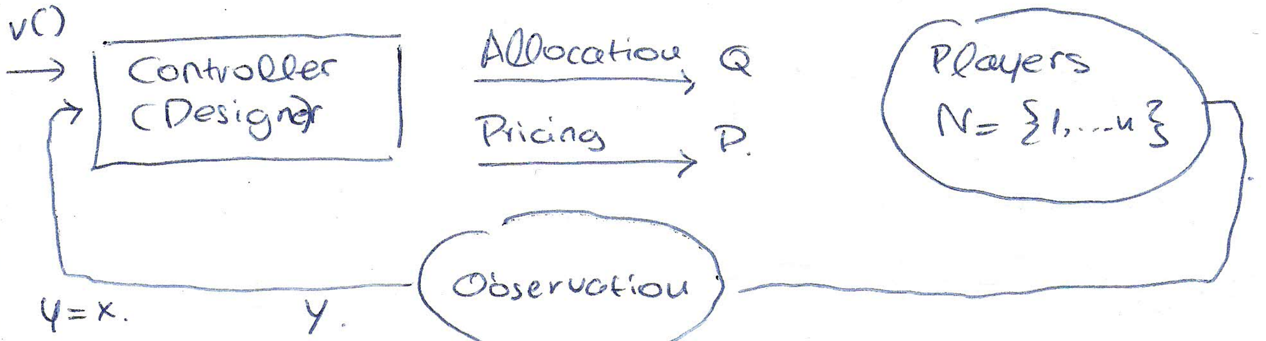
20/12/2010. Παπαζώης Άγγελος (1)

Lecture 12

Game Theory.

• Mechanism Design.



• ο controller 'βλέπει' ακριβώς τι κάνουν οι παίκτες

• Διαφορετικές utilities

• Allocation vector $Q=(Q_1,\dots Q_N)$.

• $f_i(x) = C_i(x) - U_i(Q_i(x))$, x_i: bid (στρατηγική κάθε παίκτη).

• Οι παίκτες δε έχουν άμεση πρόσβαση για το resource και μέσω των bids, δείχνουν πόσο πολύ ενδιαφέρονται για την απόκτηση του resource.

$C_i(x) = P_i(x) \cdot Q_i(x)$.

με $P_i(x)$: πόσο χρεώνεται ο παίκτης ανά μονάδα του resource που παίρνει

$f_i(x) = P_i(x) Q_i(x) - U_i(Q_i(x))$ (1)

• Ο controller δεν γνωρίζει τα utilities των παικτών.

• Περιορισμοί συστήματος:

1 — Efficiency
2 — Preference compatibility
3 — Strategy proofness (αξιόπιστο όσον αφορά τακτικές των παικτών που έχουν ως σκοπό να αυξήσουν το utility τους)

• Συνθήκη για το κριτήριο (2):

$$\frac{\partial f_i(\cdot)}{\partial Q_i} = 0 \Rightarrow P_i = U_i'(Q_i) \quad \text{(από τη σχέση (1))}$$

• Συνθήκη για το κριτήριο (1):

$$\max_Q v(Q) = \max_Q \sum_{i=1}^{N} U_i(Q_i) \quad \text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{N} Q_i = C$$

- $L(Q_1, Q_N) = \sum_i U_i(Q_i) + \lambda(\underbrace{C - \sum Q_i}_{\text{δεν ισχύει ο προηγούμενος περιορισμός}})$

λ: πολλαπλασιαστής Lagrange που μου δείχνει το ποσό τιμωρίας

- $\frac{\partial L}{\partial Q_i} = 0 \Rightarrow \boxed{U_i'(Q_i) = \lambda.}$

- Ισχύει για το κριτήριο (3):

$$f_i(x_i^*) \le f_i(x_i^* + \delta), \ \forall \delta_i$$

- $x_i = P_i(x)\, Q_i(x)$: πόσο είναι διατεθειμένος ο παίκτης να πληρώσει γενικά

(A) $P_i = \left(\sum_{j \neq i} x_j + \omega\right) / C, \ \omega > 0.$ ← Ένας μηχανισμός είναι ο εξής

αρκεί να λέγαμε ότι το $\sum Q_i = C$.

$$Q_i = \frac{x_i}{\sum_{j \neq i} x_j + \omega} C$$

- Ο μηχανισμός (A) είναι <u>preference compatible</u> (προκύπτει αν ο καθένας μεγιστοποιήσει selfishly το utility του) ή να κάνει minimize το f_i

$$f_i(x) = x_i - U_i\left(\frac{x_i}{\sum_{j \neq i} x_j + \omega} C\right)$$

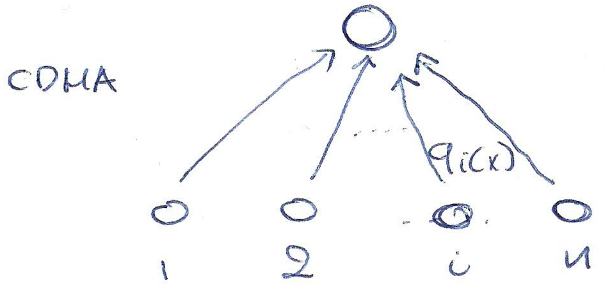
$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i} = 0.$$

- Ο μηχανισμός (A) είναι <u>strategy proof</u>

αν $U_i(x_i^* + \delta) - U_i(x_i^*) \le \delta.$, $U_i'(x_i^*) \le 1.$

- Ο μηχανισμός (A) είναι <u>asymptotically efficient</u> $(N \to +\infty)$

• Auctions για non-separable utilities



• $\gamma_i(x) = \frac{q_i(x)}{\sum_{j\neq i} q_j(x) + N}$

↓

SINR(x) : λόγος σήματος προς (παρεμβολή + θόρυβο)

(ο base station)

• x_i : bid

• $q_i(x)$: το ποσό που ~~είναι~~ λέει ο controller στον κάθε χρήστη να μεταδώσει της ισχύος

• $f_i(x) = P_i(x)\, q_i(x) - \underbrace{a_i \log(\gamma_i(q(x)))}_{R_i}$ $\cancel{a_i \log \frac{q_i(x)}{\sum_{j\neq i} q_j(x)+N}}$

R_i : rate που μπορεί να μεταδώσει ο κάθε χρήστης

→ το κέρδος κάθε χρήστη επηρεάζεται από το πόσο θα ποντάρουν οι άλλοι δηλ' από την ισχύ των άλλων.

• Preference compatibility criterion : $P_i = \frac{a_i}{q_i}$ *

$$-a_i \log \frac{q_i(x)}{\sum_{j\neq i} q_j(x)+N}$$

• Efficiency :

$$\max_{q_i} \sum_i a_i \log(\gamma_i(q)) \quad \text{s.t.} \quad \sum q_i = C$$

KKT $\frac{\partial f}{\partial q_i} = 0 \Rightarrow \frac{a_i}{q_i} - \sum_{j\neq i} \frac{a_j}{C-q_j+N} = \lambda$

• Μηχανισμός (Β) :

$x_i = P_i(x)\, q_i(x) \Rightarrow \boxed{q_i(x) = \frac{x_i}{P_i(x)}}$ *

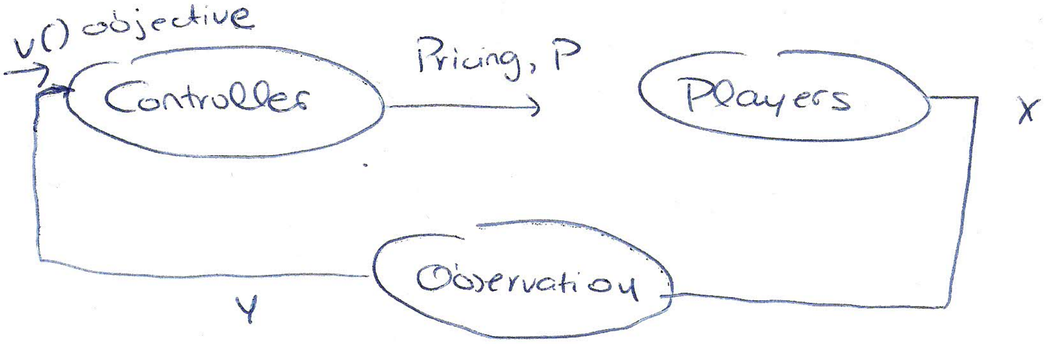
• $x_i = a_i$, για να έχω pref. comp. πρέπει ο παίκτης να ποντάρει a_i

• $\frac{x_i}{q_i} - \sum_{j\neq i} \frac{x_j}{C+N-q_j} = \lambda^*$

$\boxed{P_i(x) = \lambda^* + \sum_{j\neq i} \frac{x_j}{C+N-q_j^*}}$: κοστολόγηση

• Ο Μηχανισμός (Β) ικανοποιεί τα κριτήρια (1), (2), (3).

• **Pricing** : Ειδική περίπτωση του auction



Separable Utilities $\quad c$

$$f_i(x) = P_i(x)\cdot x_i - U_i(x_i)$$

στρατηγική του παίκτη

- το utility του παίκτη εξαρτάται μόνο από το resource που θα πάρει.
- ο παίκτης παίρνει κατευθείαν το resource, χωρίς bids.
- Pref. comp. criterion:

$$P_i(x^*) - U_i'(x_i^*).$$

- βελτιστοποίηση παικτών $\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_i} = 0.$
- Οι παίκτες δε γνωρίζουν τι επιπτώσεις έχει η στρατηγική τους στο P_i
- Efficiency criterion του controller:

$$\max \sum_{i=1}^{N} U_i(x_i) \quad , \quad \sum x_i = c.$$

$$U_i'(x_i^*) = \lambda.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

• έστω $U_i(x_i) = a_i \log x_i$

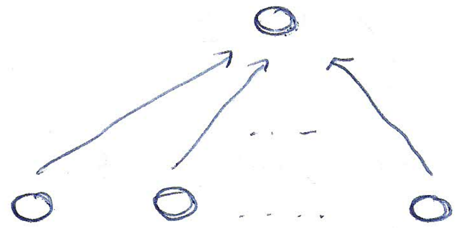
$$P_i^* = \frac{a_i}{x_i^*} = \lambda^* \Rightarrow x_i^* = \frac{a_i}{\lambda}.$$

από το $\sum x_i = c \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\lambda} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{\sum a_i}{c}$

$$P_i = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{c}$$

- ο παραπάνω μηχανισμός είναι pref. comp, είναι efficient αλλά <u>δεν είναι</u> strategy proof $\cancel{\checkmark}$

- <u>Non-separable utilities</u> :



$$\gamma_i(x) = \frac{x_i}{\underbrace{\sum_{j\neq i} x_j + N}_{I_i}}$$

γ_i : SINR. (Price-takers παίκτες)

- ο κάθε παίκτης επιλέγει από μόνος του την ισχύ μετάδοσης του x_i.

- $f_i(x) = P_i(x)\, x_i - a_i \log(\gamma_i(x))$: κόστος κάθε παίκτη.

(1) Pref. comp. criterion :

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \boxed{P_i = \frac{a_i}{x_i}}$$

(2) Efficiency criterion : ο controller θέλει να λύσει

$$\max_x \sum_i a_i \log(\gamma_i(x)), \quad s.t. \sum x_i = C$$

KKT : $\dfrac{a_i}{x_i} - \sum_{j\neq i} \dfrac{a_j}{I_j} = \lambda$, I_j τα παρεμβολές του SINR για τον χρήστη j : $N + \sum_{k\neq j} X_k$.

- $P_i = \lambda + \sum_{j\neq i} \dfrac{a_j}{I_j}$

- $\dfrac{a_j}{I_j} = \dfrac{P_j x_j}{I_j} = \dfrac{P_j \gamma_j I_j}{I_j} = P_j \gamma_j$, λόγω της $\gamma_j = \dfrac{X_j}{I_j}$

- $P_i = \lambda + \sum_{j\neq i} \gamma_j P_j \longrightarrow A\cdot P = \underline{1}\cdot\lambda$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & -\gamma_1 & \cdots & -\gamma_N \\ -\gamma_1 & 1 & \cdots & -\gamma_N \\ \vdots & & & \\ -\gamma_1 & -\gamma_2 & \cdots -\gamma_{N-1} & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_N \end{pmatrix}$

$\underline{P} = A^{-1}\, \underline{1}\, \lambda$: διάνυσμα κοστολογήσεων.

$i = 1, \dots N$ players

$\forall a_i \quad \sum_{i=1}^{N} u_i(\vec{a}) = 0$: zero sum game

- 2 players

$\min \underline{x}^T A \underline{y}$, ${}^{s_1}[\ \ ]_{s_2}$ $\max_{\underline{y}} \underline{x}^T A \underline{y}$

$\underline{x} = (x_1, \dots x_{s_1})$, με $\sum x_i = 1$. • Non zero sum game

↳ πιθανότητες στρατηγικών του παίκτη 1

$\underline{y} = (y_1, \dots y_{s_1})$

- $\min_x \max_y x^T A y = \max_y \min_x x^T A y$.

- Αν ο πίνακας A κατάλληλα διαμορφωμένος $\longrightarrow$ zero sum game

• Cooperative Games :

- Οι παίκτες κάνουν συνεργασίες (coalition formation / alliances / confederation).

- Selfish players
- $V(\cdot)$: αποτέλεσμα (όφελος) συμμαχίας worth
- Πώς θα μοιραστεί αυτό το όφελος?
- Which coalitions?

• $N = \{1, \dots n\}$ players

• coalitions όλα τα υποσύνολα του N $O = 2^N$

• $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \dots \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}$

↓ grand coalition

• $\forall A \subseteq N : v(A)$, $v: 2^N \to \mathbb{R}$

↳ worth of coalition A.

• το όφελος κάθε παίκτη μέσα σε συμμαχία πρέπει να είναι τουλάχιστον ίσο μ' αυτό το όφελος που μπορεί να πετύχει μόνος του.

• $\underline{X} = (x_1, \dots, x_n)$ imputation = απόδοση

$\sum_{i \in N} x_i = v(N)$, $x_i \geq v(\{i\})$, $\forall i$

• <u>παράδειγμα</u>:

Έστω P1 άλογο (x) κ' το πουλάει σε τιμή X.

P2 : 90 $(90-x)$ $v\{i\}=0$, ο P1 θα χρησιμοποιεί το άλογο και οι P2, P3 θα έχουν τίποτα

P3 : 100. $(100-x)$

$v\{1,2\} = 90$.

$v\{1,3\} = 100$

$v\{2,3\} = 0$ δεν υφίσταται.

• $v\{1,2,3\}$

$1 \to 3$ $90 < x < 100$.

$1 \to 2$ 90
$2 \to 3$ 100

$\Big\}$ $90 + (100-90) + 0 = 100$ value.

- **Superadditive games**

$\forall A, B \subseteq N$, με $A \cap B = \emptyset$

- $v(A \cup B) \geq v(A) + v(B)$.

- $E(v)$: το σύνολο όλων των imputations.

- **Προτιμήσεις για imputations**

$x, y \in E(v)$

έστω $S \subseteq N$ coalition

το S προτιμά το x από το y $(x \succ y)$ όταν $x_i > y_i, \forall i \in N$

$$\sum_{i \in S} x_i \leq v(S)$$

- **Core (πυρήνας)**: όλοι οι σταθεροί τρόποι να ανατεθεί το worth ενός coalition. (δεν υπάρχουν προσφιλέστεροι τρόποι)

$$core(v) = \{ y \in E(v) : \forall x \in E(v), x \not\succ y \}$$

- Gillies 1959:

$$Core(v) = \{ x : \sum_{i \in N} x_i = v(N), \sum_{i \in S} x_i \geq v(S), \forall S \in 2^N \}$$

x_1 x_2 x_3

- $v\{1,2,3\} = V$.
- $core = \{ (x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + x_3 = V \}$

- $v\{1,2\} \leq x_1 + x_2$

$v\{2,3\} \leq x_2 + x_3$

$v\{1,3\} \leq x_1 + x_3$

$v\{1\} \leq x_1$

$v\{2\} \leq x_2$

$v\{3\} \leq x_3$

- (παιχνίδι με άλογο):

$v\{1,2\} = 90$

$v\{1,3\} = 100$

$v\{2,3\} = 0$

$v\{1\} = 0$

$v\{2\} = 0$

$v\{3\} = 0$

- $x_1 + x_2 + x_3 = 100$.
- $x_1 + x_2 \geq 90$.

$x_1 + x_3 \geq 100$.

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

- $c(v) = \{ (t, 0, 100-t) : 90 \leq t \leq 100 \}$