

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι 2^η Σειρά

1. Να υπολογισθούν τα επόμενα όρια :

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}, \quad \beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x) \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x,$$
$$\delta) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2} \quad (\text{Υπόδειξη: για τις } (\gamma)\text{-}(\delta): \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e)$$

2. i) Να υπολογισθούν τα επόμενα όρια :

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x}{1-\cos x} - \frac{1}{x}\right), \quad \beta) \lim_{x \rightarrow e^+} (\ln(x-e) \cdot (\ln x - 1)), \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x - \sin x}{x^3}\right)$$

ii) Να βρεθεί η παράμετρος a έτσι ώστε το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+2a} - \sqrt{2x+a}}{x^2 - 5x + 6}$ να υπάρχει στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

3. Να υπολογισθούν τα επόμενα όρια με τη χρήση σειρών Taylor:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x}, \quad \beta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x^2}}{x^2}, \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 + \cos x}{x^3 \sin x} - \frac{3}{x^4}\right).$$

4. α) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x+a)$, $x > -a$. Υπολογίστε την παράγωγο τάξης n , για κάθε φυσικό n .

β) Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί a, b ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} ax, & x < 2 \\ ax^2 - bx + 3, & x \geq 2 \end{cases}$$

να είναι παραγωγίσιμη σε όλο το πεδίο ορισμού της.

5. Να υπολογισθεί η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος της $y = y(x)$ στο σημείο $(1, 1)$ όταν $x^3 + 3x^2y - 6xy^2 + 2y^3 = 0$.

6. Να βρείτε τις εξισώσεις της εφαπτομένης και της κάθετης ευθείας της καμπύλης $x^2 + 3xy + y^2 = 5$, στο σημείο $(1, 1)$.

7. α) Να μελετηθεί η συνάρτηση $f(x) = 2 \frac{\ln x}{x^2}$ ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα.

β) Να βρεθούν τα σημεία καμπής και το είδος κυρτότητας της συνάρτησης $f(x) = x^2 \ln x$

8. Αφού υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin x)^n \cos x dx$ να υπολογίσετε τη διαφορά

$$I_{n+2} - I_n, \text{ όπου } I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x)^n}{\cos x} dx, \quad n \in \mathbb{N}. \text{ Βρείτε τα } I_1, I_3, I_5.$$