ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ **ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2013**

Θέμα 1.

Για την εύρεση του $\lim_{n\to\infty} a_n$ αν $a_n = \left(\dfrac{3n+5}{3n+2}\right)^n$ είναι

$\dfrac{3n+5}{3n+2} = \dfrac{(3n+2)+3}{3n+2} = 1+\dfrac{3}{3n+2}$ άρα $a_n = \left(1+\dfrac{3}{3n+2}\right)^n$, επειδή είναι γνωστό ότι $\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$.

Θέτω $3n+2=3k$, οπότε όταν $n\to\infty, \dfrac{3n+2}{3} = k \to \infty$ και

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{\frac{3k-2}{3}} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{k}\right)^k \frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^{\frac{2}{3}}}\right] = e$$

Θέμα 2.

α) Το $\sin x$ ως σειρά γράφεται : $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ και τότε

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{x(2n+1)!}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\int_0^1 x^{2n}dx\right] =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\Big|_0^1\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{2n+1}$$

Για να δούμε αν συγκλίνει η τελευταία σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, όπου

$a_n = (-1)^n \dfrac{1}{(2n+1)!(2n+1)}$, χρησιμοποιώ το κριτήριο D’Alembert:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!(2n+3)}}{\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!(2n+1)}{(2n+3)!(2n+3)} =$$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{(2n+2)(2n+3)\cdot(2n+3)} = 0 < 1$ άρα συγκλίνει και επομένως το $\int_0^1 \dfrac{\sin x}{x}dx$ υπάρχει.

β) $f(x) = x^2 + 2bx + 4 + a\ln(x^2), x > 0,$ πεδίο ορισμού $A = (0, +\infty)$

$$f'(x) = 2x + 2b + a\frac{2x}{x^2} = 2x + 2b + \frac{2a}{x}$$

Εφόσον η f παρουσιάζει ακρότατα στα $x_1 = 1, x_2 = 2$ θα πρέπει $f'(1) = 0$, $f'(2) = 0$, οπότε:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= f'(1) = 2 + 2b + 2a \\ 0 &= f'(2) = 4 + 2b + a \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} a + b &= -1 \\ a + 2b &= -4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} a &= 2 \\ b &= -3 \end{aligned}$$

Είδος των ακρότατων:

$f''(x) = 2 - 2\dfrac{a}{x^2} = 2 - 2\dfrac{2}{x^2}$, οπότε

$f''(1) = 2 - 4 = -2$, άρα η f στο $x_1 = 1$ έχει <u>τοπικά μέγιστη τιμή</u>

$f''(2) = 2 - 2\dfrac{2}{4} = 1$, άρα η f στο $x_2 = 2$ έχει <u>τοπικά ελάχιστη τιμή</u>

Επειδή $A = (0, +\infty)$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x^2 - 6x + 4 + \ln x^2) =$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x^2(1 - 6\frac{1}{x} + 4\frac{1}{x^2}) + 2\ln x\right] = +\infty$$

$\dfrac{1}{x} \to 0, \dfrac{1}{x^2} \to 0,$ όσο $x \to +\infty$ και $\lim\limits_{x\to\infty}\ln x = +\infty$

Ανάλογα αφού $A=(0,+\infty)$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to 0}(x^2-6x+4+\ln x^2)=-\infty$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι : όσο το x αυξάνει και η $f(x)$ αυξάνει, άρα στο $x_1=1$ έχουμε <u>τοπικό</u> μέγιστο (όχι ολικό). Επίσης, όσο το x ελαττώνεται και η $f(x)$ ελαττώνεται. Άρα στο $x_2=2$ έχουμε <u>τοπικό</u> ελάχιστο(όχι ολικό).

<u>Θέμα 3</u>.

α) $$I_1=\int \frac{x}{\underbrace{x^2-x+1}_{\substack{\delta\varepsilon\nu\\ \varepsilon\chi\varepsilon\iota\\ \rho\iota\zeta\varepsilon\varsigma\\ \in\mathbb{R}}}}dx=\int \frac{x}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dx$$

Θέτω $(x-\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan\omega$ (1) $\Rightarrow dx=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\cos^2\omega}d\omega$ και

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\tan^2\omega+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{3}{4}\left(1+\tan^2\omega\right)=\frac{3}{4}\frac{1}{\cos^2\omega}$$

Άρα $$I_1=\int\frac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\tan\omega}{\frac{3}{4}\frac{1}{\cos^2\omega}}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\cos^2\omega}d\omega=\frac{2\sqrt{3}}{3}\int\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\tan\omega\right)d\omega=$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3}\int\frac{1}{2}d\omega+\frac{2\sqrt{3}}{3}\int\frac{\sqrt{3}}{2}\tan\omega d\omega=\frac{\sqrt{3}}{3}\omega+\int\underbrace{\tan\omega d\omega}_{-\ln(\cos\omega)}=\frac{\sqrt{3}}{3}\omega-\ln(\cos\omega)\ (2)$$

$$(1)\Rightarrow\tan\omega=\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow\omega=\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\quad(3)$$

$$(2)+(3)\Rightarrow I_1=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)-\ln(\cos(\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)))$$

Επειδή $\cos^2\omega=\frac{1}{1+\tan^2\omega}=\frac{3}{4}\frac{1}{x^2-x+1}$ δηλαδή $\cos\omega=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2-x+1}}$

β) $$I_2=\int\frac{1}{x^2\sqrt{9+x^2}}dx$$

Θέτω $x = 3\tan\omega$ (1) $\Rightarrow dx = 3\dfrac{1}{\cos^2\omega}d\omega$

$x^2 = 9\tan^2\omega, 1+\tan^2\omega = \dfrac{1}{\cos^2\omega}$

Άρα $I_2 = \displaystyle\int \frac{3}{9\tan^2\omega\cdot\sqrt{9(1+\tan^2\omega)}}\frac{1}{\cos^2\omega}d\omega =$

$$\frac{1}{9}\int \frac{1}{\tan^2\omega\cdot\dfrac{1}{\cos\omega}}\frac{1}{\cos^2\omega}d\omega = \frac{1}{9}\int\frac{1}{\tan^2\omega\cdot\cos\omega}d\omega =$$

$$\frac{1}{9}\int\frac{d\omega}{\dfrac{\sin^2\omega}{\cos^2\omega}\cos\omega} = \frac{1}{9}\int\frac{\cos\omega}{\sin^2\omega}d\omega = \frac{1}{9}\int\frac{d(\sin\omega)}{\sin^2\omega} = -\frac{1}{9\cdot\sin\omega}$$

γ) $I_3 = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x\ln x}dx = \lim_{\varepsilon\to0}\int_{1+\varepsilon}^2\frac{(\ln x)'}{\ln x} = \lim_{\varepsilon\to0}\ln(\ln x)\Big|_{1+\varepsilon}^2 =$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\Big[\ln(\ln 2)-\ln(\ln(1+\varepsilon))\Big] = \ln(\ln 2)-\lim_{\varepsilon\to0}\ln(\ln(1+\varepsilon)) = \ln(\ln 2)-\ln(\ln 1) = \ln(\ln 2)-(-\infty) = +\infty$$

Δηλαδή το I_3 αποκλίνει.

<u>Θέμα 4.</u>

Ι.

α) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n^2+1}-n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$

Όμως $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} > \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n^2}+n} = \dfrac{1}{n\sqrt{2}+4} = \dfrac{1}{\mathrm{n}(\sqrt{2}+1)} > \dfrac{1}{3n}$ αλλά η σειρά

$\displaystyle\sum\frac{1}{3n} = \frac{1}{3}\sum\frac{1}{n}$ αποκλίνει οπότε και η αρχική σειρά αποκλίνει.

β) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n n^n}{n!}$, έστω $\dfrac{a^n n^n}{n!} = b_n$, κι από κριτήριο D’Alembert

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{a^{n+1}\cdot(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{a^n\cdot n^n}{n!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a^{n+1}\cdot(n+1)^{n+1}\cdot n!}{a^n\cdot n^n\cdot(n+1)!}\right| =$$

$$|a|\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = |a|\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = |a|e$$

Για να συγκλίνει η σειρά θα πρέπει το παραπάνω όριο να είναι <1,

δηλαδή $|a|e<1 \Leftrightarrow |a|<\dfrac{1}{e}$

II)

Για να συγκλίνει η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^{n-1}}{3^n n^2}, \frac{(x-2)^{n-1}}{3^n n^2} = b_n$ πρέπει

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(x-2)^n}{3^{n+1}(n+1)^2}}{\dfrac{(x-2)^{n-1}}{3^n n^2}}\right| < 1 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-2)^n 3^n n^2}{(x-2)^{n-1}3^{n+1}(n+1)^n}\right| < 1 \Leftrightarrow |x-2|\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 < 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{|x-2|}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^2} = \frac{|x-2|}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2} < 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{|x-2|}{3} < 1 \Leftrightarrow |x-2| < 3 \Leftrightarrow -1 < x < 5$$

Ελέγχουμε στα άκρα $x=-1, x=5$.

Για $x=-1$ η αρχική σειρά γίνεται:

$\displaystyle\sum\frac{(-3)^{n-1}}{3^n n^2} < \sum\left|\frac{(-3)^{n-1}}{3^n n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n^2} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ που συγκλίνει άρα και η αρχική συγκλίνει.

‘Όμοια για χ=5 : $\displaystyle\sum\frac{3^{n-1}}{3^n n^2} = \frac{1}{3}\sum\frac{1}{n^2}$ συγκλίνει άρα και η αρχική συγκλίνει

Τελικά, η αρχική σειρά συγκλίνει για $x \in [-1, 5]$.

<u>Θέμα 5.</u>

I)

$x = \dfrac{y^{\frac{3}{2}}}{3} - \sqrt{y}$, $1 \le y \le 9$, δηλαδή, η καμπύλη είναι συνάρτηση του y. Το μήκος ℓ δίνεται από $\ell = \int_1^9 \sqrt{1 + \left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2}$ (1)

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2} y^{1/2} - \frac{1}{2} y^{-1/2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{y} - \frac{1}{\sqrt{y}}\right)$$

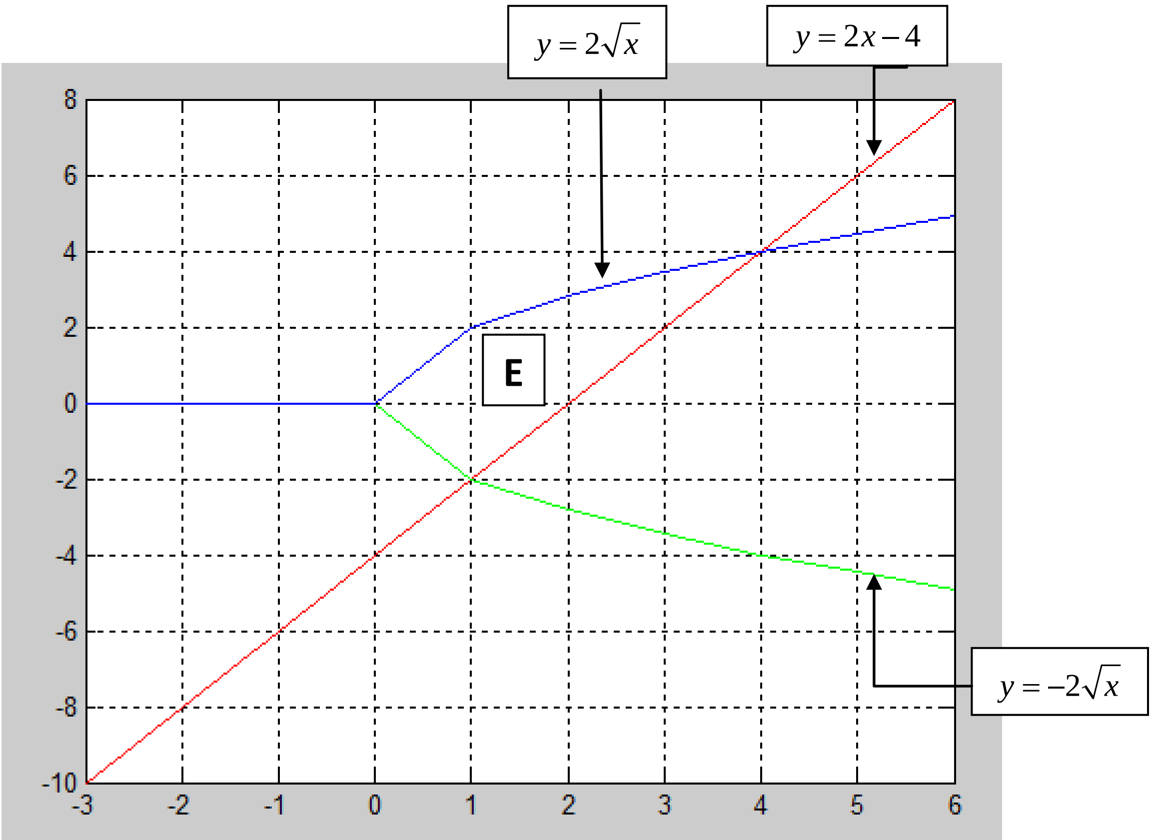
$$1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4}\left(\frac{y-1}{\sqrt{y}}\right)^2 = \ldots \frac{(y+1)^2}{4y} \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \ell = \int_1^9 \frac{y+1}{2\sqrt{y}} dy = \int_1^9 \frac{1}{2}\sqrt{y} + \int_1^9 \frac{1}{2\sqrt{y}} dy =$$

$$\frac{1}{2}\frac{2}{3} y^{3/2}\Big|_1^9 + \frac{1}{2} 2 y^{1/2}\Big|_1^9 = \frac{1}{3}(27-1) + (\sqrt{9} - 1) = \frac{26}{3} + 2 = \frac{32}{3}$$

II)

$$\left.\begin{array}{l} y = 2x - 4 \Rightarrow x = \dfrac{y+4}{2} \; \varepsilon\upsilon\theta\varepsilon\ \alpha \\ y^2 = 4x \Rightarrow x = \dfrac{y^2}{4} \; \pi\alpha\rho\alpha\beta o\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow$$



$$x^2-5x+4=0\begin{cases} x=1 \Rightarrow y=-2 \\ x=4 \Rightarrow y=4 \end{cases}$$

Έτσι το εμβαδόν

$$\mathrm{E}=\underbrace{\int_{-2}^{4}\left(\frac{y+4}{2}-\frac{y^2}{4}\right)dy}_{\substack{\kappa\alpha\mu\pi\acute{\upsilon}\lambda\varepsilon\varsigma \\ \sigma\alpha\nu \\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta \\ \tau o\upsilon y}}=\left(\frac{y^2}{4}+2y\right)\Bigg|_{-2}^{4}-\frac{y^3}{12}\Bigg|_{-2}^{4}=\frac{16}{4}+8-(\frac{4}{4}-4)-\left(\frac{64}{12}+\frac{8}{12}\right)=4+8+3-6=9$$

Αν, τώρα, δούμε τις καμπύλες ως συναρτήσεις του x, τότε το εμβαδό θα είναι άθροισμα εμβαδών 2-περιοχών:

$$E=E_1+E_2=\int_0^1 2\sqrt{x}-(-2\sqrt{x})\,dx+\int_1^4 2\sqrt{x}-(2x-4)\,dx$$

$$\int_0^1 4\sqrt{x}\,dx+\int_1^4(2\sqrt{x}-2x+4)\,dx=4\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)_0^1+\left(\frac{4}{3}x^{3/2}-x^2+4x\right)_1^4=$$

$$\frac{8}{3}+\left(\frac{4}{3}\sqrt{4^3}-16+16\right)-\left(\frac{4}{3}-1+4\right)=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}8-\frac{2}{3}+1-4=....9$$