1 Σύγκλιση πραγματικών ακολουθιών

Ορισμός 1. Μια ακολουθία (a_n) (δηλ. μια συνάρτηση $\mathcal{N} \to \mathcal{R}$, με πεδίο ορισμού το σύνολο των φυσικών αριθμών) λέγεται **μηδενική** ή λέμε ότι συγκλίνει στο μηδέν ή ότι έχει όριο το μηδέν και γράφουμε

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

ή απλά $a_n \to 0$, αν

$$\forall \epsilon \in \mathcal{R},\ \exists n_0 \in \mathcal{N}\ :\ |a_n| \le \epsilon\ \ \forall n \ge n_0$$

δηλαδή, κάθε φορά που επιλέγουμε μια πολύ μικρή περιοχή γύρω από το 0 (πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών) τότε όλοι οι όροι της ακολουθίας, εκτός ενός πεπερασμένου πλήθους όρων της (εκείνων με δείκτη $< n_0$), συγκεντρώνονται μέσα σε αυτή τη περιοχή, δηλαδή όλοι οι όροι $a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \ldots$. Αν το όριο της a_n είναι το 0, ο ορισμός, εξασφαλίζει πάντα την ύπαρξη του δείκτη n_0.

Παραδείγματα.

1. Αν $(a_n) = \frac{1}{n}$ τότε $a_n \to 0$.

   Πράγματι, αρκεί για το τυχαίο $\epsilon \in \mathcal{R}$ να βρούμε δείκτη n_0, τέτοιο ώστε $\forall n \ge n_0$ να συμβαίνει $|a_n| \le \epsilon$. Έστω λοιπόν

   $$|a_n| < \epsilon \Rightarrow |\frac{1}{n}| = \frac{1}{n} < \epsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\epsilon} < n$$

   Αρκεί επομένως να διαλέξουμε σαν $n_0 = \left[\frac{1}{\epsilon}\right]+1$, όπου $[x],\ x \in \mathcal{R}$ δηλώνει το ακέραιο μέρος του x (το μεγαλύτερο ακέραιο που δεν υπερβαίνει τον x).

2. Η ακολουθία $(a_n) = (-1)^n\,\frac{1}{n}$ είναι μηδενική.

   Πράγματι, επειδή $|a_n| = \frac{1}{n}$, αρκεί να διαλέγουμε ως $n_0 = \left[\frac{1}{\epsilon}\right] + 1$ για κάθε $\epsilon \in \mathcal{R}$

3. Όμοια οι ακολουθίες $\frac{1}{n^2}$, $\frac{1}{\sqrt{n}}$ είναι μηδενικές.

   Θεωρείστε $n_0 = \left[\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\right] + 1$ και $n_0 = \left[\frac{1}{\epsilon^2}\right] + 1$ αντίστοιχα.

2 Κριτήρια σύγκλισης πραγματικών ακολουθιών

1. Έστω $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ και $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, τότε

   (α′)
   $$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

   (β′)
   $$\lim_{n\to\infty} (\lambda\ a_n) = \lambda\ a = \lambda\ \lim_{n\to\infty} a_n \text{ για κάθε } \lambda\ \in \mathcal{R}$$

   (γ′)
   $$\lim_{n\to\infty} (a_n\ b_n) = a\ b = \lim_{n\to\infty} a_n\ \lim_{n\to\infty} b_n$$

   (δ′)
   $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$$

2. Αν η ακολουθία a_n συγκλίνει τότε και η ακολουθία $|a_n|$ συγκλίνει, δηλαδή αν
   $$a_n \to a \Rightarrow |a_n| \to a$$

   Παρατήρηση. Το αντίστροφο δεν ισχύει. Πράγματι, αν $a_n = (-1)^n$, τότε $|a_n| \to 1$ ενώ η a_n δεν συγκλίνει. Το αντίστροφο ισχύει μόνο όταν $a_n \to 0$, αφού τότε αν $a_n \to 0$ τότε και $-a_n \to 0$ δηλαδή $|a_n| \to 0$

3. Από τον Ορισμό 1 της μηδενικής ακολουθίας προκύπτει
   $$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} (a_n - a) = 0$$

4. Αν $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ και $a_n \geq 0$, για κάθε $n \in \mathcal{N}$, τότε
   $$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} a_n}$$

5. Αν για τις ακολουθίες a_n, b_n, c_n ισχύουν
   $$\left\{\begin{array}{l} b_n \leq a_n \leq c_n \\ \lim_{n\to\infty} b_n = a = lim_{n\to\infty} c_n \end{array}\right. \quad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = a$$

2.1 Σχέση συγκλίνουσας ακολουθίας με τη μονότονη και τη φραγμένη ακολουθία

.

Μια ακολουθία (a_n) είναι **φραγμένη** αν υπάρχουν $m,\ M \in \mathcal{R}$ τέτοιοι ώστε $m \leq a_n \leq M$, για κάθε $n \in \mathcal{N}$. Αν ισχύει $|a_n| \leq M$, τότε λέμε ότι η ακολουθία a_n είναι **απολύτως φραγμένη**. Είναι φανερό ότι κάθε απολύτως φραγμένη ακολουθία είναι και απλά φραγμένη.

Αν για μια ακολουθία συμβαίνει $a_n \leq a_{n+1}$ (αντ.$a_n \geq a_{n+1}$), για κάθε $n_1 < n_2$, τότε η ακολουθία λέμε ότι είναι **αύξουσα** (αντ. **φθίνουσα**). Μια ακολουθία λέγεται **μονότονη** αν είναι αύξουσα ή φθίνουσα. Αν $\forall n \in \mathcal{N}$ ισχύει $a_n < a_{n+1}$ ή $a_n > a_{n+1}$ τότε λέμε ότι η ακολουθία είναι **γνησιώς μονότονη** (γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα αντίστοιχα).

Σημείωση. Για να ελέγξουμε αν μια ακολουθία (a_n) είναι μονότονη έχουμε 3 τρόπους:

1. ελέγχουμε το πρόσημο της διαφοράς $a_{n+1} - a_n$. Αν $a_{n+1} - a_n > 0$ η (a_n) είναι αύξουσα, ενώ αν $a_{n+1} - a_n < 0$ τότε η (a_n) είναι φθίνουσα. Π.χ. οι ακολουθίες $a_n = \frac{1}{n^s}$, $s \in \mathcal{N}$ και $b_n = \frac{n}{n+1}$ είναι γνησίως φθίνουσα και γνησίως αύξουσα αντίστοιχα.

2. ελέγχουμε αν ο λόγος $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ (αντ. αν $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$) οπότε η (a_n) είναι αύξουσα (αντ. φθίνουσα). Π.χ. η $a_n = \frac{3^n}{n!}$ είναι φθίνουσα.

3. με τη μέθοδο της επαγωγής, αν δηλ. $\forall n \in \mathcal{N}$συμβαίνει $a_{n+1} > a_n$ (οπότε αύξουσα) ή $a_{n+1} < a_n$ (οπότε φθίνουσα). Κυρίως χρησιμοποιούμε τη μέθοδο αυτή όταν η ακολουθία δίνεται με αναδρομική σχέση, π.χ. $a_{n+1} = a + a_n^2$ και $a_1 = a > 0$, η οποία είναι γνησίως αύξουσα.

Ισχύουν τα επόμενα

- **κάθε συγκλίνουσα** ακολουθία $(a_n) \to a$ είναι και **φραγμένη**.

  Παρατήρηση. Επομένως, αν μια ακολουθία δεν είναι φραγμένη δεν μπορεί να είναι συγκλίνουσα (να συγκλίνει δηλ. σε κάποιο πραγματικό αριθμό).

- Ισχύει ότι, αν $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ και b_n είναι φραγμένη, τότε η ακολουθία **γινόμενο** $(a_n \cdot b_n)$ είναι **μηδενική**, δηλαδή $(a_n \cdot b_n) \to 0$.

- κάθε **μονότονη και φραγμένη** ακολουθία είναι **συγκλίνουσα**.

  Παρατήρηση. Αν η (a_n) είναι αύξουσα (αντ. φθίνουσα) και φραγμένη τότε συγκλίνει. Έστω $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Τότε ο a είναι ένα άνω (αντ. κάτω) φράγμα της (a_n).

3 Παραδείγματα

.

1. Να υπολογισθούν τα όρια:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 - n^2 + 1}{n^5 + 2n^4 - 3} \quad \text{και} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^4 - 4n^3 + n + 6}{2n^4 + 7n^2 + 3n - 1}$$

   Απάντηση. Όταν έχουμε να υπολογίσουμε ακολουθιών της μορφής $\frac{p(n)}{qn}$, όπου $p(n),\ q(n)$ είναι πολυώνυμα του φυσικού n, τότε εξάγουμε κοινό παράγοντα από τον αριθμητή (αντ. παρονομαστή) τη μεγαλύτερη δύναμη του n με την οποία εμφανίζεται σε αυτόν (αντ. στον παρονομαστή). Κάνουμε χρήση κατόπιν των ιδιοτήτων (3) και (4) και του γεγονότος ότι $\dfrac{1}{n^s} \to 0$. Έτσι έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 - n^2 + 1}{n^5 + 2n^4 - 3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}\right)}{n^5\left(1 + \frac{2}{n} - 3\frac{1}{n^5}\right)} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}}{1 + \frac{2}{n} - 3\frac{1}{n^5}} \to 0$$

   Με ανάλογο τρόπο βρίσκουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^4 - 4n^3 + n + 6}{2n^4 + 7n^2 + 3n - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4\left(1 - 4\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3} + 6\frac{1}{n^4}\right)}{n^4\left(2 + 7\frac{1}{n^2} + 2\frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^4}\right)} = \frac{1}{2}$$

2. Η ακολουθία $a_n = \frac{n-1}{n}$, $n \in \mathcal{N}$ είναι αύξουσα και επειδή $a_n = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n} < 1$ είναι φραγμένη (άνω) από τον 1. Άρα σύμφωνα με το κριτήριο σύγκλισης η είναι a_n συγκλίνει σε κάποιο αριθμό και μάλιστα ≤ 1. Επίσης, επειδή $1 \leq a_n \leq 1$ προκύπτει ότι $a_n \to 1$ (βλέπε ιδιότητα 5).

3. **Αξιοσημείωτες ακολουθίες** ως προς τη σύγκλισή τους είναι οι επόμενες:

   (α′) αν $|\omega| < 1$ τότε ισχύει
   $$\lim_{n\to\infty} \omega^n = 0$$

   (β′)
   $$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \Rightarrow a_n \to 0$$

   (γ′) αν $a \in \mathcal{R}^+$ και $a_n = \sqrt[n]{a}$ τότε $a_n \to 1$.
   Έτσι, $a_n = \sqrt[n]{n} \to 1$