

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι

### 1<sup>η</sup> Σειρά

1. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α)  $f(x) = \sqrt{\frac{4-x}{x^2-1}}$ ,    β)  $f(x) = \frac{2}{x-5} \sqrt{x^2-x-12}$     γ)  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-9}}{\ln(x+5)}$ ,    δ)  
 $\sqrt{\ln \frac{5x-x^2}{4}}$

2. Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}+x-1}{\sqrt{x^2+1}+x+1}$  να βρεθεί το πεδίο ορισμού της και να αποδειχθεί αν είναι άρτια ή περιττή.

3. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$  είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί η αντίστροφη της.

4. Αν  $f(x) = \sqrt{x-1}$  και  $g(x) = \sqrt{4-x}$  να βρεθούν ανα ορίζονται οι συναρτήσεις  $f \circ g, g \circ f$  και  $f \circ f$  καθώς και οι τύποι αυτών.

Ομοίως για τις συναρτήσεις  $f(x) = \sqrt{9-x^2}$  και  $g(x) = x+5$ .

5. Δίνονται οι συναρτήσεις:  $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1}-x)$  και  $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = x+1$   
α) Να δειχθεί ότι η  $f(x)$  είναι περιττή.  
β) Να δειχθεί ότι η  $f(x)$  είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί η αντίστροφη της.  
γ) Να βρεθεί η συνάρτηση  $g \circ f^{-1}$ .

6. Αν  $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ , δείξτε ότι  $f^{-1} = f$ .

7. Να αναπτυχθούν κατά σειρά MacLaurin οι ακόλουθες συναρτήσεις  
α)  $f(x) = \sin x$     β)  $f(x) = \cos x$     γ)  $f(x) = e^x$     δ)  $f(x) = \ln|1+x|$

8. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα  $\int_0^1 \frac{1-e^{-x^2}}{x^2} dx$  (Θέμα εξέτασεων).

9. Να υπολογιστεί το  $\sin(0.3)$  με ακρίβεια 4 δεκαδικών ψηφίων. (Θέμα εξέτασεων).

10. Το ανάπτυγμα μιας συνάρτησης κατά σειρά Taylor προσεγγίζεται από τον τύπο  $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ , όπου  $R_n(x)$  είναι το υπόλοιπο ή το σφάλμα που κάνουμε κατά τον υπολογισμό μιας συνάρτησης με τη μορφή σειράς. Το υπόλοιπο αυτό στη μορφή

Lagrange έχει τον τύπο  $R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) (x-c)^{n+1}$  με  $c < \xi < x$ . Με βάση τα

παραπάνω να υπολογιστεί με σειρά 5 όρων το ολοκλήρωμα  $\int_0^1 e^{x^2} dx$  και να βρεθεί η

τάξη μεγέθους του μέγιστου σφάλματος που κάνουμε κατά τον υπολογισμό του.  
(Θέμα εξέτασεων)