

## ΕΞΕΤΑΣΗ Ιουνίου στο ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΛΟΓΙΣΜΟ ΙΙ

### ΘΕΜΑΤΑ

**ΘΕΜΑ 1. i)** Αν  $f(x, y) = g\left(\frac{y}{x}\right)$  και  $g$  μια παραγωγίσιμη συνάρτηση τότε, δείξτε ότι

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \quad (\text{Μον } 0,75)$$

**ii)** Εξετάστε αν η συνάρτηση  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  είναι συνεχής. (Μον 0,75)

**iii)** Να βρεθούν τα πλησιέστερα στην αρχή σημεία της επιφάνειας  $z^2 - xy = 4$ . (Μον 1)

**ΘΕΜΑ 2.** Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα  $\iint_R \sqrt{x^2 + y^2} \, dydx$ , όπου  $R$ , η περιοχή πάνω

από τον άξονα  $x'x$ , οριζόμενη από τις γραμμές  $x^2 + y^2 \leq 4$ ,  $y = x$ ,  $y = -x$  (να κάνετε ένα πρόχειρο σχέδιο της περιοχής  $R$ ). (Μον 1,25)

**ΘΕΜΑ 3. i)** Δείξτε ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα  $I = \int_c 2xy \, dx + (x^2 + z^2)dy + 2yz \, dz$

είναι ανεξάρτητο του δρόμου  $c$ . Με βάση αυτό το γεγονός, βρείτε το  $I$  από το σημείο  $A(0,0,0)$  ως το  $B(1,2,3)$ .... (Μον 1,5)

**ii)** Εφαρμόστε το Θεώρημα του Green για να  $\oint_c (xy - x^2)dx + x^2 ydy$ , όπου  $c$  η τριγωνική περιοχή που ορίζεται από τις ευθείες  $y = x$ ,  $x = 1$  και τον άξονα  $x$  (να κάνετε ένα πρόχειρο σχεδιάγραμμα). (Μον 1). Εξηγήστε πως θα υπολογίζατε το ίδιο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα χωρίς τη χρήση του Θεωρήματος Green. (Μον 0,75)

**ΘΕΜΑ 4. i)** Να υπολογιστεί ο  $\log(1-i)$ . (Μον 0,75)

**ii)** Για ποια  $\theta$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$ , ισχύει  $|e^{i\theta} - 1| = 2$ ; (Μον 0,5)

**iii)** Να εξηγήσετε που βρίσκονται γεωμετρικά οι  $5^{\text{η}}$  τάξης ρίζες της μονάδας. (Μον 0,5)

**iv)** Αφού ελέγξτε ότι η συνάρτηση  $u(x, y) = 2x - x^3 + 3xy^2$ , να βρείτε τη συζυγή αρμονική  $v(x, y)$  αυτής. Ποια είναι η παράγωγος της  $f = u + iv$ ; (Μον. 1,25)