11 Ιανουαρίου 2008

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ**
**ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ**
**ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ**
**ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ & ΔΙΚΤΥΩΝ**

**ΤΕΣΤ ΠΡΟΟΔΟΥ στο ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΛΟΓΙΣΜΟ Ι**

# ΘΕΜΑΤΑ

**ΘΕΜΑ 1:** Να υπολογιστούν τρία (επιλέξτε) από τα επόμενα ολοκληρώματα:

**i)** $\int_0^{\pi/2} \sin 2x \; 3^{\cos 2x}\, dx$ **ii)** I= $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\, dx$ (Υποδ. Θέστε x=π/2-y)

**iii)** $\int_e^{e^3} \frac{\ln(\ln x)}{x \ln x}\, dx$ **iv)** $\int_{-1}^{0} \frac{x^2-x-2}{x^2-4x+3}\, dx$ (Μον. 3)

**ΘΕΜΑ 2:** **α )** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\min\{x^2+x-1 , 2x+1\}$. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I=\int_0^3 f(x)dx$ (Μον 1)

**β)** Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_1^X e^{2t+1}dt}{x}$ (Μον 1)

**ΘΕΜΑ 3:** Να υπολογιστεί το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται από τη καμπύλη $y^2 = x$ , τον άξονα yy' και τις ευθείες y=2 και y=-1. (Μον 1,5)

**ΘΕΜΑ 4. i)** Να μελετηθούν ως προς τη σύγκλισή τους οι σειρές και να βρεθεί το άθροισμά τους όπου αυτό είναι δυνατόν (επιλέξτε 2):

**(α)** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$ , **(β)** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$ , **(γ)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$ (Μον 1)

**ii)** Για ποιες τιμές του $x \in R$ συγκλίνει η σειρά: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n^2}$; (Μον. 0,75)

## ΛΥΣΗ

**i)** Α) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{n^2+1}-n)(\sqrt{n^2+1}+n)}{\sqrt{n^2+1}+n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$ Άρα η σειρά αποκλίνει λόγω σύγκρισης με την αρμονική $\sum\frac{1}{\sqrt{n}}$ (η οποία δε συγκλίνει), αφού $\frac{1}{\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$.

Β) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2+n}\right)$. Η σειρά είναι μια τηλεσκοπική σειρά και συγκλίνει αφού $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...\right)=1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=1$.

Γ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$ Η σειρά συγκλίνει, χρησιμοποιώντας το κριτήριο του λόγου και το άθροισμά της είναι το $e^3$.

**ii)** Αν χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο του λόγου βρίσκουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n^2}$ συγκλίνει για |x – 2| < 1, δηλαδή για 1 < x < 3.

**ΘΕΜΑ 5. i)** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2bx + 4 + a\ln(x^2)$ με x > 0. Υπολογίστε την $f'(x)$ και βρείτε τις πραγματικές παραμέτρους *α, b* έτσι ώστε η f να παρουσιάζει ακρότατα στα σημεία $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ και προσδιορίστε το είδος των ακρότατων αυτών. (Μον. 0,75)

**ii)** Να υπολογισθούν τα όρια: **α)** $\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x}$ , **β)** $\lim_{x\to\pi}\frac{|\sin x|}{\pi - x}$ (Μον 1)

**<u>ΛΥΣΗ</u>**

**i)** Παραγωγίζοντας την f(x) έχουμε $f'(x) = 2x + 2b + 2a\frac{1}{x} = 0 \Rightarrow 2\frac{x^2 + bx + a}{x} = 0$. Εφόσον στα σημεία $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ έχουμε ακρότατα, αυτό σημαίνει ότι η παράγωγος αυτή γράφεται $f'(x) = 2\frac{(x-1)(x-2)}{x} = 2\frac{x^2 - 3x + 2}{x} = 0$. Συγκρίνοντας με την ως άνω παράσταση βρίσκουμε αμέσως *α* =2, *b* = -3. Υπολογίζοντας και την δεύτερη παράγωγο $f''(x) = 2 - 4\frac{1}{x^2}$ στα σημεία αυτά βλέπουμε ότι στο $x_1 = 1$ υπάρχει τοπικό μέγιστο ενώ στο $x_2 = 2$ τοπικό ελάχιστο.

**ii)** A) Αν $\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x} = l \Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\ln(x^{\sin x}) = \ln l \Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\sin x\ln x = \ln l$. Αλλά

$$\lim_{x\to 0^+}\sin x\ln x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/\sin x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-1/x}{\cos x/\sin^2 x} = -\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^2 x}{x\cos x} = -\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x\cos x}\sin x = 0$$

, εφαρμόζοντας μια φορά L'Hospital. Επομένως $\ln l = 0 \Rightarrow l = 1$.

β) $$\lim_{x\to\pi}\frac{|\sin x|}{\pi - x} = \lim_{x\to\pi}\frac{|\sin(\pi - x)|}{\pi - x} = \begin{cases} \lim_{x\to\pi^-}\frac{|\sin(\pi - x)|}{\pi - x} = 1 \\ \lim_{x\to\pi^+}\frac{|\sin(\pi - x)|}{\pi - x} = -1 \end{cases}$$ Άρα το όριο δεν υπάρχει.

**ΘΕΜΑ 6.** Να υπολογισθούν τα όρια των παρακάτω ακολουθιών:

**i)** $\lim[\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})]$, (Μον 0.5) **ii)** $\lim\left(\dfrac{\nu+2}{\nu}\right)^{\nu}$ (Μον. 0.5)

(Υποδ. $\lim(1+\dfrac{1}{n})^{n}=e$)

**<u>ΛΥΣΗ</u>**

**i)**

$$\lim[\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})]=\lim\frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}=\lim\frac{\sqrt{n}}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}=$$

$$\lim\frac{\sqrt{n}\sqrt{n}}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}=\lim\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim\frac{n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}=\frac{1}{2}$$

**ii)** $\lim\left(\dfrac{n+2}{n}\right)^{n}=\lim\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{n}$ και αν θέσουμε $n=2k$ τότε

$$\lim\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n}=\left(\lim\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}\right)^{2}=e^{2}$$