

ΕΞΕΤΑΣΗ στο ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΛΟΓΙΣΜΟ ΙΙ
ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 1. i) Να βρεθεί η απόσταση του σημείου $A(0,1,1)$ από το επίπεδο $4y + 3z = -12$.

(Μον 0,75). Ποια η γωνία με το επίπεδο $3x - 2y + z = 3$; (Μον. 0,5)

ii) Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f(x, y) = 2x^2 - 4x + y^2 - 4y + 1$ στη κλειστή τριγωνική περιοχή που καθορίζεται από τις γραμμές $x = 0$, $y = 2$ και $y = 2x$ στο $1^ο$ τεταρτημόριο. Να βρεθούν επίσης και τα ολικά μέγιστα-ελάχιστα. (Μον 1+0,5)

ΘΕΜΑ 2. i) Με χρήση πολικών συντεταγμένων, υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^0 \frac{4\sqrt{x^2+y^2}}{1+x^2+y^2} dx dy . \quad (\text{Μον } 1)$$

ii) Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχείς παραγώγους $2^{ηs}$ τάξης. Να δείξετε ότι για τη συνάρτηση $h(x, y, z) = -y + x f(u, v)$ με $u = x^2 + y^2$ και $v = z e^{-x}$ ισχύει $y h_x - x h_y + y z h_z = x + y f(u, v)$. (Μον 1)

ΘΕΜΑ 3. Δείξτε ότι το διανυσματικό πεδίο $F(x, y, z) = \frac{1}{y} \vec{i} + \left(\frac{1}{z} - \frac{x}{y^2} \right) \vec{j} - \frac{y}{z^2} \vec{k}$ είναι συντηρητικό και βρείτε μια συνάρτηση δυναμικού f του F . Υπολογίστε στη συνέχεια το ολοκλήρωμα $\int_{(1,1,1)}^{(2,2,2)} \frac{1}{y} dx + \left(\frac{1}{z} - \frac{x}{y^2} \right) dy - \frac{y}{z^2} dz$. (Μον 1+0,5)

ΘΕΜΑ 4. Να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της του διανυσματικού πεδίου $F = \sin z \vec{i} + \cos z \vec{j} + \sqrt[3]{xy} \vec{k}$ κατά μήκος της καμπύλης $r(t) = \cos^3 t \vec{i} + \sin^3 t \vec{j} + t \vec{k}$, όταν $t \in [0, 3\pi/2]$. (Μον 1)

ΘΕΜΑ 5. i) Ποια είναι η εκθετική μορφή του μιγαδικού $(\sqrt{3} - i)^6$ χωρίς να κάνετε τις πράξεις. (Μον. 1)

ii) Δείξτε ότι $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{4z^2}{(z-1)^2} = 4$. (Μον 1)

iii) Αν η συνάρτηση $f(z) = e^{-y} e^{ix}$ είναι ολόμορφη, να βρείτε την παράγωγο $f'(z)$. Δικαιολογήστε την απάντησή σας. (Μον. 1)