

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ
ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

A. Να υπολογιστεί το εμβαδό της επίπεδης περιοχής που περικλείεται από:

1. τη παραβολή $y = x^2 - 4x + 3$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \frac{1}{2}$ και $x = 4$.
2. τις παραβολές $y = x^2$ και $x = y^2$.
3. τη συνάρτηση $y = \sin x$ και $y = \cos x$ και τον άξονα $y'y$.
4. τη καρδιοειδή καμπύλη $r = a(1 + \cos \theta)$ (αντ. $r = a(1 - \sin \theta)$).
5. τη καμπύλη με παραμετρικές εξισώσεις $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $t \in [0, 2\pi]$.

B. Να υπολογιστεί το μήκος της καμπύλης της συνάρτησης :

1. $f(x) = \sinh x$, $x \in [0, 1]$.
2. $f(x) = \ln x$, $x \in [1, 2\sqrt{2}]$
3. $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
4. $r = a\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $a > 0$ (σπείρα του Αρχιμήδη).

Γ. Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού που παράγεται από περιστροφή της επίπεδης περιοχής που περικλείεται από:

1. τις παραβολές $y = x^2$ και $x = y^2$.
2. τις συναρτήσεις $y = \sin x$ και $y = \cos x$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
3. $8x = y^2$, $x = 2$ (γύρω από τον άξονα $y'y$).

Δ.

1. Αν το φυσικό μήκος ενός ελατηρίου είναι 10cm και μια δύναμη 3N το επιμηκύνει κατά 2cm, να υπολογιστεί το έργο που παράγεται κατά την επιμήκυνση (από το φυσικό του μήκος) κατά 15cm.

