

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ευθείες και επίπεδα. Μερικές Παράγωγοι.

1. Βρείτε ένα επίπεδο που να διέρχεται από τα σημεία $P_1(1, 2, 3)$ και $P_2(3, 2, 1)$ και είναι παράλληλο προς το επίπεδο $4x - y + 2z = 7$.
2. Να βρείτε τη γωνία των επιπέδων $5x + y - z = 10$ και $x - 2y + 3z = -1$.
3. Δείξτε ότι τρία σημεία A, B, C είναι συνευθειακά αν και μόνο αν $AB \times AC = 0$.
4. Βρείτε την απόσταση της αρχής των αξόνων από το επίπεδο που διέρχεται δια του σημείου $P_0(4, 2, 1)$ κάθετα στο διάνυσμα $N(6, -2, 3)$.
5. Δείξτε ότι η συνάρτηση $z = x \cos(y/x) + \tan(y/x)$ ικανοποιεί τη σχέση
$$x^2 \partial_{xx} z + 2xy \partial_{xy} z + y^2 \partial_{yy} z = 0$$
6. Δείξτε ότι η παράσταση $(x + e^{x/y})dx + e^{x/y}(1 - \frac{x}{y})dy$ είναι τέλειο διαφορικό και βρείτε μια συνάρτηση f τέτοια ώστε $df = (x + e^{x/y})dx + e^{x/y}(1 - \frac{x}{y})dy$ (η f λέγεται συνάρτηση δυναμικού).
7. Αν $u = F(\sin x - \sin y)$, όπου F συνεχής και διαφορίσιμη συνάρτηση, δείξτε ότι $\partial_y u \cos x + \partial_x u \cos y = 0$.
8. Βρείτε το μοναδιαία διανύσματα T, N , και B (εφαπτόμενο, κάθετο και καθετο στο επίπεδο των πρώτων δύο) της καμπύλης $r(t) = e^t \cos t i + e^t \sin t j + e^t k$

9. i) Να βρεθεί το εφαπτόμενο διάνυσμα και η κάθετος ευθεία της καμπύλης:

$$x(t) = t - \cos t, \quad y(t) = 3 + \sin(2t) \quad \text{και} \quad z(t) = 1 + \cos(3t) \quad \text{στο σημείο} \quad t = \frac{\pi}{2}.$$

ii) Να βρεθεί η εξίσωση του καθέτου επιπέδου στην καμπύλη που ορίστηκε στο (i) στο ίδιο σημείο.

iii) Να βρεθεί η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της επιφάνειας $z = \tan^{-1} \frac{y}{x}$ στο

σημείο $P\left(1, 1, \frac{\pi}{4}\right)$.

10. Η θερμοκρασία σε κάθε σημείο μιας μεταλλικής πλάκας δίνεται από τη συνάρτηση $T(x,y) = \cos y e^x + \cos x e^y$. Προς ποια κατεύθυνση αυξάνεται ταχύτερα η θερμοκρασία στο σημείο $(0,0)$ και προς ποια ελαττώνεται περισσότερο;