27 Μαΐου 2010

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ**
**ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ**
**ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ**
**ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ & ΔΙΚΤΥΩΝ**

# ΤΕΣΤ ΠΡΟΟΔΟΥ στο ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΛΟΓΙΣΜΟ ΙΙ

## ΘΕΜΑΤΑ

**ΘΕΜΑ 1** Να βρεθεί εντός τριγώνου ΑΒΓ (γνωστές οι πλευρές α,β,γ) σημείο τέτοιο ώστε το γινόμενο των αποστάσεων του από τις τρεις πλευρές του τριγώνου να είναι μέγιστο. **( 1.5 Μ)**

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ( Ενδεικτική Λύση)**
Αν Κ το ζητούμενο σημείο και x,y,z οι αποστάσεις του Κ από τις πλευρές α,β,γ αντίστοιχα του τριγώνου θέλω να βρω το μέγιστο για τη συνάρτηση W=xyz. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι το άθροισμα των εμβαδών των τριγώνων (ΒΚΓ)= ½ αx , (ΑΚΓ)= ½ βy , (ΑΚΒ)= ½ γz. Άρα Ε= ½ αx + ½ βy + ½ γz. Λύνοντας ως προς z θα έχουμε: z = 1/γ (2 Ε –αx – βy). Θέτοντας την τιμή του z στην W θα πάρουμε τη σχέση $W= 1/\gamma(2Exy - \alpha x^2y - \beta xy^2)$. Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τη μεθοδολογία ακροτάτων για συνάρτηση 2 μεταβλητών και βρίσκουμε τελικά X =2E/3 α , y=2E/ 3β , z= 2E/ 3γ.

**ΘΕΜΑ 2** Να βρεθεί η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου και της καθέτου ευθείας της επιφάνειας $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 6$ , στο σημείο P(1,1,1). **( 0,75 Μ)**

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ( Ενδεικτική Λύση)**

Έστω η $f(x,y,z)= 2x^2 + 3y^2 + z^2 -6 = 0$. Έχω $f_x=4x$ , $f_y=6y$, $f_z=2z$. Οι τιμές αυτών στο σημείο P(1,1,1) είναι 4,6,2. Με βάση λοιπόν τον τύπο η εξίσωση θα είναι 2x+3y+z-6=0. Όμοια από τον τύπο για την εξίσωση της καθέτου ευθείας θα έχουμε

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-1}{2}$$

**ΘΕΜΑ 3**. Να υπολογιστεί το έργο της δύναμης $\vec{F}(y,-x)$ όταν το σημείο εφαρμογής της διαγράφει από το σημείο Α(α,0) προς το σημείο Β(0,α) ολόκληρο τον κύκλο $x^2 + y^2 = \alpha^2$. ( Βοήθεια: Το έργο δίνεται από τον τύπο W= F * dr) **(1.25 Μ)**

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ( Ενδεικτική Λύση)**
Το έργο δύναμης δίνεται από το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_c \vec{F}d\vec{r} = \int_c ydx - xdy$. Η καμπύλη c είναι ο κύκλος $x^2 + y^2 = \alpha^2$. Παραμετρικοποιώ την καμπύλη c και έχω x=α συνt και y= αημt, και dx= -αημt dt , dy= ασυνt dt , t[ 0,2π]. Αντικαθιστώ στον τύπο του επικαμπύλιου ολοκληρώματος και έχω $I= -2\pi\alpha^2$.

**ΘΕΜΑ 4**. **α)** Έστω z = f( $x^2$ y) , όπου f δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι: $x\frac{\partial z}{\partial x} = 2y\frac{\partial z}{\partial y}$ **( 0,75 Μ)**

**β)** Αν η συνάρτηση W= f (x +y, x -y) , έχει συνεχείς μερικές παραγώγους ως προς το u =x +y και το v = x -y , δείξτε ότι: $\frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial W}{\partial y} = (\frac{\partial f}{\partial u})^2 - (\frac{\partial f}{\partial v})^2$ **( 0,75 Μ)**

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ ( Ενδεικτική Λύση)**

**a)** Η z είναι σύνθετη συνάρτηση άρα $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} * (x^2 y)_x = \frac{\partial f}{\partial x} * 2xy$ , όμοια $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} * (x^2 y)_y = \frac{\partial f}{\partial y} * x^2$ .'άρα αποδείχθηκε.

b) Η W είναι πεπλεγμένη συνάρτηση και για αυτό θέτω x+y=u και x-y=v.
Η λύση δόθηκε στις φροντιστηριακές ασκήσεις του μαθήματος.

**ΘΕΜΑ 5.** Να βρεθούν οι $\sqrt{2i}$ και οι $\sqrt[3]{-1}$. ( **0.5+0.5 Μ**)

**<u>ΑΠΑΝΤΗΣΗ</u> ( Ενδεικτική Λύση)**

α) Γράφουμε τον $2i = 2(\cos w + i\sin w)$, όπου $\cos w = 0,\ \sin w = 1$ με $0 \le w < 2\pi$ .
Άρα $w = \frac{\pi}{2}$ και επομένως $2i = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$ .
Οι τετραγωνικές ρίζες του 2i δίνονται από το τύπο

$$\sqrt[n]{z} = |z|\left(\cos\frac{w+2k\pi}{n} + i\sin\frac{w+2k\pi}{n}\right),\ k = 0,1,2...,n-1$$

Άρα για $z = 2i, n = 2, w = \frac{\pi}{2}$ , έχουμε τις επόμενες δυο ρίζες:

$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + i$, δηλ είναι το σημείο (1,1)

$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1 - i$, δηλ είναι το σημείο (-1,-1)

**β)** $-1 = -1 + 0i = \cos w + i\sin w$, όπου $\cos w = -1, \sin w = 0$ , $0 \le w < 2\pi$ , άρα $w = \pi$ .
Και οι κυβικές ρίζες της μονάδας είναι (σύμφωνα με το παραπάνω τύπο)

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ z_2 = \cos\pi + i\sin\pi = -1 \\ z_3 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \text{πρόκειται για κορυφές ισόπλευρου τριγώνου}$$

**ΘΕΜΑ 6**. **α)** Να υπολογισθεί ο $\log(1-i)$ και ο $\log(-ie)$. ( **0.5+0.5 Μ**)

**β)** Ποιοι είναι οι μιγαδικοί αριθμοί $(1-i)^i$ και $i^i$ ; (**0.5+0.5 Μ**)

<u>**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**</u> **( Ενδεικτική Λύση)**

**α)** Γράφουμε τον $1-i=|1-i|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ σε τριγωνομετρική μορφή όπου $|1-i|=\sqrt{2}$ και $\varphi=\frac{5\pi}{4}$, επειδή $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}, \sin\varphi=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ και $0\leq\varphi\prec 2\pi$. Άρα

$$\log(1-i)=\log|1-i|+i\arg(1-i)=\log(\sqrt{2})+i\frac{5\pi}{4}.$$

Όμοια, $\log(-ie)=\log|-ie|+i\arg(-ie)=\log|e|+i\frac{3\pi}{2}=1+i\frac{3\pi}{2}$.

**β) )** Ισχύει $z^w=e^{w\log z}$.

Επομένως $(i-i)^i=e^{i\log(1-i)}$ και $\log(1-i)=\log|1-i|+i\arg(1-i)=\log(\sqrt{2})+i\frac{7\pi}{4}$, αφού $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}, \sin\varphi=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, άρα $\varphi=\frac{7\pi}{4}$ =arg(1-i).

Όμοια, $i^i=e^{i\log(i)}$ και $\log(i)=\log(|\,i\,|)+i\arg(i)=i\frac{\pi}{2}$.

**ΘΕΜΑ 7**. **α)** Να υπολογισθούν τα $\lim_{z\to\pi}(e^{iz}+2\cos z-3\sin z)$ και $\lim_{z\to 2}\frac{z}{(z-3)(z-2)}$ ;

(**0.5+0.5 Μ** )

**β)** Δείξτε ότι οι συναρτήσεις $e^z$ και $\sin z$ είναι ολόμορφες (αναλυτικές) (**0.5+0.5 Μ** )

<u>**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**</u> **( Ενδεικτική Λύση)**

**α)** $\lim_{z\to\pi}(e^{iz}+2\cos z-3\sin z)=e^{i\pi}+2\cos\pi$.

Επειδή ο όρος $(z-3)(z-2)$ μηδενίζεται στο z=2 παρατηρούμε ότι το όριο $\lim_{z\to 2}\frac{(z-3)(z-2)}{z}=0$, οπότε (ιδιότητα) $\lim_{z\to 2}\frac{z}{(z-3)(z-2)}=\infty$.

**β)** Επειδή $e^z=\cos\varphi+i\sin\varphi$ και $\cos\varphi, \sin\varphi$ είναι ολόμορφες συναρτήσεις τότε και η $e^z$ είναι ολόμορφη (σαν άθροισμα ολόμορφων).

Αν $z=x+iy$ τότε

$\sin z=\sin(x+iy)=\sin x\cos(iy)+\cos x\sin(iy)=\sin x\cosh(y)+i\cos x\sinh(y)$, όπου $\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ και $\sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ (όμοια αποτελέσματα αν θέσουμε όπου $x=z,\ z\in\mathbb{C}$).

Άρα και η συνάρτηση sinz είναι ολόμορφη, αφού το πραγματικό της μέρος $\sin x\cdot\cosh(y)$ και το φανταστικό της μέρος $\cos x\cdot\sinh(y)$ είναι ολόμορφες συναρτήσεις.

---------------------------------------------------------------------------------------------