Διαφορικές εξισώσεις μεγαλύτερης του 1 τάξης, με συνοριακές συνθήκες.

Π.χ.

$$g_1(x)u''(x) + g_2 u'(x) + g_3 u(x) = f(x), \quad x \in [a,b]$$

$u(a) = u_a$

$u(b) = u_b$

Γενική μορφή για δεύτερης τάξης

$$\frac{d}{dx}\left(g_1(x)\frac{du}{dx}\right) + g_2 u(x) = f(x), \quad x\in[a,b]$$

$u(a) = u_a$ ή $\frac{du}{dx}(a) = u'_a$

$u(b) = u_b$ ή $\frac{du}{dx}(b) = u'_b$

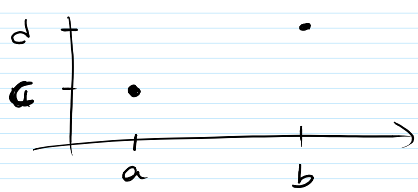
Επιβάλλεται 1 τουλάχιστον συνθήκη να αφορά στη u για το μονοσήμαντο της λύσης

2ης τάξης Σ.Δ.Ε. με συνοριακές συνθήκες

$$u'' = g(u, u', t), \quad t \in (a,b)$$

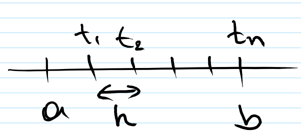
(1) $u(a) = c$

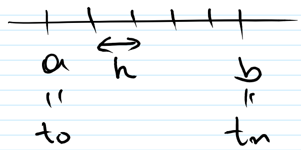
$u(b) = d$



1) Διακριτοποίηση χωρίου
2) " παραγώγου

1) Διακριτοποίηση χωρίου (ομοιόμορφη) σε n υποδιαστήματα πλάτους $\frac{b-a}{n} = h$





πλάτους $\frac{b-a}{n}=h$

$t_i = a+ih \,,\; i=0,..n$

Άρα η αρχική ΣΔΕ μετατρέπεται σε σύστημα ΔΕ..

$$u''(t_i) = g\left(u(t_i),\, u'(t_i),\, t_i\right),\; i=1,\dots,n-1$$
$$u(t_0)=c \qquad (2)$$
$$u(t_n)=d$$

2) Διακριτοποίηση των παραγώγου

$$u'(t_i) = \frac{u_{i+1}-u_i}{h} + O(h)$$

$$u'(t_i) = \frac{u_i-u_{i-1}}{h} + O(h)$$

$$u'(t_i) = \frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2h} + O(h^2) \; *$$

$$u''(t_i) = \frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2} + O(h^2) \; *$$

Απόδειξη των $u''(0) = \frac{u(h)-2u(0)+u(-h)}{h^2} + O(h^2)$

$$u(h) = u(0) + h\,u'(0) + \frac{h^2 u''(0)}{2} + \frac{h^3}{3!}u'''(0) + \frac{h^4}{4!}u^{(4)}(0) + \frac{h^5}{5!}u^{(5)}(0) \dots$$

$$u(-h) = u(0) - h\,u'(0) + \frac{h^2}{2}u''(0) - \frac{h^3}{3!}u'''(0) + \frac{h^4}{4!}u^{(4)}(0) - \frac{h^5}{5!}u^{(5)}(0)$$

Προσθέτω κατά μέλη:

$$u(h)+u(-h) = 2u(0) + \cancel{2}\frac{h^2}{\cancel{2}}u''(0) + \underbrace{2\cdot\frac{h^4}{4!}u^{(4)}(0) + 2\frac{h^6}{6!}u^{(6)}(0) + \dots}$$

$$u(h)-2u(0)+u(-h) = h^2 u''(0) + 2\cdot\frac{h^4}{4!}u^{(4)}(\xi)$$

$$\boxed{u''(0) = \frac{u(h)-2u(0)+u(-h)}{h^2}} + \underbrace{\frac{h^{\cancel{4}\,2}}{\cancel{h^2}}\frac{2}{4!}u^{(4)}(\xi)}_{O(h^2)}$$

Οπότε η (2) μετατρέπεται σε:

$$\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2} = g\left(u_i, \frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2h}, t_i\right), \quad i=1,\dots,n-1 \qquad (3)$$

$u_0 = c$

$u_n = d$

Ειδική περίπτωση - Γραμμική ΣΔΕ.

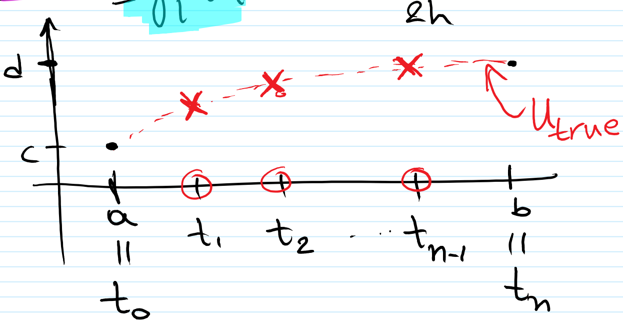
δηλ. $g(u,u',t) = \gamma(t)u(t) + \delta(t)u'(t) + \varepsilon(t)$

Οπότε η (3) παίρνει τη μορφή:

$$\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2} = \gamma_i u_i + \delta_i \frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2h} + \varepsilon_i, \quad i=1,2,\dots,n-1$$

$u_0 = c$

$u_n = d$



$i=0$: $u_0 = c$

$i=1$: $$\frac{u_2-2u_1+u_0}{h^2} = \gamma_1 u_1 + \delta_1 \frac{u_2-u_0}{2h} + \varepsilon_1$$

$i=2$: $$\frac{u_3-2u_2+u_1}{h^2} = \gamma_2 u_2 + \delta_2 \frac{u_3-u_1}{2h} + \varepsilon_2$$

$\vdots$

Άρα:

$$(4)\quad \begin{cases} \left(\frac{1}{h^2}+\frac{\delta_i}{2h}\right)u_{i-1} + \left(-\frac{2}{h^2}-\gamma_i\right)u_i + \left(\frac{1}{h^2}-\frac{\delta_i}{2h}\right)u_{i+1} = \varepsilon_i, \quad i=1,\dots,n-1 \\ u_0 = c \end{cases}$$

(4) $\begin{cases} \ldots \frac{\quad}{h} \ldots \frac{\quad}{2h} \\ u_0 = c \\ u_n = d \end{cases}$

$i=0 \quad u_0 = c$

$i=1 \quad \boxed{\left(\frac{1}{h^2}+\frac{\delta_1}{2h}\right)u_0} + \left(-\frac{2}{h^2}-\gamma_1\right)u_1 + \left(\frac{1}{h^2}-\frac{\delta_1}{2h}\right)u_2 = \varepsilon_1$

$i=2 \quad \left(\frac{1}{h^2}+\frac{\delta_2}{2h}\right)u_1 + \left(-\frac{2}{h^2}-\gamma_2\right)u_2 + \left(\frac{1}{h^2}-\frac{\delta_2}{2h}\right)u_3 = \varepsilon_2$

$\vdots$

$i=n-1 \quad \left(\frac{1}{h^2}+\frac{\delta_{n-1}}{2h}\right)u_{n-2} + \left(-\frac{2}{h^2}-\gamma_{n-1}\right)u_{n-1} + \boxed{\left(\frac{1}{h^2}-\frac{\delta_{n-1}}{2h}\right)u_n} = \varepsilon_{n-1}$

$i=n \quad u_n = d$

Σε μορφή πίνακα γράφεται ως:

$Mu = \varepsilon$ όπου

$$M = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{2}{h^2}-\gamma_1 & \frac{1}{h^2}-\frac{\delta_1}{2h} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{h^2}+\frac{\delta_2}{2h} & -\frac{2}{h^2}-\gamma_2 & \frac{1}{h^2}-\frac{\delta_2}{2h} & 0 & & & & \vdots \\ 0 & \frac{1}{h^2}+\frac{\delta_3}{2h} & -\frac{2}{h^2}-\gamma_3 & \frac{1}{h^2}-\frac{\delta_3}{2h} & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \frac{1}{h^2}-\frac{\delta_{n-2}}{2h} \\ 0 & \cdots & & & 0 & & \frac{1}{h^2}+\frac{\delta_{n-1}}{2h} & -\frac{2}{h^2}-\gamma_{n-1} \end{bmatrix}}_{(n-1)\times(n-1)}$$

και

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 - \overset{c}{\cancel{u_0}}\left(\frac{1}{h^2}+\frac{\delta_1}{2h}\right) \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \qquad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{E} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 - \cancel{u_0}\left(\frac{1}{h^2} + \frac{\quad}{2h}\right) \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_{n-2} \\ \varepsilon_{n-1} - \cancel{u_n}\left(\frac{1}{h^2} - \frac{\delta_{n-1}}{2h}\right) \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{bmatrix}$$

d

Παράδειγμα

$\gamma(t) = t^2$, $\delta(t) = 0$, $\varepsilon(t) = t$,

$[a, b] = [0, 1]$

$u(a) = 0 = c$

$u(b) = 0 = d$

Άρα η ΣΔΕ:

$$u''(t) = t^2 u(t) + t, \quad t \in [0, 1]$$
$$u(0) = 0$$
$$u(1) = 0$$

Αν $n = 100$, $h = \frac{1}{100}$, $t_i = 0 + \frac{i}{100} = \frac{i}{100}$, $i = 0, \dots, 100$

Άρα το τελικό σύστημα:

$M \cdot u = \varepsilon$

όπου $M = \begin{bmatrix} -\frac{2}{h^2} + \gamma_1 & \frac{1}{h^2} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} + \gamma_2 & \frac{1}{h^2} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \end{bmatrix}$

$$
\begin{bmatrix}
\cdots & & & \\
0 & \ddots & \ddots & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{h^2} \\
0 & \cdots\ 0 & \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2}+\gamma_{n-1}
\end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix}
-2(100)^2+\frac{1}{100} & (100)^2 & 0 & \cdots & 0 \\
(100)^2 & -2(100)^2+\frac{2}{100} & (100)^2 & \ddots & 0 \\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & (100)^2 \\
0 & \cdots\ 0 & & (100)^2 & -2(100)^2+\frac{99}{100}
\end{bmatrix}
$$

και $\quad \varepsilon = \begin{bmatrix} 1/100 \\ 2/100 \\ \vdots \\ 99/100 \end{bmatrix}$

Για λόγους πεπερασμένης αριθμητικής πολ/με το σύστημα (4) με h^2 και έτσι λύνουμε το:

$$
(5)\quad \begin{cases}
\left(1+\delta_i \frac{h}{2}\right)u_{i-1} + \left(-2-\gamma_i h^2\right)u_i + \left(1-\frac{\delta_i}{2}h\right)u_{i+1} = h^2 \varepsilon_i & i=1,\dots,n-1 \\
u_0 = c \\
u_n = d
\end{cases}
$$

όπου σε μορφή πίνακα γράφεται ως: $Au=r$, όπου:

$$
\begin{bmatrix}
-(2+\gamma_1 h^2) & \left(1-\frac{\delta_1}{2}h\right) & 0 & \cdots & 0 \\
\left(1+\frac{\delta_2}{2}h\right) & -(2+\gamma_2 h^2) & \left(1-\frac{\delta_2}{2}h\right) & \ddots & \vdots \\
\cdots & & \ddots & & \ddots
\end{bmatrix}
$$

$$A = \begin{bmatrix} \left(1+\frac{\delta_2}{2}h\right) & -\left(2+\gamma_2 h^2\right) & \left(1-\frac{\delta_2}{2}h\right) & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \left(1-\frac{\delta_{n-2}}{2}h\right) \\ 0 & \cdots & 0 & \left(1+\frac{\delta_{n-1}}{2}h\right) & -\left(2+\gamma_{n-1}h^2\right) \end{bmatrix}$$

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{bmatrix} \qquad \text{και}$$

$$r = \begin{bmatrix} h\varepsilon_1^2 - \left(1+\frac{\delta_1}{2}h\right)c \\ h^2\varepsilon_2 \\ \vdots \\ h^2\varepsilon_{n-2} \\ h^2\varepsilon_{n-1} - \left(1-\frac{\delta_{n-1}}{2}h\right)d \end{bmatrix}$$