Μεγαλύτερης (από πρώτης) τάξης ΣΔΕ.

⊛ $u'' = g(u', u, t) \quad t \in [a,b]$

⊛ συνθήκες (?)

Συνθήκες: (i) αρχικές
(ii) συνοριακές

(i) Αρχικές συνθήκες:

$u(a) = c$

$u'(a) = d$

$u'' = g(u', u, t) \quad t \in [a,b]$

Μετατρέπω το 2ης τάξης πρόβλημα σε 1ης τάξης (σύστημα)
$\left\{ \begin{array}{l} V' = g(V, t), \ t \in [a,b] \\ V(a) = V_0 \end{array} \right.$

Ορίζω $V_1 = u$

$V_2 = u' = V_1'$

Κάνω αντικατάσταση στο αρχικό πρόβλημα:

$V_2' = g(V_2, V_1, t) \quad t \in [a,b]$

$V_1(a) = c$

$V_2(a) = d$

Χρειάζομαι την $V_1' = \dots$

Όμως $V_1' = V_2$

Άρα το σύστημα ΣΔΕ καταλήγει σε:

$$\left. \begin{array}{l} V_1' = V_2 \\ V_2' = g(V_2, V_1, t) \end{array} \right\} t \in [a,b]$$

$V_1(a) = c$

$V_2(a) = d$

Αν $V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

τότε

$$\boxed{\begin{aligned} & V' = G(V,t), \quad t \in [a,b] \\ & V(a) = V_0 \end{aligned}}$$

1ης τάξης ΣΔΕ.

όπου $G(V,t) = \begin{cases} V_2 \\ g(V_2, V_1, t) \end{cases}$

και $V_0 = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$

Συνεχίζω "όπως" και στις 1ης τάξης ΣΔΕ με πραγματική λύση:

Απάντηση:

(*) Διακριτοποιώ το χωρίο της ΔΕ.

Αν πάρω n διαστήματα στο $[a,b]$.

$t_i = a + ih \quad i = 0, \dots, n$

$h = \frac{b-a}{n}$

Οπότε

$V'(t_i) = G(V(t_i), t_i) \quad i = 0, 1, \dots, n$

$V(t_0) = V_0 = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$

(*) Διακριτοποίηση της παραγώγου!

Άμεση Euler:

$$\left.\begin{aligned} & V'(t_i) = \frac{V(t_{i+1}) - V(t_i)}{h} = \frac{V^{(i+1)} - V^{(i)}}{h} \\ & \text{Όμως} \quad V'(t_i) = G(V^{(i)}, t_i) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{V^{(i+1)} - V^{(i)}}{h} = G(V^{(i)}, t_i)$$

Άρα

$$\boxed{V^{(i+1)} = V^{(i)} + h\,G(V^{(i)}, t_i), \quad i = 0, \dots, n-1}$$

$$\boxed{V^{(0)} = V_0 = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}}$$

Παράδειγμα – Ειδική Περίπτωση ΣΔΕ

$$u''(t) = \gamma(t)\,u(t) + \delta(t)\,u'(t) + \varepsilon(t), \quad t \in [a,b]$$

$$u(a) = c$$

$$u'(a) = d$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} V_1 = u \\ V_2 = u' \end{array}\right\} \begin{array}{l} V_1' = V_2 \\ V_2' = \gamma \cdot V_1 + \delta \cdot V_2 + \varepsilon \end{array}$$

$$V_1(a) = c$$

$$V_2(a) = d$$

$$\Downarrow$$

$$V' = G(V,t) = \begin{cases} V_2 \\ \gamma V_1 + \delta V_2 + \varepsilon \end{cases} = \underset{?}{M} \cdot V + \underset{?}{\ell}$$

$$V(a) = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

όπου:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \Leftrightarrow M(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \gamma(t) & \delta(t) \end{bmatrix}, \quad t \in [a,b]$$

$$\ell = \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon \end{bmatrix} \Leftrightarrow \ell(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon(t) \end{bmatrix}, \quad t \in [a,b].$$

⊛ Διακριτοποίηση χωρίου

$$t_i = a + ih, \quad i = 0, \dots, n, \quad h = \frac{b-a}{n}$$

⊛ Διακριτοποίηση παραγώγου (<u>Α.Ε.</u>)

$$\frac{V^{(i+1)} - V^{(i)}}{h} = G(V^{(i)}, t_i) = M^{(i)} \cdot V^{(i)} + \ell^{(i)} \quad i = 0, \dots, n-1$$

$$\boxed{\begin{array}{l} V^{(i+1)} = V^{(i)} + h \cdot M^{(i)} \cdot V^{(i)} + h\ell^{(i)}, \quad i = 0, \dots, n-1 \\ V^{(0)} = V_0 = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \end{array}}$$

$$V^{(0)} = V(t_0) = V(a) = \begin{bmatrix} V_1(a) \\ V_2(a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(a) \\ u'(a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα:

$\varepsilon(t) = 2t + 1$

$\gamma(t)=t \quad , \quad \delta(t)=t^3 \quad , \quad \varepsilon(t)=2t+1$

$[a,b]=[0,1]$

$\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\boxed{\begin{aligned} &u''(t)=t\cdot u(t)+t^3 u'(t)+2t+1 \quad , t\in[0,1] \\ &u(0)=0 \\ &u'(0)=0 \end{aligned}}$$

$\Downarrow$

- Διαμεριστοποίηση χωρίου $[0,1]$ με $n=10$
- Διαμεριστοποίηση παραγώγων σε Α.Ε.

$\Downarrow$

$t_i=0+i\frac{1}{10}=\frac{i}{10} \quad i=0,\dots,10 \quad , h=\frac{1}{10}$

$$V^{(i+1)}=V^{(i)}+h\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ t_i & (t_i)^3 \end{bmatrix}\cdot V^{(i)}+h\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 2t_i+1 \end{bmatrix}, \quad i=0,1\dots,9$$

Αρχικά $V^{(0)}=\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$V^{(1)}=\left(I+h\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ t_0 & t_0^3 \end{bmatrix}\right)\cancel{V^{(0)}}^{\,0}+h\begin{bmatrix} 0 \\ 2t_0+1 \end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 0 \\ 2\cdot 0+1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1/10 \end{bmatrix}$$

$\leftarrow$ τιμή της $u(t_1)=u(0.1)$

$\leftarrow$ τιμή της $u'(t_1)=u'(0,1)$

$$V^{(2)}=\left(I+h\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ t_1 & t_1^3 \end{bmatrix}\right)V^{(1)}+h\begin{bmatrix} 0 \\ 2t_1+1 \end{bmatrix}=$$

$$=\left(I+\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/10 & 1/1000 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 0 \\ 1/10 \end{bmatrix}+\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 0 \\ 12/10 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 1/10 \\ 1/100 & 1+10^{-4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1/10 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 12/100 \end{bmatrix}=\dots$$

$$\begin{bmatrix} 1/100 \\ 10^{-1}+10^{-5}+12/100 \end{bmatrix}$$

$\leftarrow$ τιμή $u(t_2)=u(0.2)$

$\leftarrow$ $u'(t_2)=u'(0.2)$

Διακριτοποίηση παραγώγου με Έμμεση Euler (Ε.Ε.)

$$\left.\begin{aligned} V'(t_i) &= \frac{V(t_i) - V(t_{i-1})}{h} = \frac{V^{(i)} - V^{(i-1)}}{h} \\ V'(t_i) &= G(V^{(i)}, t_i) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{V^{(i)} - V^{(i-1)}}{h} = G(V^{(i)}, t_i) \quad i=1,2,..,n$$

$$V^{(i)} - V^{(i-1)} = h\,G(V^{(i)}, t_i) \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} &V^{(i)} - h\,G(V^{(i)}, t_i) = V^{(i-1)} \quad i=1,..,n \\ &V^{(0)} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \end{aligned}}$$

Παράδειγμα - Ειδική περίπτωση ΣΔΕ

$$G(v,t) = \gamma(t)\,v_1(t) + \delta(t)\,v_2(t) + \varepsilon(t)$$

$$V^{(i)} - h\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \gamma(t_i) & \delta(t_i) \end{bmatrix} V^{(i)} - h\begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon(t_i) \end{bmatrix} = V^{(i-1)}, \quad i=1,..,n$$

$$\Leftrightarrow \left(I - h\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \gamma(t_i) & \delta(t_i) \end{bmatrix}\right) V^{(i)} = V^{(i-1)} + h\begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon(t_i) \end{bmatrix}, \quad i=1,..,$$

Παράδειγμα:

$\gamma(t) = t, \quad \delta(t) = t^3, \quad \varepsilon(t) = 2t+1$

$[a,b] = [0,1]$

$\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

- Διακριτοποίηση χωρίου $n=10, \ h=\frac{1}{10}$

$t_i = i/10$

- Διακριτοποίηση παραγώγων Ε.Ε.

$$\Downarrow$$

$$\left(I - \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ t_i & t_i^3 \end{bmatrix}\right) V^{(i)} = V^{(i-1)} + \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 0 \\ 2t_i+1 \end{bmatrix}$$

$$i = 1, 2, \ldots n$$

Άρα $V^{(0)} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\left(I - \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/10 & 1/1000 \end{bmatrix}\right) V^{(1)} = \cancelto{0}{V^{(0)}} + \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 0 \\ 2\frac{1}{10}+1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/10 \\ -1/100 & 1-10^{-4} \end{bmatrix} V^{(1)} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{12}{10} \end{bmatrix} \Rightarrow V^{(1)} = \ldots$$

ΗΥ213. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΑΡΧΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ ΓΙΑ ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Π. ΤΣΟΜΠΑΝΟΠΟΥΛΟΥ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Πρόβλημα Διαφορικών Εξισώσεων μεγαλύτερης τάξης

- Οι συνθήκες καθορίζουν τον τρόπο επίλυσης:
  - Αρχικές συνθήκες
  - Συνοριακές συνθήκες

Πρόβλημα Διαφορικών Εξισώσεων μεγαλύτερης τάξης με αρχικές συνθήκες

- Συνήθεις διαφορικές εξισώσεις μεγαλύτερης τάξης

$$u'' = g(u, u', t), \qquad t \in [a, b]$$

$$u(a) = c$$

$$u'(a) = d$$

- Ορίζουμε $v_1 = u, v_2 = u'$ και τότε

$$u'' = g(u, u', t)$$

$$\downarrow$$

$$v_2' = g(v_1, v_2, t)$$

$$v_1' = v_2$$

- → σύστημα διαφορικών εξισώσεων 1ης τάξης με αρχικές συνθήκες $v_1(\alpha) = c, v_2(\alpha) = d$

Πρόβλημα Διαφορικών Εξισώσεων μεγαλύτερης τάξης με αρχικές συνθήκες

- Τελικό σύστημα προς λύση

$$V' = G(V,t), \quad t \in [a,b]$$

$$V(a) = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

- όπου και τότε

$$V = \begin{bmatrix} \mathrm{v}_1 \\ \mathrm{v}_2 \end{bmatrix}, \quad V' = \begin{bmatrix} \mathrm{v}_1' \\ \mathrm{v}_2' \end{bmatrix}, \quad G(V,t) = \begin{bmatrix} \mathrm{v}_2 \\ g(\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, t) \end{bmatrix}$$

$$V(a) = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

- Γενίκευση σε ΣΔΕ m-τάξης!

Προβλήματα συνοριακών συνθηκών

- ☺ Συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, με καθορισμένες τις τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής σε πολλά t_i.

$$y' = f(y,t), \quad t \in (0,b)$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad y_1(0) = \alpha, \quad y_2(b) = \beta$$

- ☺ Επαναληπτική διαδικασία για την λύση (shooting method):

1. Επιλέξτε κάποια προσέγγιση ξ του $y_2(0)$
2. Λύστε το πρόβλημα αρχικών τιμών $\hat{y}' = f(\hat{y},t), \quad \hat{y}(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \xi \end{pmatrix}$
3. Αν $\left|\hat{y}_2(b) - \beta\right|$ είναι μικρό τότε $y(t) \approx \hat{y}(t)$,
   διαφορετικά μεταβάλλουμε το ξ και επιστρέφουμε στο βήμα 2.

Λογισμικό:

- Συναρτήσεις MATLAB:
  - funfun (Matlab toolbox για επίλυση συνήθων διαφορικών εξισώσεων(ODEs))
  - ode45 - Solve non-stiff differential equations, medium order method.
  - ode23 - Solve non-stiff differential equations, low order method.
  - ode113 - Solve non-stiff differential equations, variable order method.
  - ode23t - Solve moderately stiff differential equations, trapezoidal rule.
  - ode15s - Solve stiff differential equations, variable order method.
  - ode23s - Solve stiff differential equations, low order method.
  - ode23tb - Solve stiff differential equations, low order method.
- Συναρτήσεις βιβλιοθήκης IMSL – FORTRAN:
  - IVPRK, IVMRK, και IVPAG (για προβλήματα αρχικών τιμών-IVP)
  - BVPFD και BVPMS (για προβλήματα συνοριακών τιμών σε συνήθεις διαφορικές)
- Δικό σας λογισμικό.....

Βιβλιογραφία

- **Αριθμητικές Υπολογιστικές Μέθοδοι στην Επιστήμη και τη Μηχανική** (C.Pozrikidis)
- Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση (Γ. Ακρίβη, Β. Δουγαλή)
- Αριθμητική Ανάλυση Ι (Μ. Βραχάτης)
- Scientific Computing, An Introductory Survey (M. Heath)

Ερωτήσεις

- Ιστοσελίδα μαθήματος:
  http://eclass.uth.gr/
  http://inf-server.inf.uth.gr/courses/CE213/index.html
- E-mail λίστα του μαθήματος:
  ce213@inf-server.inf.uth.gr
- Π. Τσομπανοπούλου, Ε3-12, yota@uth.gr