0 \xrightarrow{\text{παράδοξο}} P_e = \frac{1}{2}$

Δηλαδή, αν δεν μεταδίδαμε καθόλου έχουμε πιθανότητα να πάρουμε σωστό bit 50%. ?

Συνάρτηση $Q(Q(x) = Pr(X > x)$ Normal(0,1)



Αν επιλέξουμε utility function:

$$u_i = \frac{1}{P_i}(1-P_e)^M$$

τότε: για $P_i = 0 \longrightarrow u_i(P_i=0) = +\infty$ Παράδοξο

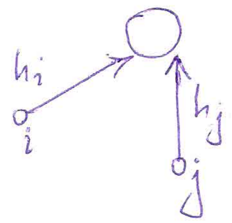
Ενώ δεν μεταδίδουμε έχουμε άπειρο u_i.

Γι' αυτό αλλάζουμε το u_i: $u_i = \frac{1}{P_i}(1-2P_e)^M$, όπου (*)

(*) $(1-2P_e)^M$ είναι μια αποδοτικότερη συνάρτηση που αντικαθιστά το P_{cor}.

$$f(\gamma_i) = (1-2P_e(\gamma_i))^M.$$

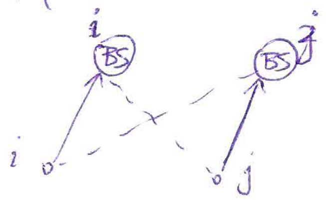
- Περίπτωση που μεταδίδουν 2 σε 1



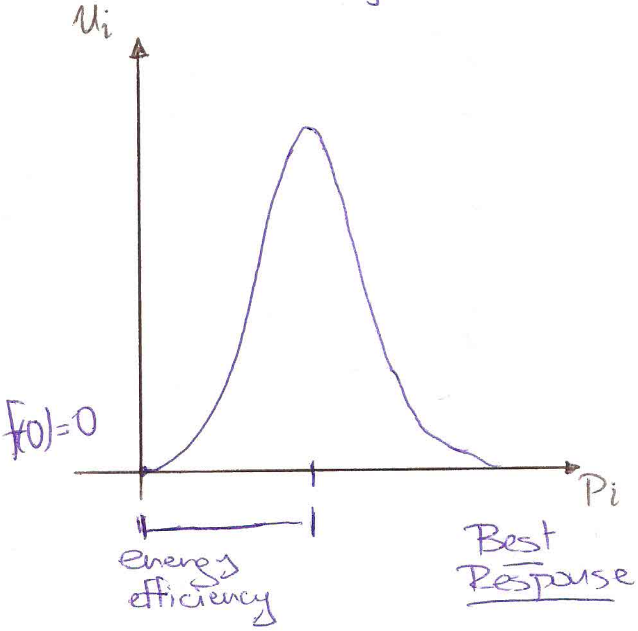
$$u_i(P_i, P_{-i}) = \frac{L}{M}\frac{1}{P_i} f(\gamma_i)$$

$$= \frac{L}{M}\frac{1}{P_i} f\left(\frac{h_i P_i}{\sum_{j\neq i} h_j P_j + \sigma^2}\right)$$

- Περίπτωση που μεταδίδουν 2 σε διαφορετικά BS.



$$u(P_i, P_{-i}) = \frac{L}{M}\frac{1}{P_i} f\left(\frac{h_{ii} P_i}{\sum_{j\neq i} h_{ji} P_j + \sigma^2}\right)$$



Η λύση είναι Nash Equilibrium

$$\underline{P}^* = (P_1^*, \dots, P_N^*)$$

αν για ∀ παίκτη i, ισχύει

$$u_i(\underline{P}_i^*, \underline{P}_{-i}^*) \geq u_i(\underline{P}_i, \underline{P}_{-i}^*)$$

για κάθε $P_i \neq P_i^*$.

Best Response: $Br(\underline{P}_{-i}) = \{P_i : u(P_i, P_{-i}) \geq u_i(P_i', P_{-i}), \forall P_i' \neq P_i\}$

Ισχύς Μετάδοσης: $P_i \in [0, P_{i,max}]$

Παράδειγμα: Έστω 2 χρήστες

1ος παίκτης: $u_1(P_1,P_2) = \frac{1}{P_1}\left[1-2f\left(\frac{h_1P_1}{h_2P_2+\sigma^2}\right)\right]^M$

2ος παίκτης: $u_2(P_1,P_2) = \frac{1}{P_2}\left[1-2f\left(\frac{h_2P_2}{h_1P_1+\sigma^2}\right)\right]^M$

Λύνω το πρόβλημα $\max\limits_{0\le P_1\le P_{1,max}} u_1(P_1,P_2)$ (πρόβλημα μεγιστοποίησης του u_1 ως προς P_1)

$$\frac{\partial u(P_1,P_2)}{\partial P_1}=0 \iff -\frac{1}{P_1^2}\left[1-2f\left(\frac{h_1P_1}{h_2P_2+\sigma^2}\right)\right]^M + \left\{\frac{1}{P_1}M\left[1-2f\left(\frac{h_1P_1}{h_2P_2+\sigma^2}\right)\right]^{M-1} \times \left[-2f'\left(\frac{h_1P_1}{h_2P_2+\sigma^2}\right)\frac{h_1}{h_2P_2+\sigma^2}\right]\right\}=0$$

$$\iff \frac{1}{P_1}\left[1-2f\left(\frac{h_1P_1}{h_2P_2+\sigma^2}\right)\right] = -M\left[2f'\left(\frac{h_1P_1}{h_2P_2+\sigma^2}\right)\right]\cdot\frac{h_1}{h_2P_2+\sigma^2}$$

Απλοποιούμε τις συναρτήσεις; έστω $f(\gamma_i) \longrightarrow P_e \simeq \gamma_i$ και γίνονται:

$$u_1(P_1,P_2) = \frac{1}{P_1}\left(1-2\frac{h_1P_1}{h_2P_2+\sigma^2}\right)^M$$

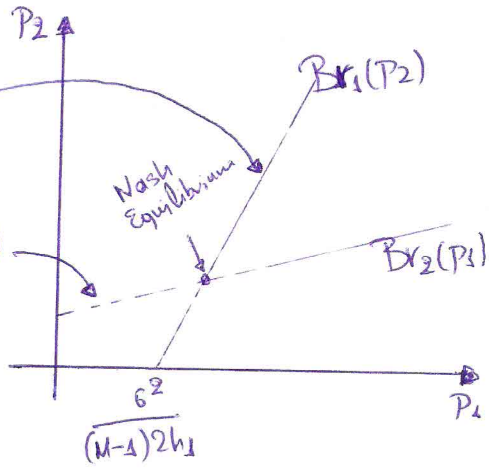
$$u_2(P_1,P_2) = \frac{1}{P_2}\left(1-2\frac{h_2P_2}{h_1P_1+\sigma^2}\right)^M$$

$$\frac{\partial u(P_1,P_2)}{\partial P_1}=0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow P_1 = \frac{\sigma^2+h_2P_2}{(M-1)2h_1} \quad (1)$$

Ομοίως, για το P_2: $P_2 = \frac{\sigma^2+h_1P_1}{(M-1)2h_2} \quad (2)$

Λύνουμε το σύστημα (1), (2) για το Ν.Ε.

u_{tot} (Ν.Ε.)

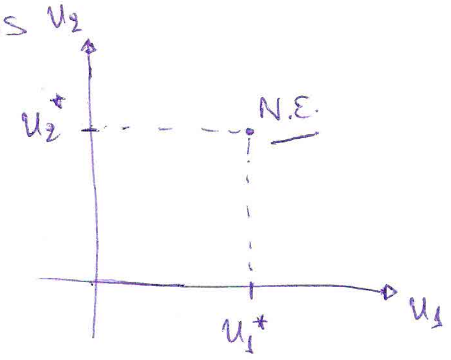


Social Optimum (S.O.):

$u_{tot}(S.O.) = [u_1(P_1,P_2)+u_2(P_1,P_2)] \xrightarrow[\text{Παράγωγοι}]{\text{Μερικοί}} \frac{\partial[\ldots]}{\partial P_1}=0,\ \frac{\partial[\ldots]}{\partial P_2}=0 \longrightarrow$ Βρίσκουμε τα best responses.

$$PoA = \frac{u_{tot}(S.O.)}{u_{tot}(N.E)}.$$

Στο Ν.Ε., λόγω της εγωιστικής συμπεριφοράς των κόμβων δεν φθάνουμε στο efficiency



$u_1^* = u_1(p_1^*, p_2^*)$

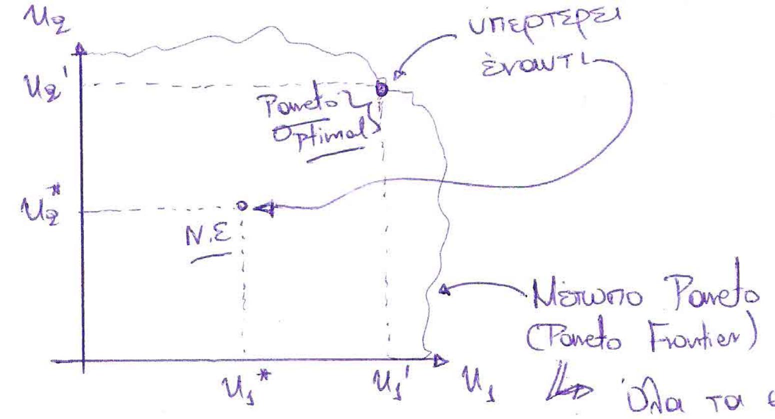
$u_2^* = u_2(p_1^*, p_2^*)$.

ΟΡΣ Ένα διάνυσμα στρατηγικών (ισχύος) $\hat{\underline{P}}$ κυριαρχεί ενός άλλου διανύσματος $\underline{P}$ κατά Pareto (Pareto Dominate) αν για ∀ παίκτη $i \in N$:

$$u_i(\hat{\underline{P}}) \geq u_i(\underline{P})$$

και για κάποιον παίκτη $j \in N$: $u_j(\hat{\underline{P}}) > u_j(\underline{P})$

ΟΡΣ Pareto Optimal: Ένα διάνυσμα $\underline{P}^*$ λέγεται Pareto Optimal, $\hat{p} = (\hat{p}_i, \hat{p}_{-i})$, αν δεν υπάρχει άλλο διάνυσμα $\underline{P}$: $u_i(\underline{P}) \geq u_i(\underline{P}^*)$, $\forall i \in N$ και $u_j(\underline{P}) \geq u_j(\underline{P}^*)$ για κάποιο $j \in N$.



$u_1' = u_1(p_1', p_2')$

$u_2' = u_2(p_1', p_2')$

(p_1', p_2') Pareto dominates (p_1^*, p_2^*)

⇒ Όλα τα σημεία είναι Pareto Dominate - Pareto Optimal Points

ΘΕΩΡΗΜΑ: Ένα διάνυσμα ισχύος $P^*(B)$ που λύνει το πρόβλημα:

$$(1) \quad \max \sum_{i=1}^{N} B_i u_i(\underline{P}), \; B_i \geq 0$$ όταν και μόνο όταν είναι Pareto Optimal.

Για όλα τα δυνατά ζευγάρια $(B_1, B_2) \in \mathbb{R}^2$ βρίσκω τις ισχείς, αντίστοιχα utilities και βρίσκω όλα τα Pareto Optimal.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

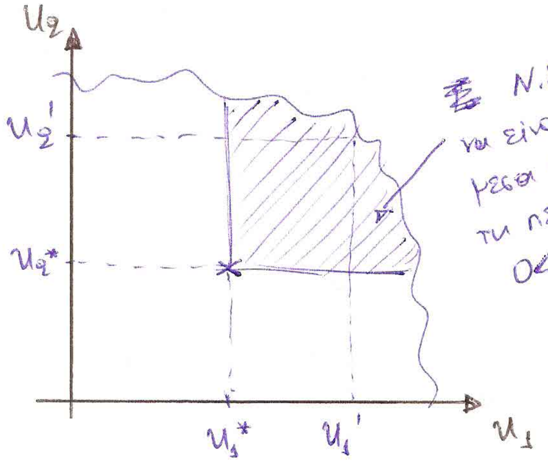
Έστω $P^*(B)$ λύνει την (1) αλλά δεν είναι Pareto Optimal.

Τότε $\exists \, \underline{P}' : u_i(P') > u_i(P^*(B))$ (2) για κάποιο i

και $u_j(P') \geq u_j(P^*)$ $\forall j$ (3).

Αν αθροίσουμε τις (2) κ' (3) κατά μέλη

$$\sum_{i=1}^{N} B_i u_i(P') > \sum B_i u_i(P^*)$$, ΑΤΟΠΟ



N.Ε. μπορεί να είναι και μέσα σ' αυτή τη περιοχή $0<\mu<1$

Στο N.E 2 πράγματα μπορεί να συμβούν:

$u_1(P_1^*, P_2^*)$

1) Ένας παίκτης λειτουργεί στο maximum:

$$P_1^* = P_{1,max}$$

2) Ένας παίκτης βελτιστοποιεί στο $u_i = \frac{1}{P_i} f(\gamma_i)$ ως προς P_i:

$$-\frac{1}{P_i^2} f(\gamma_i) + \frac{1}{P_i} f'(\gamma_i)\frac{\gamma_i}{P_i} = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\gamma_i f'(\gamma_i) = f(\gamma_i)}_{\text{βρίσκει το βέλτιστο } P_i^*}$$

$0 < P_i^* < P_{i,max}$.

ΡΟΛΟΣ ΤΟΥ ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΥ ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗΣ (PRICING)

Αν και συμπεριφέρονται εγωιστικά καταλήγουμε σε N.E που είναι καλύτερο και για τους δύο. Για να εξαλείψουμε το externality (: κατάσταση στην οποία ένας κόμβος βλάπτει τους άλλους) ορίζουμε το pricing (taxation):

$$C(P_i) = c_i P_i$$

c_i → optimization parameter

C ← κόστος (ανάλογο της ισχύος που μεταδίδει.)

Ενσωματώνουμε στο utility function το pricing (κόστος).

$$u_i^{pr}(P_i) = \underbrace{u_i(P_i) - C(P_i)}_{\text{net benefit}} \Longrightarrow \text{Βελτιώνεται το Nash Equilibrium.}$$