Ανάκληση Πληροφορίας

Διδάσκων –
Δημήτριος Κατσαρός

Διάλεξη 15η: 12/05/2014

Το πρόβλημα PageRank ως γραμμικό σύστημα

PageRank ως γραμμικό σύστημα

- Το πρόβλημα του PageRank μπορεί να γραφεί είτε ως
  - Πρόβλημα ιδιοδιανύσματος: $\boldsymbol{\pi}^T(\alpha\mathbf{S}+(1-\alpha)\mathbf{e}\mathbf{v}^T) = \boldsymbol{\pi}^T$
  - Πρόβλημα Γραμμικού συστήματος: $\boldsymbol{\pi}^T(\mathbf{I}-\alpha\mathbf{S})= (1-\alpha)\mathbf{v}^T$
- Ποια από τις δυο μορφές είναι προτιμότερες;
- Υπάρχει κάποια διαφορά;

Ιδιότητες του (**I**-α**S**)

1. (**I**-α**S**) είναι ένας **M** πίνακας
2. O (**I**-α**S**) δεν είναι ιδιόμορφος
3. Τα αθροίσματα γραμμών του (**I**-α**S**) είναι ίσα προς 1-α
4. $||(\mathbf{I}-\alpha\mathbf{S})||_{\infty} = 1 + \alpha$
5. Αφού ο (**I**-α**S**) είναι ένας **M** πίνακας, $(\mathbf{I}-\alpha\mathbf{S})^{-1} \geq 0$
6. Τα αθροίσματα γραμμών του $(\mathbf{I}-\alpha\mathbf{S})^{-1}$ είναι $(1-\alpha)^{-1}$. Επομένως, $||(\mathbf{I}-\alpha\mathbf{S})^{-1}||_{\infty} = (1 - \alpha)^{-1}$
7. O *condition number* είναι $\kappa_{\infty}(\mathbf{I}-\alpha\mathbf{S}) = (1+\alpha)/(1-\alpha)$

Επειδή ο (**I**-α**S**) είναι αρκετά πυκνός, θα θέλαμε να ελέγξουμε εάν παρόμοιες ιδιότητες ισχύουν για τον (**I**-α**H**)

Ιδιότητες του ($\mathbf{I}$-α$\mathbf{H}$)

- Χρησιμοποιώντας το διάνυσμα για τους dangling κόμβους $\mathbf{a}\mathbf{v}^T$
- Το γραμμικό σύστημα: $\boldsymbol{\pi}^T(\mathbf{I}-\alpha\mathbf{H}-\alpha\mathbf{a}\mathbf{v}^T) = (1-\alpha)\mathbf{v}^T$
- Εάν δέσουμε $\boldsymbol{\pi}^T\mathbf{a} = \gamma$, τότε το γραμμικό σύστημα γίνεται: $\boldsymbol{\pi}^T(\mathbf{I}-\alpha\mathbf{H}) = (1-\alpha+\alpha\gamma)\mathbf{v}^T$
- Η scalar μεταβλητή γ κρατά το συνολικό PageRank των dangling κόμβων
- Αφού στο τέλος θα εφαρμόσουμε την εξίσωση κανονικοποίησης $\boldsymbol{\pi}^T\mathbf{e} = 1$, διαλέγουμε αυθαίρετα μια τιμή για το γ, π.χ., $\gamma = 1$

Το PageRank ως γραμμικό σύστημα

- **ΘΕΩΡΗΜΑ**. Επιλύοντας το γραμμικό σύστημα $\mathbf{x}^T(\mathbf{I}-\alpha\mathbf{H}) = \mathbf{v}^T$ και θέτοντας $\boldsymbol{\pi}^T=\mathbf{x}^T/\mathbf{x}^T\mathbf{e}$ έχουμε ως αποτέλεσμα το διάνυσμα PageRank

  Επιπλέον, ο $(\mathbf{I}-\alpha\mathbf{H})$ έχει πολλές από τις ιδιότητες του $(\mathbf{I}-\alpha\mathbf{S})$

Ιδιότητες του (**I**-α**H**)

- Ο (**I**-α**H**) είναι ένας **M** πίνακας
- Ο (**I**-α**H**) δεν είναι ιδιόμορφος
- Τα αθροίσματα γραμμών του (**I**-α**H**) είναι είτε ίσα προς 1-α για τους μη-dangling κόμβους ή 1 για τους dangling κόμβους
- $||(\mathbf{I}-\alpha\mathbf{H})||_{\infty} = 1 + \alpha$
- Αφού ο (**I**-α**H**) είναι ένας **M** πίνακας, $(\mathbf{I}-\alpha\mathbf{H})^{-1} \geq 0$
- Τα αθροίσματα γραμμών του $(\mathbf{I}-\alpha\mathbf{H})^{-1}$ είναι 1 για τους dangling κόμβους και μικρότερο ή ίσο με $(1-\alpha)^{-1}$ για τους μη dangling κόμβους
- Ο *condition number* είναι $\kappa_{\infty}(\mathbf{I}-\alpha\mathbf{H}) \leq (1+\alpha)/(1-\alpha)$
- Η γραμμή του $(\mathbf{I}-\alpha\mathbf{H})^{-1}$ που αντιστοιχεί στον dangling κόμβο i είναι το $\mathbf{e}_i^T$, όπου $\mathbf{e}^i$ είναι η i-οστή στήλη του μοναδιαίου πίνακα

Σχόλια

- Για μικρά προβλήματα, η προσέγγιση αυτή είναι πολύ πιο γρήγορη, π.χ., company Intranet
- Επειδή καθώς το α τείνει στο 1 η power μέθοδος αργεί να συγκλίνει
- Νέοι ερευνητικοί ορίζοντες
- Φυσικά, καθώς το α τείνει στο 1 τα ζητήματα ευαισθησίας παραμένουν και για το γραμμικό σύστημα

Απόδειξη 1: PageRank ως Γραμμικό Σύστημα

- Το $\boldsymbol{\pi}^T$ είναι το PageRank διάνυσμα εάν ικανοποιεί $\boldsymbol{\pi}^T\mathbf{G}=\boldsymbol{\pi}^T$ και $\boldsymbol{\pi}^T\mathbf{e}=1$
- Προφανώς, $\boldsymbol{\pi}^T\mathbf{e} = 1$
- Το να δείξουμε ότι ισχύει $\boldsymbol{\pi}^T\mathbf{G}=\boldsymbol{\pi}^T$ είναι ισοδύναμο με το να δείξουμε ότι $\boldsymbol{\pi}^T(\mathbf{I}-\mathbf{G}) = \mathbf{0}^T$, το οποίο είναι ισοδύναμο με το να δείξουμε ότι $\mathbf{x}^T(\mathbf{I}-\mathbf{G}) = \mathbf{0}^T$

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^T(\mathbf{I}-\mathbf{G}) &= \mathbf{x}^T(\mathbf{I}-\alpha\mathbf{H}-\alpha\mathbf{a}\mathbf{v}^T-(1-\alpha)\mathbf{e}\mathbf{v}^T) \\
&= \mathbf{x}^T(\mathbf{I}-\alpha\mathbf{H}-\mathbf{x}^T(\alpha\mathbf{a}+(1-\alpha)\mathbf{e})\mathbf{v}^T) \\
&= \mathbf{v}^T-\mathbf{v}^T = \mathbf{0}^T
\end{aligned}$$

Απόδειξη 1: PageRank ως Γραμμικό Σύστημα

- Η προηγούμενη γραμμή προκύπτει από το γεγονός ότι $\mathbf{x}^T(\alpha a+(1-\alpha)\mathbf{e})\mathbf{v}^T$, επειδή:

$$
\begin{aligned}
1 &= \mathbf{v}^T\mathbf{e} \\
&= \mathbf{x}^T(\mathbf{I} - \alpha\mathbf{H})\mathbf{e} \\
&= \mathbf{x}^T\mathbf{e} - \alpha\mathbf{x}^T\mathbf{H}\mathbf{e} \\
&= \mathbf{x}^T\mathbf{e} - \alpha\mathbf{x}^T(\mathbf{e} - \mathbf{a}) \\
&= (1 - \alpha)\mathbf{x}^T\mathbf{e} + \alpha\mathbf{x}^T\mathbf{a}
\end{aligned}
$$

Απόδειξη 2: PageRank ως Γραμμικό Σύστημα

- Ας δούμε μια εναλλακτική θεώρηση του PageRank ως γραμμικό σύστημα. Έχουμε δει ότι:

$$\mathbf{S} = \mathbf{H} + \mathbf{a}(\frac{1}{n}\mathbf{e}^T) \quad \text{or} \quad \mathbf{S} = \mathbf{H} + \mathbf{a}\mathbf{v}^T \qquad \mathbf{G} = \alpha\mathbf{S} + (1-a)\mathbf{e}\mathbf{v}^T$$

- Ξεκινώντας από τον ορισμό του PageRank ως πρόβλημα ιδιοδιανύσματος (eigenvector), έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\pi^T\mathbf{G} &= \pi^T & \Longrightarrow \\
\pi^T(\alpha\mathbf{S} + (1-\alpha)\mathbf{e}\mathbf{v}^T) &= \pi^T & \Longrightarrow \\
(1-\alpha)\pi^T\mathbf{e}\mathbf{v}^T &= \pi^T(\mathbf{I} - \alpha\mathbf{S}) & \Longrightarrow \\
(1-\alpha)(\pi^T\mathbf{e})\mathbf{v}^T &= \pi^T(\mathbf{I} - \alpha\mathbf{S}) & \overset{\pi^T\mathbf{e}=1}{\Longrightarrow} \\
(1-\alpha)\mathbf{v}^T &= \pi^T(\mathbf{I} - \alpha\mathbf{S}) & \overset{transposing}{\Longrightarrow} \\
(1-\alpha)\mathbf{v} &= (\mathbf{I} - \alpha\mathbf{S})^T\pi & \Longrightarrow \\
(1-\alpha)\mathbf{v} &= (\mathbf{I} - \alpha\mathbf{H}^T - \alpha\mathbf{v}\mathbf{a}^T)\pi & \Longrightarrow \\
(\mathbf{I} - \alpha\mathbf{H}^T - \alpha\mathbf{v}\mathbf{a}^T)\pi &= (1-\alpha)\mathbf{v} & \text{Linear System Formulation}
\end{aligned}$$

Απόδειξη 2: PageRank ως Γραμμικό Σύστημα

- Έστω ότι: $\mathbf{R} = \mathbf{I} - \alpha \mathbf{H}^T$
- Από το θεώρημα Sherman-Morrison, γνωρίζουμε ότι ο αντίστροφος μιας rank-one update u⊗w πάνω σε έναν πίνακα A μπορεί να γραφεί ως συνάρτηση του αντιστρόφου του A ως εξής:

$$\left(\mathbf{A} + \mathbf{u} \otimes \mathbf{w}\right)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}) \otimes (\mathbf{w}\mathbf{A}^{-1})}{1 + \mathbf{w}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}}$$

- Συνεπώς, στη δική μας περίπτωση για τον **R** έχουμε ότι:

$$(\mathbf{R} - \alpha \mathbf{v}\mathbf{a}^T)^{-1} = \mathbf{R}^{-1} + \frac{\mathbf{R}^{-1}\mathbf{v}\mathbf{a}^T\mathbf{R}^{-1}}{\frac{1}{\alpha} + \mathbf{a}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{v}}$$

Απόδειξη 2: PageRank ως Γραμμικό Σύστημα

- Από την έκφραση του PageRank ως γραμμικού συστήματος:

$$(\mathbf{I} - \alpha\mathbf{H}^T - \alpha\mathbf{v}\mathbf{a}^T)\pi = (1-\alpha)\mathbf{v}$$

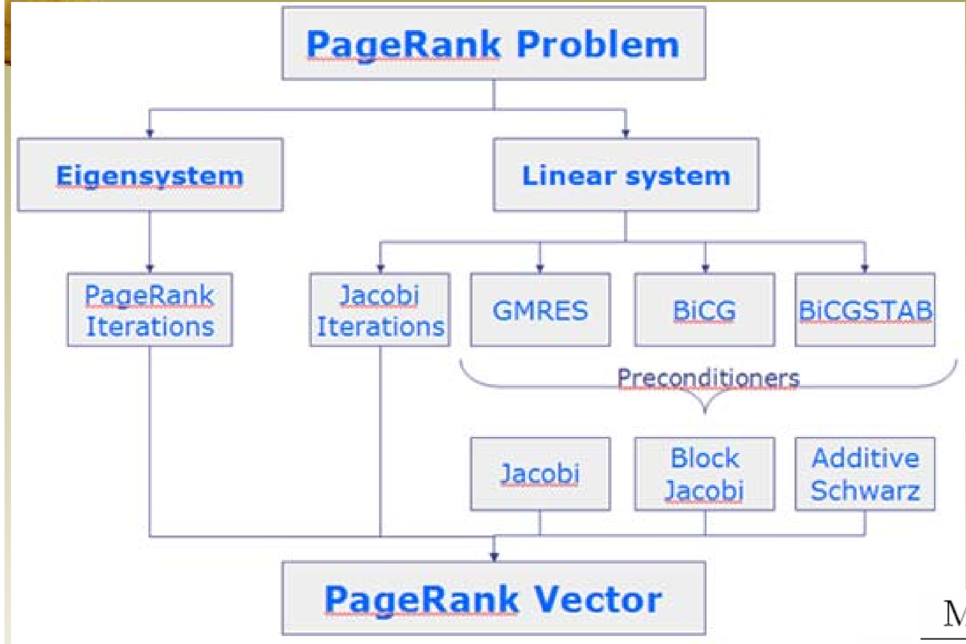
- με $\mathbf{R} = \mathbf{I} - \alpha\mathbf{H}^T$
- έχουμε $(\mathbf{R} - \alpha\mathbf{v}\mathbf{a}^T)\pi = (1-\alpha)\mathbf{v}$
- άρα $(\mathbf{R} - \alpha\mathbf{v}\mathbf{a}^T)^{-1}(\mathbf{R} - \alpha\mathbf{v}\mathbf{a}^T)\pi = (1-\alpha)(\mathbf{R} - \alpha\mathbf{v}\mathbf{a}^T)^{-1}\mathbf{v}$
- Συνεπώς:

$$\begin{aligned}\pi &= (1-\alpha)\left(\mathbf{R}^{-1} + \frac{\mathbf{R}^{-1}\mathbf{v}\mathbf{a}^T\mathbf{R}^{-1}}{\frac{1}{\alpha} + \mathbf{a}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{v}}\right)\mathbf{v} \\ &= (1-\alpha)\left(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{v} + \frac{\mathbf{R}^{-1}\mathbf{v}\mathbf{a}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{v}}{\frac{1}{\alpha} + \mathbf{a}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{v}}\right)\end{aligned}$$

Απόδειξη 2: PageRank ως Γραμμικό Σύστημα

- Έστω: $$\mathbf{R}\mathbf{y} = \mathbf{v} \Longrightarrow \mathbf{y} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{v}$$
- τότε
$$\pi = (1-\alpha)\left(\mathbf{y} + \frac{\mathbf{y}\mathbf{a}^T\mathbf{y}}{\frac{1}{\alpha} + \mathbf{a}^T\mathbf{y}}\right) \Longrightarrow$$
$$\pi = (1-\alpha)\left(1 + \frac{\mathbf{a}^T\mathbf{y}}{\frac{1}{\alpha} + \mathbf{a}^T\mathbf{y}}\right)\mathbf{y} \Longrightarrow$$
$$\pi = \gamma\mathbf{y}$$
- όπου $$\gamma = (1-\alpha)\left(1 + \frac{\mathbf{a}^T\mathbf{y}}{\frac{1}{\alpha} + \mathbf{a}^T\mathbf{y}}\right)$$
- Αυτό σημαίνει ότι αφού υπολογίσω το **y** με γνωστούς τρόπους, μπορώ να βρω το **π** εύκολα, αφού εφαρμόσω μια κατάλληλη κανονικοποίηση στο **y**, ώστε $|\boldsymbol{\pi}|_1=1$

Παράλληλες υλοποιήσεις του PageRank



Method	IP	SAXPY	MV	Storage
PAGERANK		1	1	$M + 3v$
JACOBI		1	1	$M + 3v$
GMRES	$i + 1$	$i + 1$	1	$M + (i + 5)v$
BiCG	2	5	2	$M + 10v$
BiCGSTAB	4	6	2	$M + 10v$

Table 1: Computational Requirements. Operations per iteration: IP counts inner products, SAXPY counts AXPY operations, MV counts matrix vector multiplications, and Storage counts the number of matrices and vectors required for the method.

Απαιτήσεις από τη μέθοδο

- Work with nonsymmetric matrices
- Be easily parallelizable
- Μέθοδοι
  - Power iterations
  - Jacobi iterations
  - Krylov subspace methods
    - Generalize Minimum Residual (GMRES)
    - Biconjugate Gradient (BiCG)
    - Quasi-Minimal Residual (QMR)
    - Conjugate Gradient Squared (CGS)
    - Biconjugate Gradient Stabilized (BiCGSTAB)
    - Chebyshev Iterations

Δεδομένα πειραματισμού

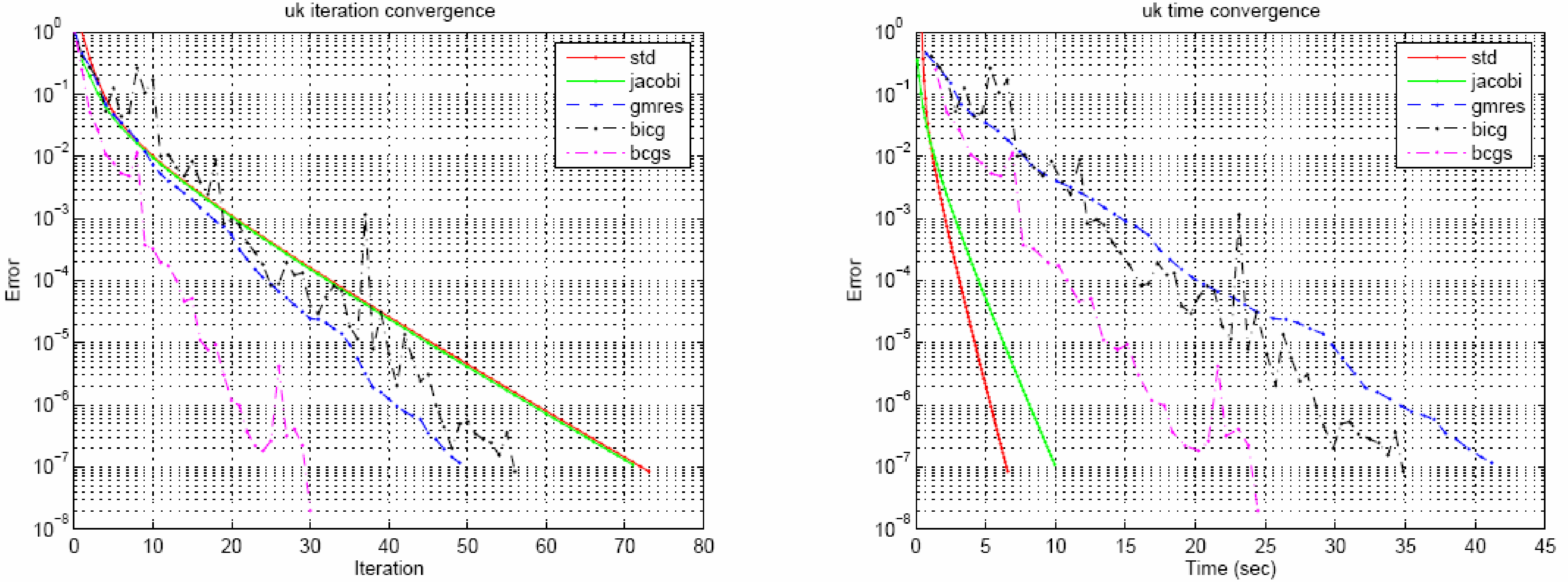
Name	Nodes	Links	Storage Size
edu	2M	14M	176 MB
yahoo-r2	14M	266M	3.25 GB
uk	18.5M	300M	3.67 GB
yahoo-r3	60M	850M	10.4 GB
db	70M	1B	12.3 GB
av	1.4B	6.6B	80 GB

Σύγκλιση 1/4

Graph	PR	Jacobi	GMRES	BiCG	BCGS
edu 20 procs	84 0.06 s	84 0.06 s	21† 0.6 s	44* 0.85 s	21* 0.41 s
yahoo-r2	71	65	12	20	10
uk 60 procs	73 0.08 s	71 0.14 s	22* 0.8 s	25* 0.78 s	11* 1.05 s
yahoo-r3 60 procs	76 2.4 s	75 2.2 s			
db 60 procs	62 13 s	58 12 s	29 22 s	45 21 s	15* 21 s
av 140 procs	72 30 s	76 30 s			26 60 s

In the table, the first line for each graph denotes the number of iterations required for each method to converge to an absolute residual value of 10–7. The second line shows the mean time per iteration at the given number of processors. For the Krylov subspace methods, no superscript means we used no preconditioner, whereas * denotes a block Jacobi preconditioner and † denotes an additive Schwartz preconditioner

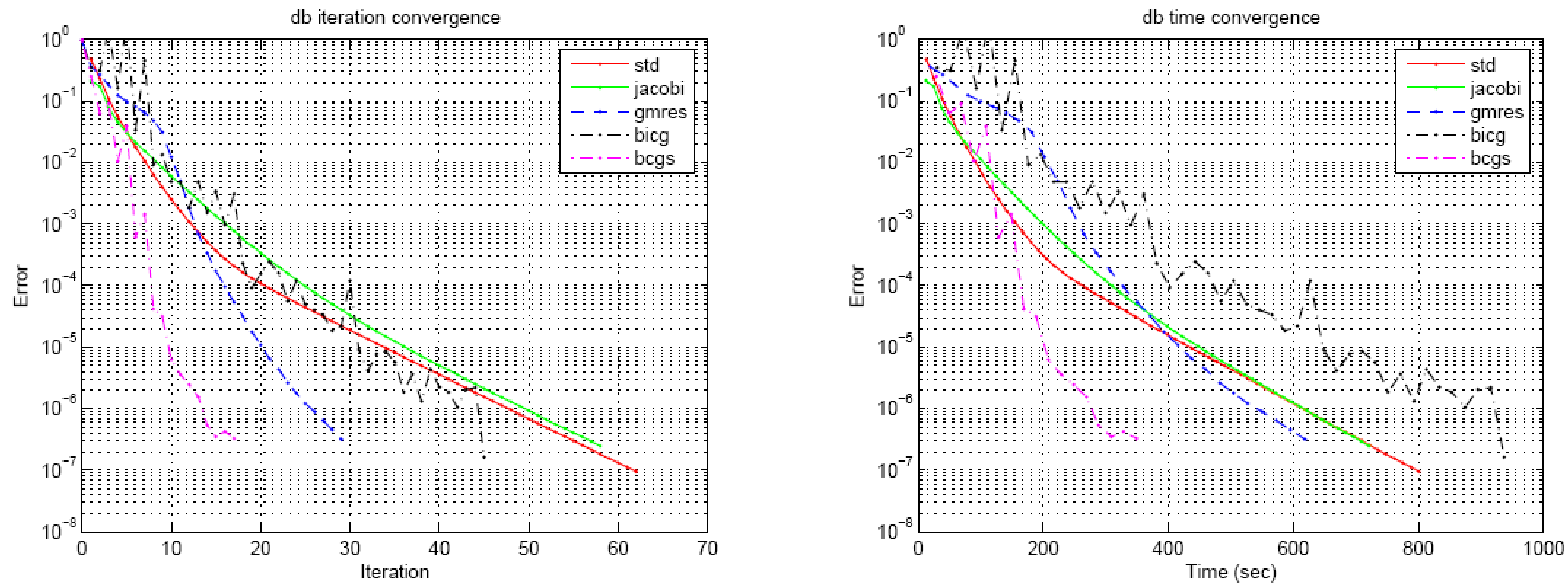
Σύγκλιση 2/4



(a) Convergence Iterations (b) Convergence Time

Figure 4: Convergence of iterative methods on the "uk" Web graph.

Σύγκλιση 3/4

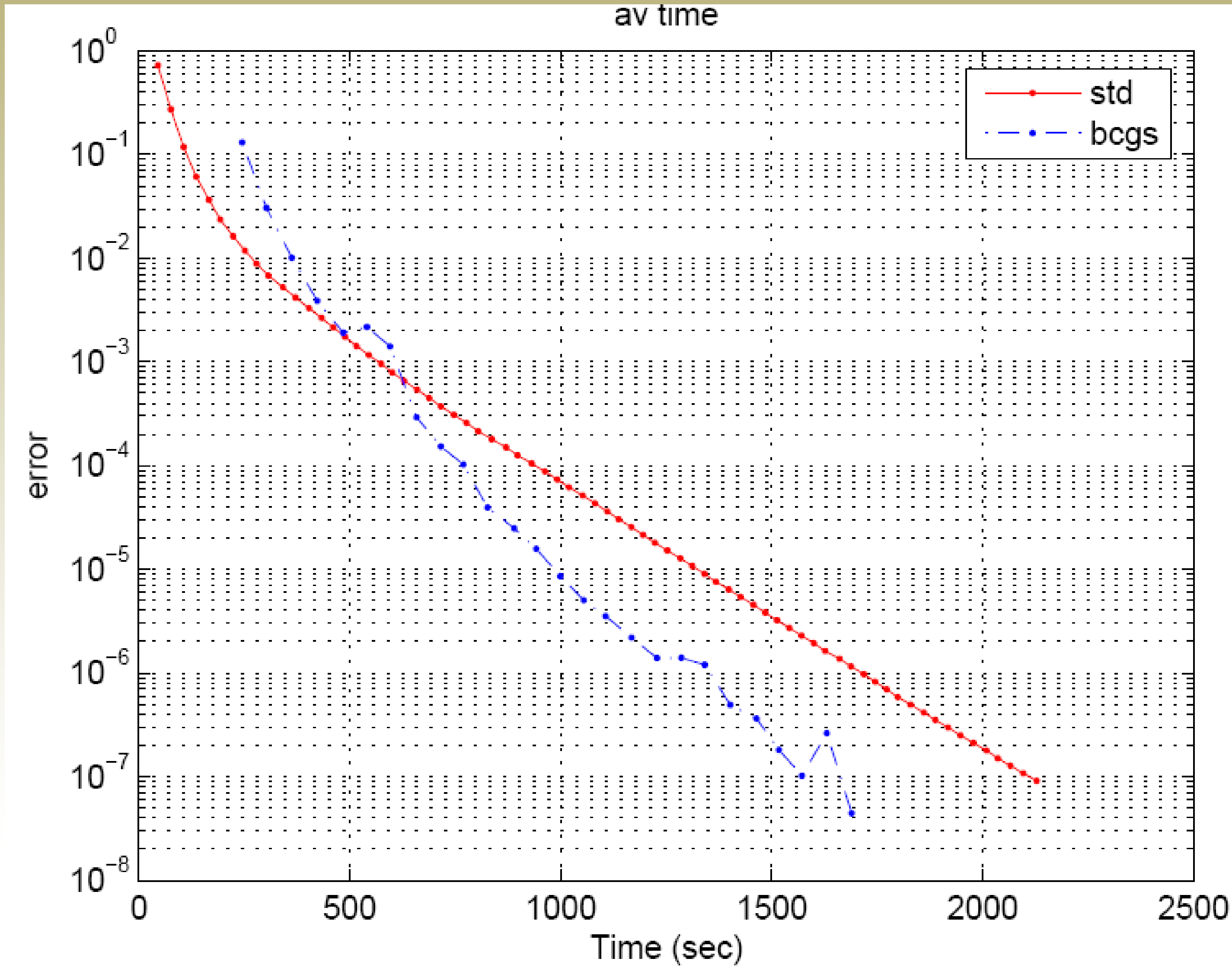


(a) Convergence Iterations

(b) Convergence Time

Figure 5: Convergence of iterative methods on the "db" Host graph.

Σύγκλιση 4/4



av time
std
bcgs
error
Time (sec)
10^0
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
10^{-6}
10^{-7}
10^{-8}
0
500
1000
1500
2000
2500

Σύγκλιση και τηλεμεταφορά