

**ΕΞΕΤΑΣΗ Σεπτεμβρίου στο ΛΟΓΙΣΜΟ ΙΙ**  
**ΘΕΜΑΤΑ**

**ΘΕΜΑ 1. i)** Βρείτε την εξίσωση κάθετης ευθείας στην επιφάνεια  $x^2 + 4y^2 = z^2$  στο σημείο  $P(3,2,5)$ . (Μον 0,75)

**ii)** Αν  $z = f(x, y)$ , όπου  $x = 3t$ ,  $y = 2 \sin t$ , να υπολογιστεί η  $\frac{d^2 f}{dt^2}$  με το κανόνα της αλυσίδας. (Μον1)

**iii)** Αν η συνάρτηση  $T = 4x^2 - xy + 2y^3$  εκφράζει τη θερμοκρασία ενός σώματος, ποια μοναδιαία κατεύθυνση πρέπει να ακολουθήσουμε από το σημείο  $P(1, 2)$  ώστε να έχουμε τη μεγαλύτερη δυνατή πτώση της και πόση θα είναι αυτή. (Μον 1)

**ΘΕΜΑ 2.** Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα  $\int_0^{3/2} \int_{\sqrt{3}x}^{\sqrt{9-x^2}} 2xy \, dR$ , σε πολικές συντεταγμένες,

όπου  $R$ , η περιοχή που καθορίζεται από τα άκρα του ολοκληρώματος (να κάνετε ένα πρόχειρο σχέδιο της περιοχής  $R$ ). (Μον 1,25)

**ΘΕΜΑ 3. i)** Να υπολογίσετε το  $I = \int_{(1,0,1)}^{(0,1,1)} \sin y \cos x \, dx + \cos y \sin x \, dy + dz$ . (Μον 1,25)

**ii)** Εφαρμόστε το Θεώρημα Green για τον υπολογισμό του  $\oint_c (y^2 - x^2) \, dx + (x^2 + y^2) \, dy$ , όπου  $c$  το τρίγωνο που ορίζεται (κατά τη θετική φορά) από τις ευθείες  $y = 0$ ,  $x = 3$  και  $y = x$  (να κάνετε ένα πρόχειρο σχεδιάγραμμα). Να επαληθεύσετε την απάντησή σας υπολογίζοντας το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα χωρίς τη χρήση του Θεωρήματος Green;. (Μον 0,75+1)

**ΘΕΜΑ 4. i)** Να υπολογιστεί ο λογάριθμος  $\ln(-1 + i\sqrt{3})$ . (Μον 1)

**ii)** Βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης  $e^z - e^{-z} = 2i$  (Μον 1)

**iii)** Αφού ελέγξτε ότι η συνάρτηση  $u(x, y) = 2x(1 - y)$  είναι αρμονική, να βρείτε τη συζυγή αρμονική  $v(x, y)$  αυτής. Ποια είναι η παράγωγος της  $f = u + iv$ ; (Μον. 1)