16 Δεκεμβρίου 2010

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ**
**ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ**
**ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ**
**ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ & ΔΙΚΤΥΩΝ**

## ΤΕΣΤ προόδου στο ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΛΟΓΙΣΜΟ Ι

## ΘΕΜΑΤΑ και Ενδεικτικές Απαντήσεις

**ΘΕΜΑ 1**. Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα:

1. $\int \frac{dx}{x(1+x^2)^2}$ 2. $\int \frac{xe^x dx}{(1+x)^2}$ 3. $\int \frac{e^x(1+\sin x\cos x)dx}{\cos^2 x}$

4. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}$ 5. $\int x\,\tau o\xi\sigma\upsilon\nu x\,dx$

### Απαντήσεις

1. Επειδή $\frac{1}{x(1+x^2)^2} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{\left(1+x^2\right)^2}$ έχουμε

$$\int \frac{dx}{x(1+x^2)^2} = \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{x}{1+x^2}dx - \int \frac{x}{\left(1+x^2\right)^2}dx =$$

$$\ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2\left(1+x^2\right)}$$

2. Επειδή $\left(\frac{e^x}{1+x}\right)' = \frac{xe^x}{(1+x)^2}$ προκύπτει $\int \frac{xe^x dx}{(1+x)^2} = \frac{e^x}{1+x} + c$

3. $$\int \frac{e^x(1+\sin x\cos x)dx}{\cos^2 x} = \int \frac{e^x}{\cos^2 x}dx + \int e^x \tan x\,dx = \int \frac{e^x}{\cos^2 x}dx + \int \left(e^x\right)' \tan x\,dx =$$

$$\int \frac{e^x}{\cos^2 x}dx + e^x \tan x - \int e^x \frac{1}{\cos^2 x}dx = e^x \tan x + c$$

4. Θέτουμε $x+1=t^6$, οπότε $dx = 6t^5 dt$ και $\sqrt{x+1} = t^3, \sqrt[3]{x+1} = t^2$. Επομένως

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}} = \int \frac{\left(t^6-1\right)6t^5}{t^3-t^2}dt = 6\int \frac{(t-1)\left(t^5+t^4+t^3+t^2+t+1\right)t^3}{(t-1)}dt =$$

$$6\int \left(t^8+t^7+t^6+t^5+t^4+t^3\right)dt = 6\left[\left(\frac{t^9}{9}\right)+\left(\frac{t^8}{8}\right)+\left(\frac{t^7}{7}\right)+\left(\frac{t^6}{6}\right)+\left(\frac{t^5}{5}\right)+\left(\frac{t^4}{4}\right)\right]+c$$

Και αντικαθιστούμε $t = \sqrt[6]{x+1}$.

5. $I=\int x\tau o\xi\sigma\upsilon\nu x\,dx=\int\left(\frac{x^2}{2}\right)'\cos^{-1}x\,dx=\frac{x^2}{2}\cos^{-1}x-\int\frac{x^2}{2}\left(\cos^{-1}x\right)'dx=$

$$\frac{x^2}{2}\cos^{-1}x-\int\frac{x^2}{2}\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{x^2}{2}\cos^{-1}x+\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx \qquad (1)$$

Θα υπολογίσουμε το $I_1=\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$. Θέτουμε $x=\sin t$, οπότε $\sqrt{1-x^2}=\cos t$ και $dx=\cos t\,dt$. Έχουμε

$$I_1=\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{\cos^2 t}{\cos t}\cos t\,dt=\int\cos^2 t\,dt=\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt=$$

$$\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\int\cos 2t\,dt=\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\frac{\cos 2t}{2}=\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}$$

Και επειδή $t=\sin^{-1}x=\arcsin x=\tau o\xi\eta\mu\chi$,

$$I_1=\frac{1}{2}\sin^{-1}x+\frac{1}{4}\sin\left(2\sin^{-1}x\right)+c \qquad (2)$$

Οι σχέσεις (1) και (2) δίνουν την απάντηση.

**ΘΕΜΑ 2.** Να προσδιορίσετε τα όρια

**α)** $\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x+2^{x+1}}{2^x+a^{x+1}}$ **β)** $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^k}{\ln(\ln x)}$

**γ)** $\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1})$ χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης $f(x)=e^x$, γύρω από το $x$=0.

**Απάντηση**.

α) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x+2^{x+1}}{2^x+a^{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a^x}{2^x+a^{x+1}}+\frac{2^{x+1}}{2^x+a^{x+1}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{2^x+a^{x+1}}+\lim_{x\to+\infty}\frac{2^{x+1}}{2^x+a^{x+1}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{2^x+a^{x+1}}{a^x}}+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{2^x+a^{x+1}}{2^{x+1}}}=\frac{1}{\lim_{x\to+\infty}\left(\left(\frac{2}{a}\right)^x+a\right)}+\frac{1}{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+\left(\frac{a}{2}\right)^x\left(\frac{a}{2}\right)\right)}. \ (1)$$

Αν $\alpha>2$ τότε $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a}{2}\right)^x=+\infty\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^x}=0\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{a}\right)^x=0$ .

Και το όριο (1) γίνεται

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x+2^{x+1}}{2^x+a^{x+1}}=\frac{1}{a}+0=\frac{1}{a}.$$

Αν $\alpha<2$, τότε $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{a}\right)^x=+\infty\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(\frac{2}{a}\right)^x}=0\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a}{2}\right)^x=0$ και το όριο (1)

δίνει $\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x+2^{x+1}}{2^x+a^{x+1}}=0+2=2$

β) $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^k}{\ln(\ln x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{k(\ln x)^{k-1}\frac{1}{x}}{\frac{1}{\ln x}\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}k(\ln x)^k=\infty,\ k>0$

αν $k\le 0$ τότε το όριο είναι μηδέν.

Για το γ) επειδή

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

Έχουμε

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)-1-x}{x\left[\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)-1\right]}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\cdots}{x^2+\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{3!}+\cdots}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}+\frac{x}{3!}+\cdots}{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3!}+\cdots}=\frac{1}{2}$$

**ΘΕΜΑ3.**. Δίνεται η συνάρτηση $\mathrm{f(x)=\ln(x+a)}$, $x>-a$. Υπολογίστε την παράγωγο τάξης n για κάθε φυσικό n .

**Απάντηση.**

Ισχύει για τη *n*-οστη παράγωγο : $\ln^{(n)}x=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$. Αυτή τη σχέση μπορεί να αποδείξει κάποιος με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής.