Γιάννης Χατζάρας, διδάσκων στο Παν/μιο Θεσσαλίας

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΟΡΙΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Ορισμός : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$ αν και μόνο αν $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$: για κάθε $\lvert x-x_0\rvert<\delta$ να ισχύει $\lvert f(x)-\ell\rvert<\varepsilon$	**Παρατηρήσεις**	**Παράδειγμα**
	α) Το ε είναι πολύ μικρό β) Το δ εξαρτάται από το ε γ) $\lvert f(x)-\ell\rvert<\varepsilon \Leftrightarrow f(x)\in(\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon)$ δ) $\lvert x-x_0\rvert<\delta \Leftrightarrow x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$	Είναι $\lim_{x\to1} 3x-2 =1$ γιατί αν $\lvert 3x-2 -1\rvert<\varepsilon \Leftrightarrow \lvert 3\ x-1\rvert<\varepsilon$ $\Leftrightarrow \lvert x-1\rvert<\frac{\varepsilon}{3}=\delta$, δηλαδή υπάρχει $\frac{\varepsilon}{3}=\delta$ για την ισχύ του ορισμού.
ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΙΩΝ	**Παρατηρήσεις**	**Παράδειγμα**
Έστω $\lim_{x\to x_0} f_1(x)=\ell_1$ & $\lim_{x\to x_0} f_2(x)=\ell_2$ τότε ισχύουν:		
1. $\lim_{x\to x_0} f_1(x)+f_2(x) =\ell_1+\ell_2$	Ισχύει και για πρόσθεση n-συναρτήσεων	$\lim\limits_{x\to x_0} \sin x+\ln x =\lim\limits_{x\to x_0}\sin x+\lim\limits_{x\to x_0}\ln x$
2. $\lim_{x\to x_0} f_1(x)-f_2(x) =\ell_1-\ell_2$	Ισχύει και για αφαίρεση n-συναρτήσεων	$\lim\limits_{x\to x_0}\left[\tan x-e^x\right]=\lim\limits_{x\to x_0}\tan x-\lim\limits_{x\to x_0}e^x$
3. $\lim\limits_{x\to x_0}[f_1(x)\,f_2(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f_1(x)\,\lim\limits_{x\to x_0}f_2(x)=\ell_1\ell_2$	Ισχύει και για το γινόμενο n-συναρτήσεων	$\lim\limits_{x\to x_0}\left[x^3\cos^2 x\right]=\lim\limits_{x\to x_0}x^2\ \lim\limits_{x\to x_0}\cos^2 x$
3(α). $\lim_{x\to x_0} kf_1(x) =k\ell_1$, για κάθε $k\in R$		$\lim\limits_{x\to x_0}\left[\sqrt{3}\cos x\right]=\sqrt{3}\ \lim\limits_{x\to x_0}\cos x$
3(β). $\lim\limits_{x\to x_0} f^n(x)= \lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{\ n}$ **,** $n\in N$	Προϋπόθεση $f(x)\ge0$ τότε και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\ge0$	$\lim\limits_{x\to x_0} x^5=(\lim\limits_{x\to x_0} x)^5$
4. $\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right]=\frac{\ell_1}{\ell_2}$	Προϋπόθεση το $\ell_2\ne0$	$\lim\limits_{x\to\pi/4}\left[\frac{\sin x}{\cos x}\right]=\frac{\lim\limits_{x\to\pi/4}\sin x}{\lim\limits_{x\to\pi/4}\cos x}=\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{\sqrt2}{2}}{\frac{\sqrt2}{2}}=1$
5. $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}$, $n\in N^*$	Προϋπόθεση ότι η ρίζα ορίζεται όταν n=άρτιος	$\lim\limits_{x\to5}\sqrt[3]{x^2-3x+5}=\sqrt[3]{\lim\limits_{x\to5}(x^2-3x+5)}$
6. $\lim\limits_{x\to x_0}a^{f(x)}=a^{\lim_{x\to x_0} f(x)}$, $a>0$		$\lim\limits_{x\to0}e^{3x-x^2} =e^{\lim_{x\to0}3x-x^2}$
Ορισμός: $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\ell$ αν και μόνο αν $\forall\varepsilon>0,\exists M>0:\forall x>M\Rightarrow\lvert f(x)-\ell\rvert<\varepsilon$	α) Το M εξαρτάται από το ε και θεωρούμε το Μ πολύ μεγάλο πραγματικό αριθμό. β) Οι **ιδιότητες** είναι **ίδιες** με τις ιδιότητες ορίου σε σημείο.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$, γιατί $\left\lvert\frac1x-0\right\rvert<\varepsilon\Leftrightarrow\left\lvert\frac1x\right\rvert<\varepsilon\overset{x>0}{\Leftrightarrow}x>\frac1\varepsilon=M$
	Βγάζω κοινό παράγοντα από αριθμητή την μέγιστη δύναμη του x, όμοια και στο παρονομαστή	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-5x+6}{3x^2-2x+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2(1-5\frac1x+6\frac{1}{x^2})}{x^2(3-2\frac1x+2\frac{1}{x^2})}=\frac13$
	Πολλαπλασιασμός με συζυγή παράσταση	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}$
	Βγάζουμε κοινό παράγοντα το x (παντού) ή	$\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x+1}-ax =\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\left(\sqrt{1+\frac1x+\frac{1}{x^2}}-a\right)\right)$
	μπορούμε να προσθέσουμε και να αφαιρέσουμε το x	$\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x+1}-ax =\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x+1}-x - ax-x$
Πλευρικά όρια Το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\ell$ υπάρχει αν $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\ell=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\ell$	Πλευρικά όρια για τον υπολογισμό ορίων συναρτήσεων, που δίνονται με περισσότερους του ενός τύπους, όπως αυτές που περιέχουν απόλυτες τιμές.	$f(x)=\frac{2x+\lvert x-1\rvert}{1-\lvert x\rvert}=\begin{cases}\frac{3x-1}{1-x}, & x>1\\ \frac{x+1}{1-x}, & 0\le x<1\\ \frac{x+1}{1+x}=1, & x<0\end{cases}$
Ορισμός: Αν $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ τότε η f λέγεται **συνεχής** στο x_0.	Εκθετικές-Λογαριθμικές, όπως και άθροισμα, γινόμενο, πηλίκο, σύνθεση συνεχών είναι συνεχής συνάρτηση.	$\lim\limits_{x\to x_0} \sin x =\sin x_0$, $\lim\limits_{x\to x_0} \ln x =\ln x_0$, $\lim\limits_{x\to x_0}a^x =a^{x_0}$

Γιάννης Χατζάρας, διδάσκων στο Παν/μιο Θεσσαλίας

<u>ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ</u>

<u>**Ορισμός**</u> : Αν υπάρχει το όριο $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)=\frac{df}{dx}(x_0)$, η f λέγεται **παραγωγίσιμη** στο x_0.	**Παρατηρήσεις**	**Παράδειγμα**
	$f'(x_0)$ είναι πραγματικός αριθμός	Αν $f(x)=x$ τότε $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{x-x_0}=1$
ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ	**Παρατηρήσεις**	**Παράδειγμα**
f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις		
1. $[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$	Ισχύει και για το άθροισμα n-συναρτήσεων	
2. $(f\,g)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$	Ισχύει και για το γινόμενο n-συναρτήσεων	
2(a) $(k\,f)'(x)=k\,f'(x)$, $k\in R$		
2(b) $(f^n(x))'=n\,f^{n-1}(x)\,f'(x)$, $n\in R$		$(x^n)'=n\,x^{n-1}$
3. $(\frac{f}{g})'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$		$(\tan x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$
4. $(\sin x)'=\cos x$ και $(\cos x)'=-\sin x$		$(\cot x)'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{-1}{\sin^2 x}$
5. $f\circ g\,'(x)=f'(g(x))\,g'(x)$	Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης	$\sin(x^2-2x)\,'=\cos(x^2-2x)(x^2-2x)'=\cos(x^2-2x)(2x-2)$
6. $e^{f(x)}\,'=e^{f(x)}\,f'(x)$	σύνθετη συνάρτηση	$e^x\,'=e^x$
7. $\sqrt[k]{f(x)}\,'=\left(f(x)^{\frac{1}{k}}\right)'=\frac{f'(x)}{k\sqrt[k]{f^{k-1}(x)}}$	Όταν το ριζικό ορίζεται. (σύνθετη συνάρτηση)	$\sqrt{f(x)}\,'=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$, $\sqrt{x}\,'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
8. $\ln f(x)\,'=\frac{f'(x)}{f(x)}$	σύνθετη συνάρτηση	$(\ln x)'=\frac{1}{x}$, $(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a e$, $a>0$
9. $f^{-1}\,'(f(x_0))=\frac{1}{f'(x_0)}$	Παράγωγος αντίστροφης (όταν υπάρχει) συνάρτησης	
10. $\sin^{-1}(f(x))\,'=\frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$	σύνθετη συνάρτηση	$\sin^{-1}(x)\,'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11. $\cos^{-1}(f(x))\,'=\frac{-f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$	σύνθετη συνάρτηση	$\cos^{-1}(x)\,'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
12. $\tan^{-1}(f(x))\,'=\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}$	σύνθετη συνάρτηση	$\tan^{-1}x\,'=\frac{1}{1+x^2}$
13. $\cot^{-1}(f(x))\,'=\frac{-f'(x)}{1+f^2(x)}$	σύνθετη συνάρτηση	$\cot^{-1}x\,'=\frac{-1}{1+x^2}$
14. $\sinh x\,'=\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)'=\cosh x$	Sinhx=υπερβολικό ημίτονο	
15. $\cosh x\,'=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)'=\sinh x$	Coshx= υπερβολικό συνημίτονο	
16. $x^x\,'=x^x(\ln x+1)$	Γράφουμε $x^x=e^{knx^x}=e^{x\ln x}$	$x^{f(x)}\,'=x^{f(x)}(f'(x)\ln x+f(x)\frac{1}{x})$, για οποιαδήποτε συνάρτηση f.