<u>Σχέσεις</u>

<u>Ορισμός</u>. Έστω A ένα μη κενό σύνολο. Ονομάζουμε **σχέση R στο A**, κάθε υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου $A\times A$, δηλαδή $R\subseteq A\times A$ (η R είναι ένα σύνολο διατεταγμένων ζευγών). Όταν δύο στοιχεία α και b του συνόλου A σχετίζονται μέσω μιας σχέσης R γράφουμε aRb και εννοούμε ότι $(a,b)\in A\times A$.

<u>Ορισμός</u>. Μια σχέση R στο σύνολο A θα λέγεται **σχέση ισοδυναμίας** στο A, αν ικανοποιεί τις επόμενες ιδιότητες:

i) R **ανακλαστική** (ή αυτοπαθής) $\Leftrightarrow$ $\forall\, \alpha \in A$ $(\alpha, \alpha) \in R$
ii) R **συμμετρική** $\Leftrightarrow$ ($(\alpha, \beta) \in R \Rightarrow (\beta, \alpha) \in R$)
iii) R **μεταβατική** $\Leftrightarrow$ (αν $(\alpha, \beta) \in R$ και $(\beta, c) \in R \Rightarrow (\alpha, c) \in R$)

Αν R είναι σχέση ισοδυναμίας στο A τότε η συλλογή $\{b\in A \mid aRb\}$ λέγεται **κλάση του στοιχείου α** και συμβολίζεται με $[\alpha]$, δηλαδή $[\alpha]=\{b\in A \mid aRb\}$.

<u>Παράδειγμα 1</u>. Έστω R εκείνη η γνωστή σχέση «$\leq$» στο σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών, δηλαδή $(a,b)\in "\leq" \Leftrightarrow a\leq b$. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι πρόκειται για μια σχέση ισοδυναμίας.

<u>Παράδειγμα 2</u>. Ορίζουμε στο σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων μια σχέση: R ως εξής:

$$\alpha Rb \Leftrightarrow 3|a-b \;\; (3 \text{ διαιρεί το } a-b) \qquad (1)$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με το « οι ακέραιοι a και b διαιρούμενοι με το 3 αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο».
Ισχύει λοιπόν $\alpha Rb \Leftrightarrow a-b=3k \Leftrightarrow b=3k+a$ $\forall\, a,b \in \mathbb{Z}$ και επιπλέον:

i) $3|a-a=0$, άρα η ανακλαστική ισχύει
ii) αν $3|a-b \Rightarrow 3|-(a-b) \Rightarrow 3|b-a \Rightarrow bRa$, ισχύει η συμμετρική ιδιότητα
iii) αν $\alpha Rb,\ bRc \Rightarrow \left.\begin{matrix} 3\mid a-b \\ 3\mid b-c \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3\mid (a-b)+(b-c) \Rightarrow 3\mid a-c$, ισχύει η μεταβατική ιδιότητα

επομένως η παραπάνω σχέση είναι μια σχέση ισοδυναμίας.

Η κλάση του τυχαίου $a \in \mathbb{Z}$ αποτελείται από

$$[a]=\{ x \in \mathbb{Z} \ / \ x=3k+a,\ k \in \mathbb{Z} \}$$

ή ισοδύναμα από όλους εκείνους τους ακέραιους οι οποίοι διαιρούμενοι με το 3 αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο που αφήνει και ο α όταν διαιρεθεί με το 3. επειδή ως γνωστό τα δυνατά υπόλοιπα της διαίρεσης ενός ακεραίου με το 3 είναι ή 0, ή 1, ή 2 προκύπτει ότι οι μοναδικές κλάσεις ισοδυναμίας (ως προς τη σχέση ισοδυναμίας (1)) είναι οι

$[0]=\{x / x=3k, k \in \mathbb{Z}\}$, όλοι οι ακέραιοι που διαιρούνται ακριβώς με το 3

$[1]=\{x / x=3k+1, k \in \mathbb{Z}\}$, όλοι οι ακέραιοι που διαιρούμενοι με 3 δίνουν υπόλοιπο 1

$[2]=\{x / x=3k+2, k \in \mathbb{Z}\}$, όλοι οι ακέραιοι που διαιρούμενοι με 3 δίνουν υπόλοιπο 2

<u>Παρατήρηση</u>. Έστω R = μια σχέση ισοδυναμίας στο A και $[\alpha]$, $[b]$, δύο κλάσεις ισοδυναμίας. Τότε θα συμβαίνει ή $[\alpha]=[b]$, ή δεν θα έχουν κανένα κοινό στοιχείο μεταξύ τους. (βλέπε και παράδειγμα 2).

Πραγματικά, αν $x \in$ Α και x είναι ένα κοινό στοιχείο των [α], [b], τότε αRx και xRb απ' όπου (λόγω της μεταβατικής ιδιότητας) αRb αλλά και $bR\alpha$. Επομένως δηλ.$[\alpha] \subseteq \leq [b]$ και $[b] \subseteq [\alpha]$ και τελικά $[\alpha]=[b]$. Δηλαδή όταν δύο κλάσεις έχουν ένα κοινό στοιχείο αναγκαστικά ταυτίζονται. Διαφορετικά είναι ξένες μεταξύ τους.

Δείτε την επιβεβαίωση στο παράδειγμα 2 (παραπάνω). Δεν μπορούν π.χ. οι κλάσεις [1] και [2] να είναι ίσες γιατί για τους αριθμούς π.χ. 7 και -16 ισχύει : $7=2 \bullet 3+1$ και $-16=3(-6)+2$ οπότε $7 \in [1]$ και $-16 \in [2]$, δηλαδή υπάρχουν αριθμοί οι οποίοι δεν μπορούν να ανήκουν ταυτόχρονα στην ίδια κλάση ισοδυναμίας (το οποίο θα συνέβαινε μόνο αν άφηναν το ίδιο υπόλοιπο στη διαίρεσή τους με το 3).

<u>Ορισμός</u>. Μια σχέση R στο μη κενό σύνολο A θα λέγεται **σχέση διάταξης** αν ικανοποιεί τις επόμενες ιδιότητες:

i) $\forall$ x $\in$ A, (α, α) $\notin R$, (αντανακλαστική ιδιότητα)

ii) $(x, y) \in R$ και $(y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$ (μεταβατική ιδιότητα)

Έτσι, αν R είναι μια σχέση διάταξης τότε $\forall (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \notin R$, γιατί αλλιώς θα έπρεπε $(x, x) \in R$ το οποίο αντιφάσκει στην ιδιότητα (i).

Συμβολίζουμε μια σχέση διάταξης με « < » αντί R. (δείτε γιατί στο επόμενο παράδειγμα) και το ζεύγος $\left(A,<\right)$ **διατεταγμένο σύνολο**.

<u>Παράδειγμα 1</u>. Η γνωστή διάταξη στους φυσικούς αριθμούς όπου για δύο διαφορετικούς αριθμούς $x, y \in \mathbb{N}$ ισχύει $x<y$ ή $y<x$ είναι μια σχέση διάταξης (προφανής απόδειξη).

<u>Παράδειγμα 2</u>. Η σχέση «$\subsetneq$» στο δυναμοσύνολο $P(A)$ ενός συνόλου A αποτελεί μια σχέση διάταξης στο $P(A)$.

<u>Ορισμός</u> : Αν « < » είναι μια σχέση διάταξης στο A και $x<y$ $x,y\in A$ τότε λέμε ότι το x είναι **προηγούμενο** του y και το y ότι είναι **επόμενο** του x .

<u>Ορισμός</u> : **i)** Έστω (A, <) ένα διατεταγμένο σύνολο και $x \in A$ Το x θα λέγεται **ελάχιστο** του A αν δεν είναι επόμενο κανενός στοιχείου του A, δηλαδή δεν υπάρχει $y\in A : y < x$.

ii) Το x θα λέγεται **μέγιστο** του A αν δεν είναι προηγούμενο κανενός στοιχείου του A, δηλαδή δεν υπάρχει $y\in A : x < y$.

iii) Το x θα λέγεται **πρώτο** του A αν είναι προηγούμενο όλων των στοιχείων του A, δηλαδή αν

$$\forall y\in A : x < y \quad \text{ή} \quad x=y$$

iv) Το x θα λέγεται **τελευταίο** του A αν είναι επόμενο όλων των στοιχείων του A δηλαδή

$$\forall y\in A : y < x \quad \text{ή} \quad x=y$$

<u>Παρατηρήσεις</u>. **α)** Κάθε πρώτο στοιχείο είναι και ελάχιστο στοιχείο.

β) Κάθε τελευταίο στοιχείο είναι και μέγιστο στοιχείο.

γ) Αν υπάρχει πρώτο ή τελευταίο στοιχείο στο A αυτό είναι και μοναδικό.

<u>Ορισμός</u>. Ένα διατεταγμένο σύνολο (Α, <) θα λέγεται **ολικά διατεταγμένο** (ή αλυσίδα) αν

$$\forall x \in A \ \forall y \in A : x=y \text{ ή } x<y \text{ ή } x>y$$

δηλαδή δύο οποιαδήποτε στοιχεία του A συνδέονται οπωσδήποτε με τη σχέση «<».

<u>Παράδειγμα</u> :Τα διατεταγμένα σύνολα ($\mathbb{N}$, <), ($\mathbb{Z}$, <), ($\mathbb{R}$,<) είναι ολικά διατεταγμένα σύνολα.

<u>Παρατήρηση</u> : 'Ενα ολικά διατεταγμένο σύνολο δεν μπορεί να έχει πολλά μέγιστα ή ελάχιστα στοιχεία. Αν έχει ελάχιστο, οφείλει να είναι και πρώτο και αν έχει μέγιστο στοιχείο αυτό οφείλει να είναι και τελευταίο. Μπορεί όμως ένα ολικά διατεταγμένο σύνολο να μην έχει ελάχιστο π.χ. το $(\alpha, b]$ $\alpha, b \in \mathbb{R}$ ή να μην έχει μέγιστο π.χ. το $[-1,3)$. Όμως μπορεί ένα σύνολο να μην ελάχιστο ή μέγιστο στοιχείο ,αλλά να έχει υποσύνολα τα οποία να έχουν.

<u>Ορισμός</u> : Ένα διατεταγμένο σύνολο (Α, <) θα λέγεται **καλά διατεταγμένο** αν κάθε μη κενό υποσύνολο του έχει ελάχιστο στοιχείο

<u>Παρατηρήσεις</u> :

- Και κάθε υποσύνολο ενός καλά διατεταγμένου συνόλου θα είναι καλά διατεταγμένο.
- Κάθε καλά διατεταγμένο είναι και ολικά διατεταγμένο σύνολο (αφού για $x,y \in A$ το $\{x, y\} \subset A$ οπότε ή $x<y$ ή $y<x$).