<u>Άλγεβρες Heyting και Boole</u>

***<u>Ορισμός</u>* <u>1</u>**. Έστω (L , $\leq$) ένα φραγμένο δικτυωτό. Αν για κάθε a, $b \in L$ υπάρχει μέγιστο στοιχείο c τέτοιο ώστε $a \wedge c \leq b$ τότε το δικτυωτό L λέγεται **άλγεβρα Heyting**.

Ορίζουμε το στοιχείο

$$a \to b \ = \vee\{\mathrm{x} \,/\, \mathrm{a} \wedge \mathrm{x} \leq \mathrm{b}\}$$

Αν 0 συμβολίζει το ελάχιστο στοιχείο του L , ορίζουμε

$$\neg a = \mathrm{a} \to 0 = \vee\{\mathrm{x} \,/\, \mathrm{a} \wedge \mathrm{x} \leq 0\}$$

***<u>Ορισμός</u>* <u>2</u>**. Αν για κάθε στοιχείο a μιας άλγεβρας Heyting L ισχύει:

$$\neg\neg a = a$$

τότε η άλγεβρα Heyting L λέγεται **άλγεβρα Boole**.

<u>Παράδειγμα 1</u>. Η άλγεβρα **2**=$\{0,1\}$ με δύο στοιχεία 0, 1 και $0 \leq 1$, είναι άλγεβρα Boole

Απάντηση. Πράγματι, η **2** είναι δικτυωτό και υπάρχουν τα στοιχεία

$0 \to 1 = \vee\{\, x \,/\, 0 \wedge x \leq 1\} = \vee\{0 ,1\} =1$

$0 \to 0= \vee\{\, x \,/\, 0 \wedge x \leq 0\} = \vee\{0 ,1\} =1$

$1 \to 1= \vee\{\, x \,/\, x \wedge 1 \leq 1\} = \vee\{1\} =1$

$1 \to 0= \vee\{\, \mathrm{x} \,/\, \mathrm{x} \wedge 1 \leq 0\} = \vee\{0 \} =0$

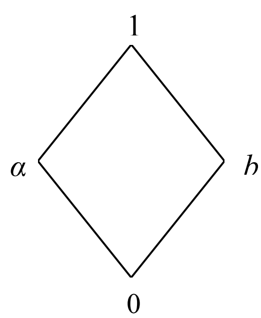
Επίσης

$\neg\ 0= 0 \to 0 =1$ και $\neg\ \neg\ 0 = \neg\ 1 = 1 \to 0 =0$, οπότε $\neg\ \neg\ 0 = 0$

$\neg\ 1 = 1 \to 0 = 0$ και $\neg\ \neg\ 1 = \neg 0 = 0 \to 1 =1$, οπότε $\neg\ \neg 1 = 1$

<u>Παράδειγμα 2</u>. Να δείξετε ότι το δικτυωτό L=$\{0, 1, \alpha, b\}$ είναι μια άλγεβρα Boole.

Απάντηση. Είναι



$a \to 0 = \vee\{x \,/\, a \wedge x \leq 0\} = \ \vee\{0, b\} = b$

άρα $\neg\, a = b$, $\neg\, \neg\, a = \neg\, b = b \to 0 = \vee\{\, x \,/\, b \wedge x \leq 0 \ \} = \vee\{a\ , 0\} = \alpha,$

οπότε $\neg\, \neg\, a = a$.

Ανάλογα δείχνουμε ότι $\neg\, \neg\, b = b$

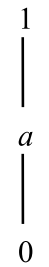
Ακόμη $\neg 1 = 1 \rightarrow 0 = \vee\{ x /\ x\wedge 1 \leq 0 \} = \vee\{ 0 \} = 0$ και

$\neg \neg 1 = \neg 0 = 0 \rightarrow 0 = \vee\{ x /\ x \wedge 0 \leq 0 \} = \vee\{a , b, 1\} = 1$, άρα $\neg \neg 1=1$

Επομένως, το δικτυωτό $\{ 0, a, b, 1\}$ είναι άλγεβρα Boole

<u>Παράδειγμα 3</u>. Να δείξετε ότι το $A=\{0, a, 1\}$ είναι ένα επιμεριστικό δικτυωτό αλλά δεν είναι άλγεβρα Boole.

Απάντηση



Το A είναι επιμεριστικό δικτυωτό αφού π.χ.

$a \vee (1 \wedge 0) = a\vee 0 = a$ και $(a \vee 1) \wedge (a \vee 0) = 1 \wedge a= a$.

Έχουμε ότι

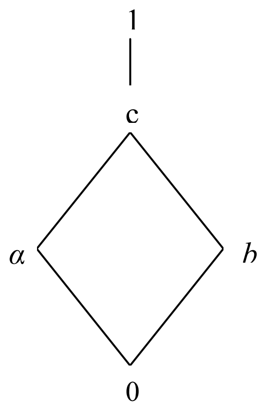
$a \rightarrow 0 = \vee\{ x /\ x \wedge\ x \leq o\} = \vee\{ 0\} = 0$, οπότε $\neg a = 0$

$\neg \neg a = \neg 0 =0\rightarrow 0 = \vee\{ x /\ x \wedge\ 0 \leq 0\} = \vee\{ a , 0 ,1\} = 1$

δηλαδή $\neg \neg a = 1 \neq a$, άρα το $\{0,a , 1\}$ δεν αποτελεί άλγεβρα Boole .

<u>Παράδειγμα 4</u>. Η διάταξη του διπλανού σχήματος αποτελεί άλγεβρα Heyting αλλά όχι Boole.

Απάντηση. Ελέγχουμε την ύπαρξη των στοιχείων $x \rightarrow y$.



Έχουμε για παράδειγμα:

$a \rightarrow b = \vee\{x / a \wedge x \leq b\} = \vee\{0\} = 0$

$b \rightarrow c = \vee\{x /\ x\wedge b \leq c\} = \vee\{a, b, c\} = c$

Δηλαδή αποτελεί άλγεβρα Heyting.

Αλλά ισχύει

$\neg c = c \rightarrow 0 = \vee\left\{x / c \wedge x \leq 0\right\} = 0$ και

$\neg\neg c = \neg 0 = \vee\left\{x / 0 \wedge x \leq 0\right\} = 1$, δηλαδή $\neg\neg c \neq c$,

το οποίο σημαίνει ότι η άλγεβρα του διπλανού σχήματος δεν είναι Boole.

<u>Ασκήσεις</u>

<u>Άσκηση 1</u>. Να δείξετε ότι για ένα σύνολο X το $\{\mathrm{P}(X)\ ,\ \cap\ ,\ \cup\}$ είναι άλγεβρα Heyting με $A \wedge B = A \cap B$ και $A \vee B = A \cup B$ και $\neg A = X - A$ (το συμπληρωματικό του A)

Απάντηση. Η επιμεριστική ιδιότητα της τομής ως προς την ένωση συνόλων (αλλά και της ένωσης ως προς τη τομή) ως γνωστό ισχύει.
Ακόμη για $A, B \subseteq X$ έχουμε

$A \to B = \vee\{\ C\ /\ A \wedge C \leq B\} = \vee\{\ C\ /\ A \cap C \subseteq B\} = B$, αφού $A \cap B \subseteq B$

$\neg A = A \to 0 = \vee\{\ B\ /\ A \cap B \subseteq \varnothing\ \} = X - A$ (αφού $A \cap B = \varnothing$, $B \subseteq \varnothing$)

$\neg\neg A = \neg(X\text{-}A) = A$, $\forall A \in \mathrm{P}(X)$, οπότε η άλγεβρα $\{\mathrm{P}(X)\ ,\ \cap\ ,\ \cup\}$ είναι άλγεβρα Boole.

<u>Άσκηση 2</u>. Δείξτε ότι σε μια άλγεβρα Heyting $a \leq b$ αν και μόνον αν $1 \leq a \to b$.

Απάντηση. Έστω ότι $a \leq b$ και θα δείξουμε ότι $1 \leq \mathrm{a} \to \mathrm{b}$.
Είναι

$$\mathrm{a} \to \mathrm{b} = \vee\{x\ /\ a \wedge x \leq b\} = \vee\{....,\ a\ ,\ b,\ 1\} = 1,$$

οπότε $1 \leq 1$ και ισχύει το ζητούμενο.

Αντίστροφα, έστω ότι ισχύει $1 \leq a \to b$. Θα δείξουμε τότε ότι $a \leq b$.
Έχουμε

$1 \leq a \to b = \vee\{x\ /\ a \wedge x \leq b\} = 1$, αφού 1= max της άλγεβρας. Δηλαδή

$1 = \{\ x\ /\ a \wedge x \leq b\}$, οπότε $a \wedge 1 \leq b$ απ' όπου προκύπτει $a \leq b$.

<u>Άσκηση 3</u>. Να δείξετε ότι σε μια άλγεβρα Heyting ισχύει πάντοτε $a = 1 \to a$.

Απάντηση. Ως γνωστό ισχύει

$$1 \to a = \{\ x\ /\ 1 \wedge x \leq a\} = \{x\ /\ x \leq a\ \},$$

οπότε

$$\vee\{x / x \le a\} = a \text{ και επομένως } 1 \to a = a$$

Άσκηση 4. Να δείξετε ότι σε μια άλγεβρα Heyting ισχύει $a \le b \to c$ αν και μόνο αν $b \le a \to c$.

Απάντηση. Έχουμε

$$a \le b \to c = \vee\{x / b \wedge x \le c\}$$

Επειδή για κάθε $x \in \{x / b \wedge x \le c\}$ είναι $x \le b \to c$ προκύπτει ότι και

$$a \in \{x / b \wedge x \le c\} \Rightarrow b \wedge a = a \wedge b \le c \Rightarrow$$

$$b \in \{x / a \wedge x \le c\} \Rightarrow b \le a \to c.$$

Εύκολα προκύπτει και το αντίστροφο.

Άσκηση 5. Να δείξετε ότι σε μια άλγεβρα Heyting ισχύει :

(i) $a \to (b \wedge c) = (a \to b) \wedge (a \to c)$

(ii) $(a \vee b) \to c = (a \to c) \wedge (b \to c)$

Απάντηση.

(i) Έχουμε

$$a \to (b \wedge c) = \vee\{x / a \wedge x \le b \wedge c\} = z,$$

δηλαδή

$$a \wedge z \le b \wedge c \le \begin{cases} b \\ c \end{cases} \qquad (1)$$

Έτσι αν θέσουμε

$$a \to b = \vee\{x / a \wedge x \le b\} = z_1$$

$$a \to c = \vee\{x / a \wedge x \le c\} = z_2$$

από τη σχέση (1) προκύπτει $z \le z_1 \wedge z_2$ (2)

Επίσης

$$\left.\begin{cases} z_1 \wedge z_2 \le z_1 \Rightarrow a \wedge (z_1 \wedge z_2) \le b \\ z_1 \wedge z_2 \le z_2 \Rightarrow a \wedge (z_1 \wedge z_2) \le c \end{cases}\right\} \Rightarrow a \wedge (z_1 \wedge z_2) \le b \wedge c \Rightarrow$$

$$z_1 \wedge z_2 \in \{x / a \wedge x \le b \wedge c\} \Rightarrow z_1 \wedge z_2 \le \vee \{x / a \wedge x \le b \wedge c\} = z$$

το οποίο σημαίνει ότι $z_1 \wedge z_2 \le z$. (3)

Από τις σχέσεις (2) και (3) προκύπτει $z_1 \wedge z_2 = z$, δηλαδή το ζητούμενο.

(ii) Έστω $z = a \vee b \to c$. Τότε επειδή κάθε άλγεβρα Heyting είναι επιμεριστικό δικτυωτό έχουμε

$$\begin{aligned} & z_1 \wedge z_2 = z = \vee \{x / (a \vee b) \wedge x \le c\} = \\ & \vee \{x / (a \wedge x) \vee (b \wedge x) \le c\} \Rightarrow (a \wedge z) \vee (b \wedge z) \le c \Rightarrow \\ & a \wedge z \le c \quad \textit{και} \quad b \wedge z \le c \end{aligned}$$

Αν θέσουμε $a \to c = \vee \{x / a \wedge x \le c\} = z_1$ και $b \to c = \vee \{x / b \wedge x \le c\} = z_2$, τότε από τα παραπάνω προκύπτει $z \le z_1$ και $z \le z_2$ και επομένως $z \le z_1 \wedge z_2$.

Από την άλλη μεριά έχουμε

$$\left.\begin{matrix} a \wedge z_1 \le c \\ b \wedge z_2 \le c \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{cases} a \wedge (z_1 \wedge z_2) \le c \\ b \wedge (z_1 \wedge z_2) \le c \end{cases}\right\} \Rightarrow [a \wedge (z_1 \wedge z_2)] \vee [b \wedge (z_1 \wedge z_2)] \le c$$

$$\Rightarrow z_1 \wedge z_2 \le \vee \{x / (a \wedge x) \vee (b \wedge x) \le c\} = z$$

Έτσι τελικά $z_1 \wedge z_2 = z$.

<u>**Άσκηση 6**</u>. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $\neg a = a \to 0$ σε μια άλγεβρα Heyting είναι αντιτονική.

Απάντηση. Έστω A μια άλγεβρα Heyting. Για να είναι η συνάρτηση $A \xrightarrow{\neg} A$ με $a \to \neg a$ αντιτονική θα πρέπει για τυχαία $a, b \in A$ με $a \le b$ να προκύπτει $\neg b \le \neg a$. Δηλαδή να ισχύει

$$\vee \{x / b \wedge x \le 0\} \le \vee \{x / a \wedge x \le 0\}.$$

Αν όμως $x \in \{x / b \wedge x \le 0\}$, τότε αφού $a \wedge x \le b \wedge x$ έπεται ότι $x \in \{x / a \wedge x \le 0\}$. Τελικά παίρνουμε το ζητούμενο $\neg b \le \neg a$.

<u>Άσκηση 7</u>. Να δείξετε ότι σε μια άλγεβρα Heyting ισχύει η εξής ταυτότητα (κανόνας *De Morgan*)

$$\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$$

Απάντηση. Έχουμε με τη βοήθεια της άσκησης 5 ότι

$$\neg(a \vee b) = (a \vee b) \to 0 = (a \to 0) \wedge (b \to 0) = \neg a \wedge \neg b .$$

<u>Άσκηση 8</u>. Να δείξετε ότι σε μια άλγεβρα Boole ισχύουν

1. $a \wedge b = \neg(\neg a \vee \neg b)$
2. $a \vee b = \neg(\neg a \wedge \neg b)$

Απάντηση. 1) Από το τύπο του *De Morgan* (ασκ. 7) έχουμε

$$\neg(\neg a \vee \neg b) = \neg\neg a \wedge \neg\neg b = a \wedge b$$

2) Με τη βοήθεια πάλι του τύπου του *De Morgan* και του γεγονότος ότι πρόκειται για άλγεβρα Boole παίρνουμε

$$\neg(\neg a \wedge \neg b) = \neg\left[\neg(a \vee b)\right] = \neg\neg(a \vee b) = a \vee b .$$