

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται η διανυσματική συνάρτηση

$$F = (3x^2y - 4yz)i + (x^3 - 4xz + 2y)j + (-4xy - 2z)k.$$

i) Είναι το διανυσματικό πεδίο  $F$  συντηρητικό;

ii) Να υπολογιστεί το έργο που παράγεται από τη δύναμη  $F$  κατά μήκος τόξου του ελλειμοειδούς  $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$  από το σημείο  $A(0,0,1)$  ως το  $B(2,-2,0)$ .

2. Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της  $f(x, y, z) = x - z$  κατά μήκος

της έλικας  $r(t) = \cos t i + \sin t j + t k$ ,  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ .

3. Βρείτε μια συνάρτηση  $f$  τέτοια ώστε η συνάρτηση

$$F(x, y, z) = i y \sin z + j x \sin z + k xy \cos z$$

να είναι ένα πεδίο κλίσεων.

4. Εφαρμόστε το Θεώρημα του Green για να βρείτε το εμβαδόν μεταξύ της έλλειψης  $x = 3 \cos t$ ,  $y = 2 \sin t$  και του κύκλου  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ .

5. i) Να βρεθεί το εφαπτόμενο διάνυσμα και το κάθετο σε αυτό της καμπύλης

$r(t) = 3 \cosh(2t)i + 3 \sinh(2t)j + 6t k$ . Ποιο είναι το μήκος της καμπύλης από το σημείο  $t = 0$  ως το σημείο  $t = \pi$ .

ii) Να βρεθεί η γωνία των επιπέδων  $5x + y - z = 10$  και  $x - 2y + 3z = -1$ .

6. i) Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι  $z_x$  και  $z_{xy}$  της συνάρτησης  $z = z(x, y)$  που

ορίζεται από τη σχέση  $e^{-z} + xy + x + z = 5$ .

ii) Ποια είναι η παράγωγος της  $f(x, y, z) = x y z$  στη διεύθυνση του διανύσματος

της ταχύτητας της καμπύλης  $r(t) = \cos(3t)i + \sin(3t)j + 3t k$ , στο σημείο  $t = \frac{\pi}{3}$ .

7. Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης  $f(x, y) = \frac{1}{1-x^2-y^2}$  πάνω από τον κυκλικό δίσκο  $x^2 + y^2 \leq 3/4$ .

8. Γραψτε τα επόμενα ολοκληρώματα με ανεστραμμένη σειρά ολοκλήρωσης

$$\alpha) \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \cos(x+y) dy dx, \quad \beta) \int_{-2}^1 \int_{x^2+4x}^{3x+2} dy dx, \quad \gamma) \int_0^1 \int_y^1 x^2 e^{xy} dy dx.$$

(βρείτε τη περιοχή  $R$ )

9. Βρείτε τον όγκο του στερεού που έχει βάση στο επίπεδο  $xy$  και που ορίζεται από τη παραβολή  $y = 4 - x^2$  και την ευθεία  $y = 3x$ , ενώ η κορυφή του ορίζεται από το επίπεδο  $z = x + 4$ .