ΜΑΘΗΜΑ 11

Μαρτίδης Χρήστος

Socially concave games

Game $N = \{1, \dots N\}$ $u_i()$, $i = 1, \dots N$

(i) $\exists \lambda_i$ $g(x) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i u_i(x)$ concave $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1$

λ_i σταθερές

ii) $\forall i$ $a_i \in A_i$

$h(y) = u_i(a_i, y)$ convex

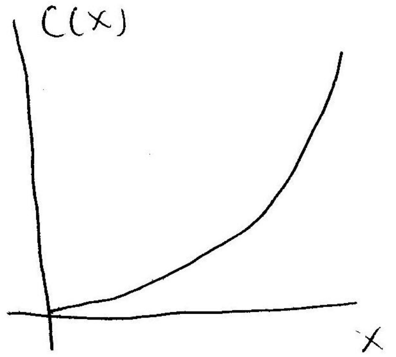
Ιδική περίπτωση games

π.χ. Cournot Game

$i = 1, \dots N$ $\quad$ $c_i(s_i)$ convex

$$u_i(s) = s_i \cdot P(s) - c_i(s_i)$$

$$P(s) = a - b \sum_{i=1}^{N} s_i$$



$c_i(s_i)$: κόστος

s_i : # παραγόμενων πρ.

$P(s)$: τιμή ανά μονάδα κοστολόγησης

Αποδεικνύεται ότι αυτό το game είναι social concave game

$\lambda_i = \frac{1}{N}$

i) $g(s) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} u_i(s) = \frac{1}{N} \left[\sum_i s_i (a - b \sum_j s_j) - \sum_i c_i(s_i) \right]$

Να αποδείξουμε ότι είναι concave.

ii) $u_i(s_i, x_{-i}) = s_i (a - b s_i - b \sum_{j \neq i} x_j) - c_i(s_i)$

Ορισμός ε-ΝΕ

$G = (N, A, \{u_i\})$

$A = A_1 \times \cdots \times A_N$.

$x \in A$ θα λέγεται ε-Nash Eq. αν $\forall$ παίκτη i

$i = 1, \ldots N$ και $\forall a_i \in A$:

$$u_i(x_i, x_{-i}) \geq u_i(a_i, x_{-i}) - \varepsilon$$

για $\varepsilon = 0 \Rightarrow$ το γνωστό ΝΕ.

Σημασία ε-Nash: κανένας παίκτης δεν θα αλλάξει την στρατηγική του αν δεν ωφεληθεί τουλάχιστον ε.

Θεώρημα G Socially concave game.

$\forall i$ παίζει στρατηγικές με μέγιστο regret $R_i(t)$

$$R_i(t) = \underbrace{\sum_{\tau=0}^{t} \max_{a_i} u_i(a_i, \cdot)}_{\text{ιδανικό}} - \underbrace{\sum_{\tau=0}^{t} u_i(x_i^{\tau}, \cdot)}_{\text{αυτό που παίζει.}}$$

$\tau = 0$ $\qquad\qquad$ $\tau = t$

$$\{x_1^0, x_1^1, \dots, x_1^t\}$$

Με τι θα συγκρίνουμε

a) $\max\limits_{a_i} \sum\limits_{\tau=0}^{t} u_i(a_i, \cdot)$ → ίδιο action σε όλα τα slots

b) $\sum\limits_{\tau=0}^{t} \max\limits_{a_i} u_i(a_i, \cdot)$ → best action σε κάθε slot.

f) $\hat{\underline{x}}^t = \frac{1}{t} \sum\limits_{\tau=1}^{t} \underline{x}^\tau$ → Μέσος όρος στρατηγικών

Αυτό είναι ε-ΝΕ με $\varepsilon = \frac{1}{\lambda_{min}} \sum\limits_{j \in N} \frac{\lambda_j \cdot R_j(t)}{t}$

g) Η μέση utility

$\hat{u}_i^t = \frac{1}{t} \sum\limits_{\tau=1}^{t} u_i(x^\tau)$ ικανοποιεί το εξής:

$$|\hat{u}_i^t - u_i(\hat{x}^t)| \leq \frac{1}{\lambda} \sum_{j \in N} \frac{\lambda_j \cdot R_j(t)}{t}$$

μέσο ut.

το utility αν παίξεις τον μέσο όρο σε κάθε slot.

Ficticious Play

Ο κάθε παίκτης παρατηρεί τι κάνουν οι άλλοι και αναπροσαρμόζει την στρατηγική του σε κάθε slot.

Έστω $N=2$

$u_i(s_i, s_{-i})$

$u_1(s_1, s_2)$, $u_2(s_2, s_1)$

$n_i^t(s_{-i})$ # των φορών που ο i παρατηρεί το strategy s_{-i} από τον άλλον παίκτη.

1: $n_1^t(S_2)$

π.χ. S_2: $\{B_1, B_2\}$

$$n_1^t(S_2) < \begin{matrix} n_1^t(B_1) \\ n_1^t(B_2) \end{matrix}$$

$n_1^0(s_{-i}) \rightarrow$ γνωστό

Παράδειγμα:

$S_2 = \{U, D\}$

Έστω $n_1^0(U) = 3$

$n_1^0(D) = 5$

Έστω ο παίκτης 2 κάνει U, U, D

$n_1^3(U) = 5$

$n_2^3(D) = 6$.

$\forall i$ Forms beliefs για το τι παίζει ο άλλος/άλλοι

$$\mu_i^t(s_{-i}) = \frac{n_i^t(s_{-i})}{\sum_{x_{-i} \in A_{-i}} n_i^t(x_{-i})}$$

$n_i^t(s_{-i}) \rightarrow$ # που οι άλλοι έπαιξαν s_{-i}

$\rightarrow$ Εκτίμηση για το mixed str. που παίζει ο άλλος.

utilities άγνωστα.

$\mu_1^0(U) = \frac{3}{8}$, $\mu_1^0(D) = \frac{5}{8}$

Μετά

$\mu_1^3(U) = \frac{5}{11}$, $\mu_1^3(D) = \frac{6}{11}$

$$s_i^t = \underset{s_i \in S_i}{\operatorname{argmax}}\ u_i(s_i, \mu_i^t)$$

s_i^t: Best response σε απάντηση αυτού που υποθέτω ότι παίζει ο άλλος.

Παράδειγμα:

	L	R
U	(3,3)	(0,0)
D	(4,0)	(1,1)

$n_1^0 = \binom{3}{0}$

$n_2^0 = \binom{1}{2.5}$

$$\mu_1^0 = \binom{1}{0} \Rightarrow s_1^0 = D$$

$$\mu_2^0 = \left(\frac{1}{3,5}, \frac{2,5}{3,5}\right) \Rightarrow s_2^0 = L$$

$$\eta_1^1 = \binom{4}{0} \Rightarrow \mu_1^1 = \binom{1}{0}$$

$$\eta_2^1 = \binom{1}{3,5} \Rightarrow \mu_2^1 = \left(\frac{1}{4,5}, \frac{3,5}{4,5}\right)$$

Με βάση την mixed strategy κέρδη του παίκτη 2.

$$L \rightarrow \frac{1}{3,5} \cdot 3 + \frac{2,5}{3,5} \cdot 0 = \frac{3}{3,5}$$

$$R \rightarrow \frac{1}{3,5} \cdot 0 + \frac{2,5}{3,5} \cdot 1 = \frac{2,5}{3,5}$$

Τελικά θα συγκλίνει στο ΝΣ $(1,1)$.

Γενικά το fictitious play δεν συγκλίνει πάντα στο ΝΣ

<u>Σύγκλιση του fictitious play</u>

i) Αν $\{\underline{s}^t\} \rightarrow \underline{s} \iff \exists T \ \underline{s}^t = \underline{s} \ \forall t \geq T$

με $\underline{s}^t$: ακολουθία στρατηγικών για όλους τους παίκτες.

ii) $\{s^t\} \rightarrow \underline{\sigma}, \forall i, \forall s_i \in S_i \ \lim_{T \to \infty} \frac{\sum_{t=0}^{T-1} I\{s_i^t = s_i\}}{T} =$

$= \sigma(s_i)$ με $\sigma(s_i)$ ποσοστό του χρόνου όπου ο i διαλέγει αυτήν την στρατηγική.

Θεώρημα

Αν $\{s^t\} \to \underline{\sigma}$ in the time average sense τότε

το σ είναι mixed NE

$\underline{\sigma} = (\underline{\sigma_1}, \underline{\sigma_2}, \ldots \underline{\sigma_N})$.

Στα εξής games έχουμε Fictitious play learning:

1) Two-player zero-sum games. Όπου το κέρδος του ενός είναι η χασούρα του άλλου.
2) 2-player games με το πολύ 2 στρατηγικές ∀ παίκτη.
3) Παίγνια που λύνονται με iterative strict dominance

   Αποκλείω στρατηγικές που είναι dominated.
4) Games όπου οι παίκτες έχουν το ίδιο payoff.
5) Potential games.

Mechanism Design

$$\underline{x}^* \ \text{NE} \longrightarrow \underline{x}'$$

Στόχοι του MD:

1) Efficiency.

   Θέλω να έχω S.O ανάλογο με τον στόχο του designer.
2) Preference Compatibility:

   Το σημείο $\underline{x}'$ θα πρέπει να είναι αρεστό στον κάθε παίκτη.
3) Strategy-proofness ή truthful dominance ή incentive compatibility.

   Ο κάθε παίκτης να μην μπορεί να πει ψέματα για το utility του με σκοπό να το βελτιώσει.

MD < Auctions / Pricing.

N παίκτες

Υποθέτω $\underline{x} = (x_1, \dots x_N) \in X \subseteq R^N$ convex χώρος

x_i: strategy του παίκτη i. που είναι μεταβλητή.

$U_i(x): X \to R$ άγνωστα, συνεχής και παραγωγίσιμα.

Designer D.

Mechanism mapping $M: X \to R^N$.

L εισαγωγή κανόνων και prices.

$$\downarrow$$

$$C_i(x)$$

Ο κάθε παίκτης

$$\min \; -U_i(x)$$

$$J_i(x) = C_i(x) - U_i(x)$$

$\forall i$ προσπαθεί $\min\limits_{x_i} J_i(x)$

$$\underline{x}^* = NE \Leftrightarrow x_i^* = \arg\max_{x_i} J_i(x_i, x_{-i}^*) \quad \forall i = 1, \dots N.$$

<u>Designer D</u>

θέλει $\max \; V(x, U_i(x), C_i(x))$

με $C_i(x_i) = a_i x_i$ κοστολόγηση γραμμική προς την στρατηγική του παίκτη

Ορισμός Strategy proofness.

Έστω $J_i(x^*) \geq J_i(\bar{x})$

Κόστος στο NE όταν λέει αλήθεια

Κόστος στο NE όταν λέει ψέματα.

Θεωρούμε τα U_i άγνωστα τόσο στους παίκτες όσο και στον designer.

- Resource sharing $\sum_{i=1}^{N} x_i = C$

- Coupling due to interference

$$\gamma_i(x) = \frac{h_i x_i}{\sum_{j \neq i} h_j \cdot x_j + \sigma^2}.$$

Στην περίπτωση CDMA ~~αλλά~~ $\gamma_i(x) = SINR$

$$u_i(x) = \log(1 + \gamma_i(x)).$$

- Multiplicative coupling

$$y_i = x_i \prod_{j \neq i} (1 - x_j)$$

(Throughput στο ALOHA).

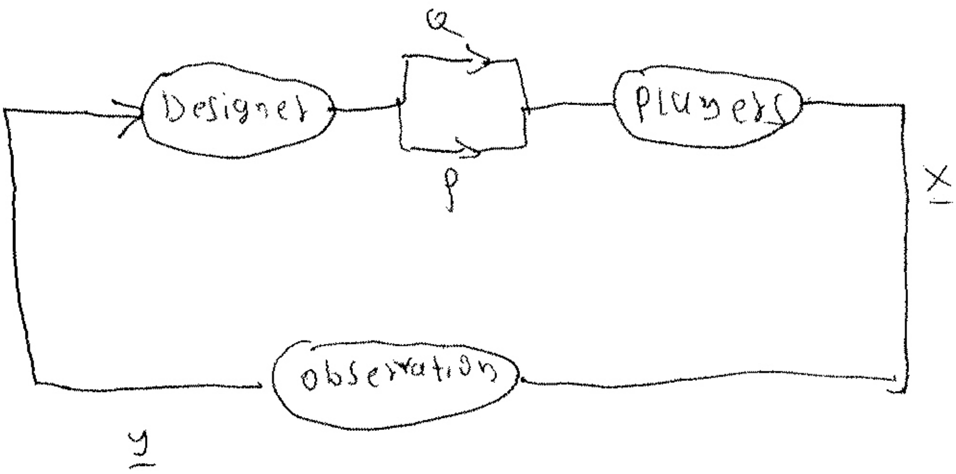
Μεταδίδεις εσύ και κανείς άλλος.

Auctions

Στρατηγική του κάθε παίκτη είναι τα x_i bids.

x_i bids $\rightarrow$ minimize $C_i(x) - u_i(x)$

Designer
- $\rightarrow$ resourse allocation rule $\{Q_i(\underline{x})\}$, $i = 1 \dots N$.
- $\rightarrow$ resourse pricing $\{P_i(x)\}$, $i = 1, \dots N$.



Εμείς θα θεωρήσουμε ότι δεν έχουμε observation.

Άρα $y = x$.

$$J_i(\underline{x}) = C_i(\underline{x}) - V_i(Q_i(\underline{x}))$$

$$C_i(\gamma) = \int_0^{Q_i(x)} p_i(\xi)\, d\xi$$ (Για διαφορετική κοστολόγηση στα διαφορετικά κομμάτια του resourse

$C_i(\gamma) = p_i(x) \cdot Q_i(x)$ (Για ίδια κοστολόγηση).

Βιβλιογραφία:

- Eva Tardos

  ↓

  Roughgarden

- Christos Papadimitriou

  ↓

  Costis Daskalakis

- Yishay Mansour.

- Asuman Ozdaglar