ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Στα Θέματα Λογισμού ΙΙ του Ιουνίου 2017

ΘΕΜΑ 1.

I) Μπορούμε να θέσουμε $u=\dfrac{y}{x}$ και τότε έχουμε

$\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial g}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}=g_u u_x=-g_u\dfrac{y}{x^2}$. Όμοια και ως προς y.

II) Αρκεί f να είναι συνεχής στο (0,0) για κάθε ακολουθία σημείων του $\mathbb{R}^2$. Επιλέγουμε π.χ την ακολουθία σημείων $(x,y)=(x,ax)$ που τείνει στο (0,0), όταν (x,y)→0. Τότε

$$f(x,y)=\frac{1-a^2}{1+a^2},$$

η οποία, ως σταθερή τείνει σε διαφορετικές τιμές για διαφορετικά a. Ετσι δεν υπάρχει το όριο στο (0,0).

III) Προκειται για ευρεση τοπικού ελάχιστου της συνάρτησης απόστασης από την αρχή, υπό τη συνθήκη τα σημεια να βρίσκονται επί της επιφάνειας $z^2-xy=4$ ή $g(x,y,z)=z^2-xy-4=0$. Με τη μέθοδο πολλαπλασιαστών Lagrange πρέπει

$$\begin{cases}\nabla f=\lambda\nabla g\\ g(x,y,z)=0\end{cases},$$

Οπότε (διερευνώντας), αν λ=1 έχουμε τα σημεία $P_1(0,0,2),P_2(0,0,-2)$. Αν z=0 τότε $\lambda=\pm 2$. Για λ=2 έχουμε τα σημεία $P_3=(-2,2,0),P_4(2,-2,0)$, ενώ για λ=-2 δεν εχουμε λύση.Τα κοντινότερα στην αρχή σημεία επί της επιφανείας είναι τα $\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2$.

ΘΕΜΑ 2.

Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta,$ όπου $0\le r\le 2, \dfrac{\pi}{4}\le\theta\le\dfrac{3\pi}{4}$, για τη περιοχή R, μεταξύ των ευθειών y=x και y=-x πάνω από τον άξονα x'x και εντός του κύκλου ακτίνας r=2.

Έτσι, $I=\displaystyle\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\int_0^2 r\cdot r\,dr d\theta=\frac{4\pi}{3}$.

ΘΕΜΑ 3.

Ι) Για να είναι ανεξάρτητο του δρόμου το επικαμπύλιο $\int_c Pdx + Qdy + Rdz$ αρκεί κατά τα γνωστά να ισχυει $P_y = Q_x, P_z = R_x, Q_z = R_y$, το οποίο ισχύει για $P = 2xy, Q = x^2 + y^2, R = 2yz$.

Τότε υπάρχει $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\nabla f = F = (P, Q, R)$.

Αφού

$$f_x = P \Rightarrow f = \int 2xydx \Rightarrow f(x, y, z) = x^2 y + c_1(y, z).$$
$$f_y = Q \Rightarrow c_1(y, z) = z^2 y + c_2(z)$$
$$f_z = R \Rightarrow c_2 = c \in \mathbb{R}$$

Άρα $f(x, y, z) = x^2 y + z^2 y + c$ και τότε το επικαμπύλιο ισούται με

$$I = f(B) - f(A) = ... = 20.$$

ΙΙ) $\oint_c (xy - x^2)dx + x^2 ydy = \int_0^1 \int_0^x (Q_x - P_y)dydx = \int_0^1 (xy^2 - xy)_0^x dx = -\frac{1}{12}$.

Η σειρά ολοκλήρωσης, στο διπλό ολοκλήρωμα ως γνωστό δε παιζει ρόλο.

Η περιοχή R αφορά το τρίγωνο OAB, με A(1,0) και B(1,1). Αν υπολογίζαμε το επικαμπύλιο κατά μήκος της κλειστής τριγωνικής γραμμής OAB κατά τη θετική φορά 0→A→B τότε θα έπρεπε το παραπάνω ολοκλήρωμα να είναι άθροισμα 3 επικαμπύλιο ολοκληρωμάτων, δηλ

$I = I_{OA} + I_{AB} + I_{BO}$. Να βρούμε τις παραμετρικές εξισώσεις των ευθ. τμημάτων OA, AB, BO και κατόπιν να υπολογίσουμε τα επιμέρους επικαμπύλια ολοκληρώματα.

ΘΕΜΑ 4.

Ι)

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\log z = \log|z| + i(\theta + 2\kappa\pi) \to \log z = \ln\sqrt{2} + i(2k\pi - \frac{\pi}{4})$$

Όπου k ακέραιος. Η πρωτεύουσα τιμή του λογάριθμου είναι για k=0.

II) Πρέπει $e^{i\theta} = -1 = e^{i\pi} \Rightarrow \theta = \pi$

III) Είναι κορυφές κανονικού 5-γωνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας ισης με 1, αφού οι n-οστες ρίζες της 1 δίνονται από

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, k = 0,1,2,...(n-1)$$

IV) Για να είναι η u(x,y) αρμονική πρέπει να έχει μερικές παραγώγους 2ης τάξης και u_x, u_y (που συμβαίνει) και επιπλέον $u_{xx} + u_{yy} = 0$ (ισχύει)

Αν v(x,y) η συζυγής αρμονική της u τότε πρέπει $u_x = v_y \; \kappa\alpha\iota \; u_y = -v_x$. Η πρώτη σχέση δίνει

$$v(x,y) = 2y - 3x^2 y + y^3 + c_1(x)$$

Και η δεύτερη σχέση με τη βοήθεια της προηγούμενης δίνει $c_1(x) = c \in \mathbb{R}$.

Έτσι, από θεώρημα $f'(z) = u_x + iv_x = \left(2 - 3x^2 + 3y^2\right) + i(-6xy)$.