

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Διπλά και Επικαμπύλια ολοκληρώματα

1. Για ποια τιμή του  $a \in \mathbb{R}$ , η παράσταση  $(x^2 + axy^2)dx + (y^2 - x^2y)dy$  είναι ολικό διαφορικό μιας συνάρτησης; Για την τιμή αυτή να βρεθεί η αντίστοιχη συνάρτηση.

2. Να υπολογιστεί τα διπλά ολοκληρώματα

$$\alpha) \int_0^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{4-2y^2}}^{\sqrt{4-2y^2}} y \, dx dy \qquad \beta) \int_0^1 \int_{2\sqrt{x}}^2 \frac{12\sqrt{4-y^2}}{y} dy dx$$

με ανεστραμμένη σειρά ολοκλήρωσης.

3. i) Να βρεθεί το έργο που παράγεται από τη δύναμη  $F = 3x(x-1)\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$  όταν αυτή ασκείται σ' ένα σώμα που μετακινείται υπό την επίδραση της από το σημείο  $A(0,0,0)$  ως το σημείο  $B(1,1,1)$  κατά μήκος της ευθείας  $x = y = z$ .

ii) Είναι το πεδίο δυνάμεων  $F$  αστρόβιλο; Ποια είναι η απόκλιση του στροβιλισμού της  $F$ ;

4. Να βρεθεί η ροή του πεδίου  $G = 2x\vec{i} - 3y\vec{j}$  διαμέσου της έλλειψης  $x = 3\cos t$ ,  $y = \sin t$ .

5. Είναι το πεδίο δυνάμεων  $F = y \sin z \vec{i} + x \sin z \vec{j} + xy \cos z \vec{k}$  ένα πεδίο κλίσης; Αν ναι ποιας συνάρτησης  $f$ ; Να βρεθεί το έργο που παράγεται από την  $F$  κατά μήκος της ευθείας που συνδέει τα σημεία  $A\left(1, 1, \frac{\pi}{4}\right)$  και  $B\left(1, 2, \frac{\pi}{2}\right)$ .

6. Να βρεθεί η πρώτη ροπή  $M_x = \iint y \, dR$ , για τη περιοχή  $R$  που βρίσκεται κάτω από τον άξονα  $xx'$  και μέσα στο καρδιοειδές  $r = 1 - \cos \theta$ .

7. Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα  $I = \int_c \frac{x^2 dx + y^2 dy}{x^2 + y^2}$  κατά μήκος της περιφέρειας του κύκλου  $x^2 + y^2 - 6x = 0$ .

8. Να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα  $\oint_c 3dx + x^2 e^{(y-2)^3} dy$  κατά τη θετική φορά γραφής της καμπύλης  $c$  που περικλείει την περιοχή  $R: \{ (x,y): x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 2 \}$ , με τη βοήθεια του θεωρήματος του Green.

9. Αν  $R$  η περιοχή στο  $1^o$  τεταρτημόριο που περικλείεται από τις γραμμές  $x = y$  και  $y = x^2$  και  $c$  είναι το σύνορο της  $R$ , εφαρμόστε το Θεώρημα Green για τον υπολογισμό του  $\oint_c xy dx + y^2 dy$ .

10. Να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα  $I = \oint_c (6y + x)dx + (y + 2x)dy$  όπου  $c: (x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$ , επαληθεύοντας το Θεώρημα του Green.