ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ

Ενδεικτικές Λύσεις

Θεμάτων Σεπτεμβρίου 2013

ΘΕΜΑ 1^{O}

i)

$$A\bullet\left(B\times C\right)=\begin{vmatrix}3 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=\cdots\pi\rho\alpha\xi\varepsilon\iota\varsigma=10$$

Όταν $A\bullet\left(B\times C\right)=0$ τότε παριστάνει επίπεδο που διέρχεται απ τα 3 σημεία A, B, C.

Γιατί, αν $P(x,y,z)=0$ τυχαίο σημείο του επιπέδου τότε $\overrightarrow{AP}\bullet(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})=0$ αφού

$$\begin{vmatrix}x_1-x & y_1-y & z_1-z\\ x_2-x & y_2-y & z_2-z\\ x_3-x & y_3-y & z_3-z\end{vmatrix}=0 \text{ όπου } A(x_1,y_1,z_1),B(x_2,y_2,z_2),C(x_3,y_3,z_3).$$

(Θα μπορούσαμε να πάρουμε τα συγκεκριμένα A,B,C και $P(x,y,z)$ τυχαίο επί αυτού του επιπέδου.)

ii) Το πεδίο $F=\underbrace{3x(x-1)}_{M}\vec{i}+\underbrace{3}_{N}\vec{j}+\underbrace{1}_{P}\vec{k}$ για να είναι αστρόβιλο (ή συντηρητικό) πρέπει:

$$rotF=curlF=\vec{0}\Rightarrow rotF=\begin{vmatrix}i & j & k\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ M & N & P\end{vmatrix}=\vec{0}\Rightarrow$$

$$i\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial z}\right)+j\left(\frac{\partial M}{\partial z}-\frac{\partial P}{\partial x}\right)+k\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)=\vec{0}$$

Άρα το πεδίο F είναι αστρόβιλο.

Ισχύει πάντα ότι $div(rotF)=0$ άρα και εδώ ισχύει(πόσο μάλλον αφού $rotF=0$).

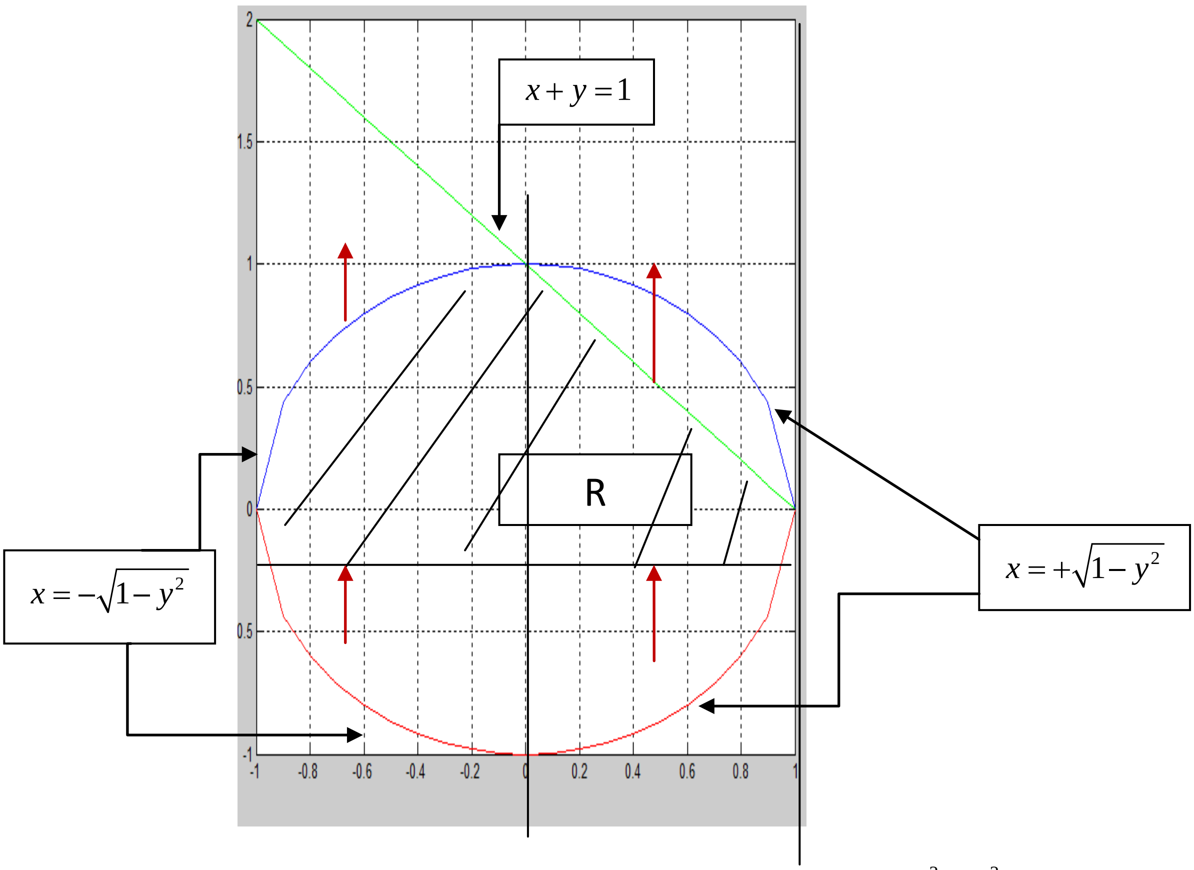
Το έργο W της F δίνεται από το επικαμπύλιο: $W=\int_c F\cdot dr=\int_c Mdx+Ndy+Pdz$ όπου

$F=Mi+Nj+Pk=3x(x-1)\vec{i}+3\vec{j}+1\vec{k}$, όπου $c\colon r=r(t)=xi+yj+zk$ η καμπύλη

(ευθεία) που ακολουθούμε με $x=y=z$ για να πάμε από το $A(0,0,0)$ ως το $B(1,1,1)$.
Έτσι, θέτοντας $x=y=z=t$ (παραμετροποίηση) τότε $dx=dy=dz=dt$ και

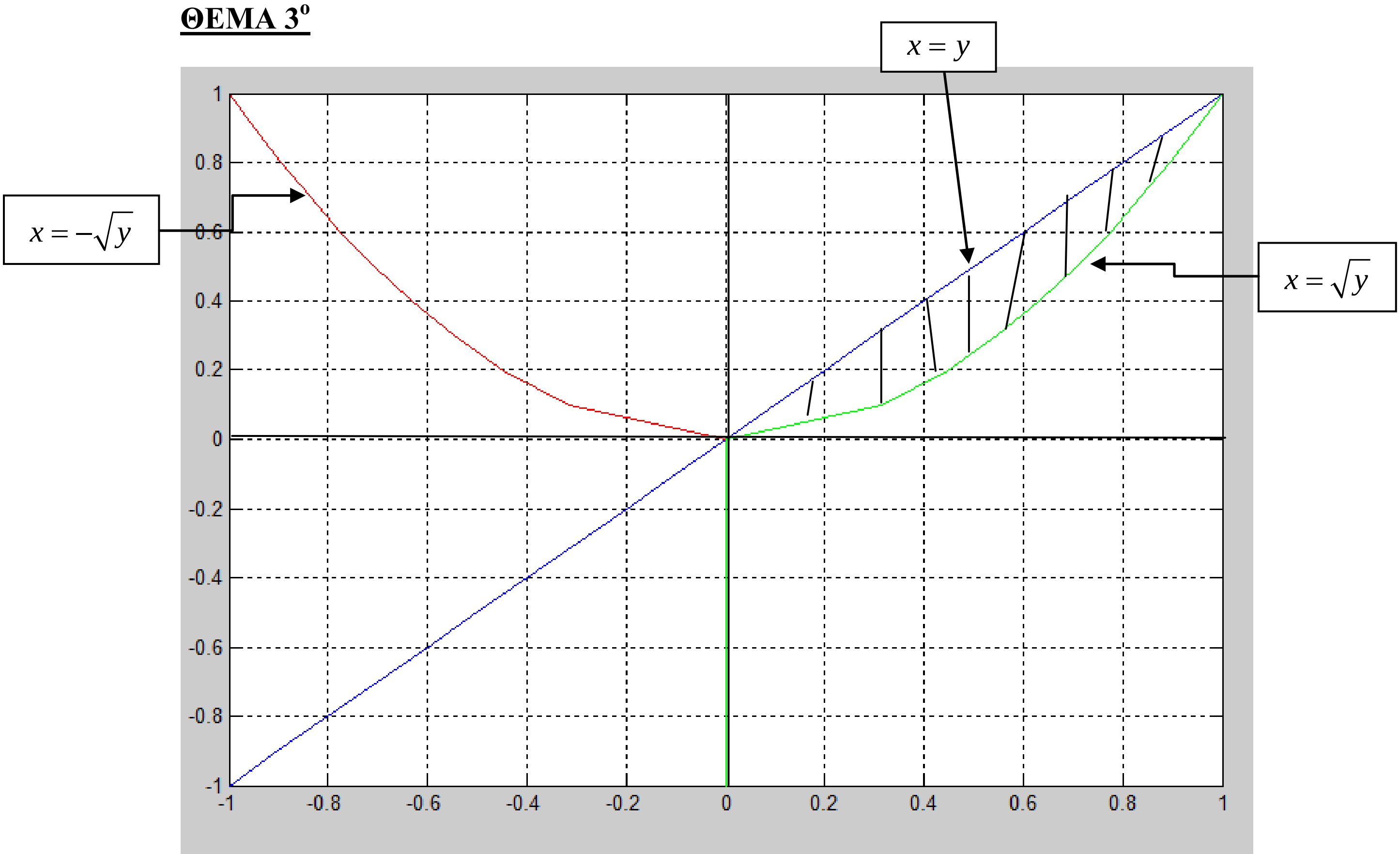
$$W=\int_0^1 (3t^2-3t)dt+3dt+1dt=\int_0^1 (3t^2-3t+4)dt=(t^3-\frac{3t^2}{2}+4t)\Big|_0^1=1-\frac{3}{2}+4=\frac{7}{2}$$

ΘΕΜΑ 2^{O}



R: η γραμμοσκιασμένη περιοχή μεταξύ του κύκλου $x^2+y^2=1$ κέντρου O(0,0) ακτίνας $r=1$ και της ευθείας $x+y=1$. Έτσι αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης (από $dxdy$ σε $dydx$) στο $I=\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dxdy$ θα αλλάξουν και τα άκρα ολοκλήρωσης οπότε $-1\le x\le 1$ και για τέτοια x το y είτε κινείται $0\le y\le \sqrt{1-x^2}$ (πάνω αριστερά, έξοδος από κύκλο) είτε $0\le y\le 1-x$ (πάνω δεξιά, έξοδος από την ευθεία $y=1-x$), άρα : $I=\int_{-1}^{0}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dydx+\int_0^1\int_0^{1-x} f(x,y)dydx$.

ΘΕΜΑ 3[ο]



R: γραμμοσκιασμένη περιοχή που μας ενδιαφέρει μεταξύ της παραβολής $y = x^2$ και της ευθείας $y = x$, c : η καμπύλη που περικλείει την R.

Από το θεώρημα Green : $I = \oint_c Mdx + Ndy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dR$, όπου

$M = xy, N = y^2, \frac{\partial N}{\partial x} = 0, \frac{\partial M}{\partial y} = x$, άρα

$$I = \int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} (-x)\, dxdy = \int_0^1 \left(-\frac{x^2}{2} \Big|_y^{\sqrt{y}} \right) dy = -\frac{1}{2} \int_0^1 \left(y - y^2 \right) dy = -\frac{1}{2} \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right) \Bigg|_0^1 = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = -\frac{1}{2}\frac{1}{6} = -\frac{1}{12}$$

αν επιλεγεί η άλλη σειρά ολοκλήρωσης :

$$I = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} (-x)\, dydx = \int_0^1 -xy\Big|_{x^2}^{x} dx = \int_0^1 \left(-x^2 + x^3 \right) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right) \Bigg|_0^1 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{12} \; .$$

ΘΕΜΑ 4ο

α) Ο μιγαδικός -1+i γράφεται σε τριγωνομετρική μορφή $-1+i=r(\cos\theta+\imath\sin\theta)$ (1) όπου

$$\left.\begin{array}{l} x=r\cos\theta=-1 \\ y=r\sin\theta=1 \end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l} r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2} \\ \tan\theta=\dfrac{y}{x}=-1\Rightarrow\theta=\dfrac{3\pi}{4} \end{array}$$

$$(1)\Rightarrow -1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

Ισχύει για τυχαίο μιγαδικό $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ ότι: $\log z=\log|z|+i\theta$, όπου θ το πρωτεύον όρισμα, οπότε

$$\log(-1+i)=\log\sqrt{2}+i\frac{3\pi}{4}$$

β) Οι ρίζες της $z^3=1$ ή $z^3-1=0$ είναι οι :

$$z_k=\sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{3}\right), k=0,1,2$$ και $\theta=0$, δηλαδή

$$\left.\begin{array}{l} z_0=\cos 0+i\sin 0=1 \\ z_1=\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}i\overset{\acute{\varepsilon}\sigma\tau\omega}{=}w \\ z_2=\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i \end{array}\right\}\text{ τότε}$$

$$w^2+w+1=0 \text{ ή } w^2+w+1=\frac{w^3-1}{w-1}=\frac{0}{w-1}=0$$

γ) α) $$\int_1^2\left(\frac{1}{t}-i\right)^2dt=\int_1^2\left(\frac{1}{t^2}-1-\frac{2i}{t}\right)dt=\int_1^2\left(\frac{1}{t^2}-1\right)dt+i\int_1^2\frac{2}{t}dt=$$

$$\left.\left(-\frac{1}{t}-t\right)\right|_1^2+i2\ln|t|\Big|_1^2=-\frac{1}{2}-2-(-1-1)+i(2\ln 2-2\ln 1)=-\frac{1}{2}+i2\ln 2$$

β) $\int_c\frac{z}{1-e^z}dz$, c: η καμπύλη όλων των z με $|z|=2$, δηλαδή κύκλος κέντρου Ο(0,0) ακτίνας 2

$$1-e^z=0\Leftrightarrow e^z=1\Leftrightarrow z=0$$

Αν θεωρήσουμε ότι η συνάρτηση $f(z) = \dfrac{z}{1-e^{z}}$ ορίζεται στο εσωτερικό του κύκλου εκτός του κέντρου $z_0 = 0$, όπου δεν είναι αναλυτική (ολόμορφη). Τότε το παραπάνω ολοκλήρωμα ισούται με 0 (θεωρημα).

<u>ΘΕΜΑ 5ο</u>

α) Η συνάρτηση $c(t) = 1 + 2i + 5e^{\pi i t} : [0,2] \to \mathbb{C}$ παριστάνει κύκλο με κέντρο $z_0 = 1 + 2i$ και ακτίνα $r = 5$.

Πράγματι, αν
$c(t) = x + iy = 1 + 2i + 5e^{\pi i t} = 1 + 2i + 5(\cos(\pi t) + i\sin(\pi\, \mathrm{t})) = (1 + 5\cos\pi\, \mathrm{t}) + \mathrm{i}(2 + \sin\pi\, \mathrm{t})$

Τότε

$$\left.\begin{aligned} x = 1 + 5\cos\pi t \Rightarrow x - 1 = 5\cos\pi t \\ y = 2 + 5\sin\pi t \Rightarrow y - 2 = 5\sin\pi t \end{aligned}\right\} \Rightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$$

Επίσης επειδή $x = x(\mathrm{t}) = 1 + 5\cos\pi t, y = y(t) = 2 + 5\sin\pi t$ είναι συνεχείς συναρτήσεις τότε και $c(t) = x(t) + iy(t)$ είναι συνεχής συνάρτηση άρα $c(t) = \delta\rho\ \mu o\varsigma$.

Είναι **κλειστός δρόμος** (αφού είναι κύκλος) αλλά και επειδή $\mathrm{c}(0) = 1 = c(2)$ (ταυτίζονται τα άκρα).

Είναι **λείος δρόμος** γιατί οι $x(t), y(t)$ είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις και επομένως και η $c(t) = x(t) + iy(t)$ είναι παραγωγίσιμη, δηλαδή λεία καμπύλη.

β) $I = \displaystyle\int_c \frac{\cos\left(\pi z/6\right)}{z^2 - 9} dz, c = 1 + 2i + 5e^{i\pi t}$ (από το (α))

Είναι $\dfrac{1}{z^2-9} = \dfrac{1}{(z-3)(z+3)} = \dfrac{A}{z-3} + \dfrac{B}{z+3} = \dfrac{1/6}{z-3} + \dfrac{-1/6}{z+3}$, οπότε

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi z}{6}\right)}{z^2-9} = \frac{1}{6}\frac{\cos\left(\frac{\pi z}{6}\right)}{z-3} - \frac{1}{6}\frac{\cos\left(\frac{\pi z}{6}\right)}{z+3} \quad (1) \text{ και}$$

$$I \overset{(1)}{=} \frac{1}{6}\int_c \frac{\cos\left(\frac{\pi z}{6}\right)}{z-3}dz - \frac{1}{6}\int_c \frac{\cos\left(\frac{\pi z}{6}\right)}{+3}dz \quad (2)$$

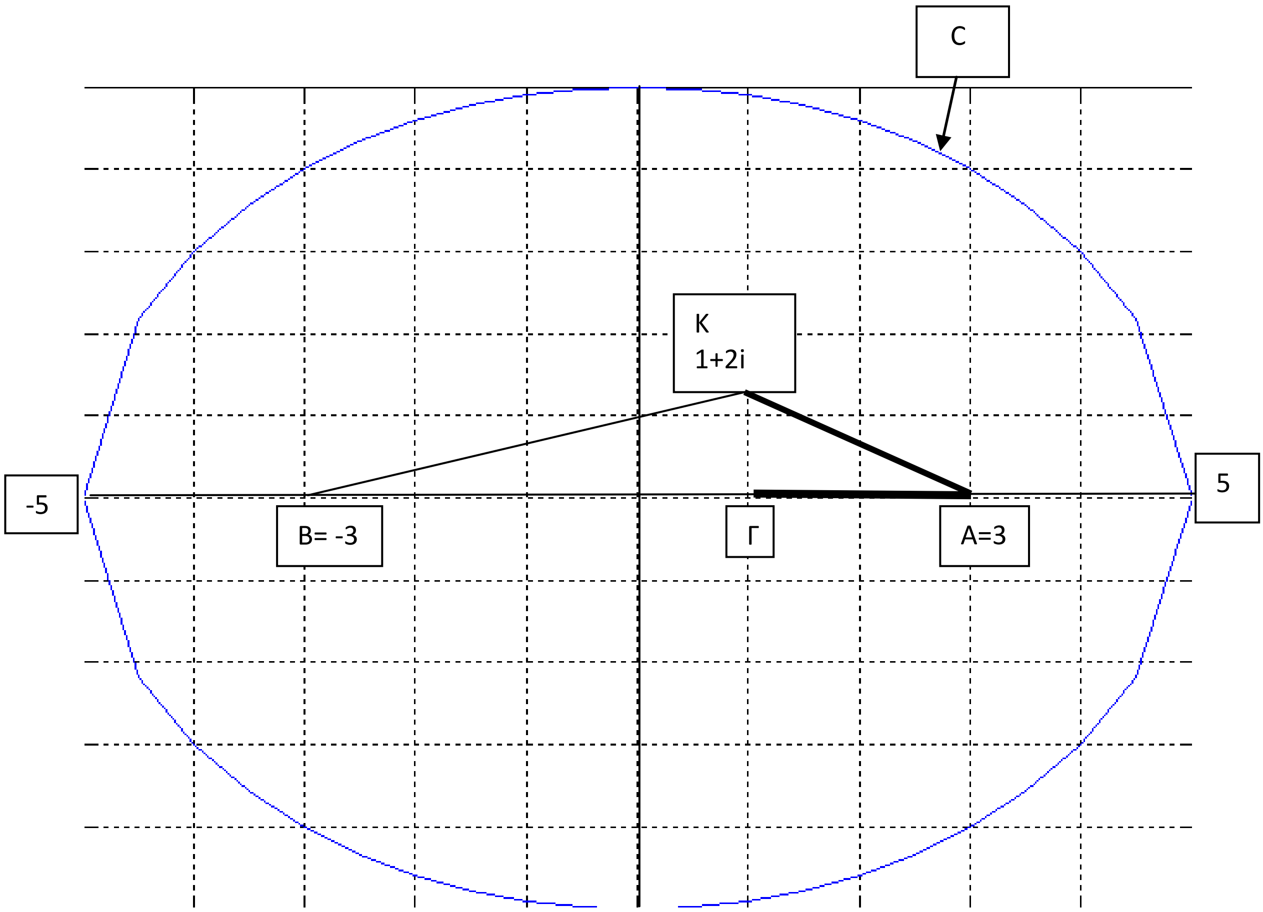
Το θεώρημα Cauchy αναφέρει ότι : $f^{(n)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z-z_0}dz$, όπου

n =τάξη παραγώγισης.

c = κλειστός, λείος, θετικά προσανατολισμένος δρόμος

z_0 =εσωτερικό σημείο της περιοχής που περικλείει ο c.

$f(z)$=αναλυτική(ολόμορφη) συνάρτηση στο εσωτερικό του δρόμου c. Εδώ έχουμε : $n=0$ δηλαδή $f^0(z_0) = f(z_0)$. Τα $z_0 = \pm 3$ εσωτερικά και τα δύο του κύκλου c, αφού:



$$\text{ΚΑ}^2 = \underbrace{\text{ΚΓ}^2}_{2^2} + \underbrace{\text{ΑΓ}^2}_{2^2} = 8 \Rightarrow \text{ΚΑ} = \sqrt{8} < 5 = r$$

Όμοια $\text{ΚΒ}^2 = \underbrace{\text{ΚΓ}^2}_{2^2} + \underbrace{\text{ΒΓ}^2}_{4^2} = 20 \Rightarrow \text{ΚΒ} = \sqrt{20} < 5 = r$

$f(z)=\cos\left(\frac{\pi z}{6}\right)$ είναι αναλυτική παντού στο $\mathbb{C}$ άρα και στο εσωτερικό του κύκλου.

Ο δρόμος $c=c(t)$, ως κύκλος, είναι θετικά προσανατολισμένος. Έτσι εφαρμόζουμε το θεώρημα του Cauchy δυο φορές, μια για το $z_0=3$ και μια για το $z_0=-3$.

$$f(3)=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{\cos\frac{\pi z}{6}}{z-3}dz \Rightarrow \underbrace{\int_c \frac{\cos\frac{\pi z}{6}}{z-3}dz}_{I_1}=2\pi i f(3)=2\pi i\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

$$f(-3)=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{\cos\frac{\pi z}{6}}{z+3}dz \Rightarrow \underbrace{\int_c \frac{\cos\frac{\pi z}{6}}{z-3}dz}_{I_2}=2\pi i f(-3)=0$$

Άρα από τη (2) $\Rightarrow I=\frac{1}{6}I_1-\frac{1}{6}I_2=0$