

ΗΥ213. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΣΦΑΛΜΑΤΑ
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΚΙΝΗΤΗΣ
ΥΠΟΔΙΑΣΤΟΛΗΣ

Π. ΤΣΟΜΠΑΝΟΠΟΥΛΟΥ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Επιστημονικοί Υπολογισμοί

Τι είναι Επιστημονικοί Υπολογισμοί;

- ▶ Ο σχεδιασμός και η ανάλυση αλγορίθμων για την αριθμητική επίλυση μαθηματικών προβλημάτων.
- ▶ Θεωρητικό υπόβαθρο: Αριθμητική Ανάλυση.
- ▶ Διαφέρει από άλλες περιοχές της Επιστήμης Υπολογιστών:
 - ▶ Χειρίζεται συνεχείς ποσότητες/συναρτήσεις.
 - ▶ Μελετά τις συνέπειες και τα σφάλματα των προσεγγίσεων που χρησιμοποιεί για τους υπολογισμούς.

Ένα Απλό Παράδειγμα

- ▶ Υπολογισμός της επιφάνειας της γής με χρήση του τύπου $A = 4\pi r^2$.
- ▶ Ο παραπάνω υπολογισμός περιέχει αρκετές προσεγγίσεις:
 - ▶ Η Γη θεωρείται σφαίρα με λεία επιφάνεια.
 - ▶ Η τιμή της ακτίνας ($r = 6370\text{km}$) είναι υπολογισμένη από εμπειρικές μετρήσεις και υπολογισμούς.
 - ▶ Η τιμή του άρρητου π δίδεται από περιορισμένα ψηφία.
 - ▶ Ο υπολογισμός σε υπολογιστή (προσωπικό ή χειρός) περιέχει στρογγυλοποιήσεις τόσο στα δεδομένα εισόδου, όσο και στο αποτέλεσμα του υπολογισμού.

Συστήματα για την Αναπαράσταση Αριθμών

Σύστημα	Βάση	Ψηφία
Δεκαδικό	10	0,1,...,9
Δυαδικό	2	0,1
Οκταδικό	8	0,1,...,7
Δεκαεξαδικό	16	0,1,...,9, a, b, c, d, e, f

Αναπαράσταση Αριθμών

Ο αριθμός $a_N a_{N-1} \dots a_0 . a_{-1} a_{-2} \dots$ στο δεκαδικό σύστημα είναι:

$$a_N 10^N + a_{N-1} 10^{N-1} + \dots + a_0 10^0 + a_{-1} 10^{-1} + a_{-2} 10^{-2} + \dots$$

Το ακέραιο μέρος υπολογίζεται σαν πολυώνυμο:

$$p(x) = a_N x^N + a_{N-1} x^{N-1} + \dots + a_0, \quad x = 10$$

Το κλασματικό σαν δυναμοσειρά:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} x^k, \quad x = \frac{1}{10}$$

Αναπαράσταση Αριθμών

(συνέχεια)

Στην καθημερινή ζωή χρησιμοποιούμε το δεκαδικό σύστημα.

Ο υπολογιστής χρησιμοποιεί διαφορετικό σύστημα (δυναδικό, οκταδικό ή δεκαεξαδικό).

Τα εισερχόμενα στον υπολογιστή και εξερχόμενα δεδομένα είναι στο δεκαδικό.

Η μετατροπή των αριθμών και η επεξεργασία τους στο σύστημα του υπολογιστή γίνεται εσωτερικά.

Μετατροπή Αριθμών σε Διαφορετικά Συστήματα Αναπαράστασης

Μετατροπή ακεραίου από σύστημα με βάση το β στο δεκαδικό:

- ▶ Υπολογισμός πολυωνύμου(πολλαπλασιασμός).
- ▶ Με υπολογισμό δυνάμεων:

$$(53473)_8 = 5 \cdot 8^4 + 3 \cdot 8^3 + 4 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8^1 + 3 \cdot 8^0 = (22331)_{10}$$

- ▶ Με σχήμα **Horner**:

$$(53473)_8 = (((5 \cdot 8 + 3) \cdot 8 + 4) \cdot 8 + 7) \cdot 8 + 3 = (22331)_{10}$$

- ▶ Ο αλγόριθμος **Horner** για τον υπολογισμό του $p(x) = a_N x^N + a_{N-1} x^{N-1} + \dots + a_0$

είναι:

$$\begin{aligned} \gamma &\leftarrow a_N \\ &\text{για } i=1, \dots, N \\ \gamma &\leftarrow \gamma \cdot x + a_{N-i} \end{aligned}$$

Μετατροπή Αριθμών σε Διαφορετικά Συστήματα Αναπαράστασης (συνέχεια)

Μετατροπή κλασματικού αριθμού από σύστημα με βάση το β στο δεκαδικό :

- ▶ Υπολογισμός δυναμοσειράς(πολλαπλασιασμός).

$$(.101)_2 = 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} = (.625)_{10}$$

Μετατροπή ακέραιου αριθμού από το δεκαδικό σε σύστημα με βάση το β :

- ▶ Βασική πράξη η διαίρεση, στην κατάλληλη χρήση του υπόλοιπου και του πηλίκου.
- ▶ Ο αριθμός $\delta_N \delta_{N-1} \dots \delta_0$ στο δεκαδικό θα παρίσταται με $a_M a_{M-1} \dots a_0$ στο οκταδικό δηλαδή: $\delta_N \delta_{N-1} \dots \delta_0 = a_0 + 8 \cdot (a_1 + 8 \cdot (\dots))$. Δηλαδή το a_0 είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του δεκαδικού με το 8. Το a_1 είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του προηγούμενου πηλίκου με το 8, κοκ.
- ▶ $(24)_{10} = (30)_8 = 0 \cdot 8^0 + 3 \cdot 8^1$

Μετατροπή Αριθμών σε Διαφορετικά Συστήματα Αναπαράστασης (συνέχεια)

Μετατροπή κλασματικού από το δεκαδικό σε σύστημα με βάση το β :

- ▶ Βασίζεται στον πολλαπλασιασμό:
- ▶ Αν x ένας κλασματικός αριθμός στο δεκαδικό και $.a_1a_2a_3\dots$ η αναπαράσταση του στο β -δικό σύστημα τότε:

$$\beta \cdot x = a_1.a_2a_3\dots$$

Δηλαδή το a_1 είναι ακέραιο μέρος του πολλαπλασιασμού με β .

- ▶ $(.372)_{10} = (.a_1a_2a_3\dots)_2$

$$2 \cdot x = 0.744 \rightarrow a_1 = 0, u_1 = 0.744$$

$$2 \cdot u_1 = 1.488 \rightarrow a_2 = 1, u_2 = 0.488$$

$$2 \cdot u_2 = 0.976 \rightarrow a_3 = 0, u_3 = 0.976$$

$$2 \cdot u_3 = 1.952 \rightarrow a_4 = 1, u_3 = 0.952$$

$$2 \cdot u_4 = 1.904 \rightarrow a_4 = 1, u_3 = 0.904$$

...

$$(.372)_{10} = (.01011\dots)_2$$

Μετατροπή Αριθμών σε Διαφορετικά Συστήματα Αναπαράστασης (συνέχεια)

- ☺ Οι ακέραιοι αριθμοί παραμένουν ακέραιοι με την μετατροπή σε διαφορετικό σύστημα.
- ☺ Οι κλασματικοί αριθμοί παραμένουν κλασματικοί σε οποιοδήποτε σύστημα.
- ☹ Το πλήθος των ψηφίων μετά την υποδιαστολή μπορεί από πεπερασμένο να γίνει άπειρο ή και το αντίθετο: π.χ. $(.1)_{10} = (.0001100110011\dots)_2$

Αριθμητική κινητής υποδιαστολής - Αριθμοί μηχανής

- ▶ Μορφή κινητής υποδιαστολής σε σύστημα με βάση το β , $x = \pm(.d_1d_2d_3\dots)\beta^e$, $d_1 \neq 0$.
 $-(3021.7867)_{10} = -(.30217867) \times 10^4$
 $(.000456)_8 = (.456) \times 8^{-3}$
- ▶ Τα ψηφία που χρησιμοποιεί ένας υπολογιστής είναι πεπερασμένα
(\rightarrow πεπερασμένη αριθμητική).

Αριθμητική κινητής υποδιαστολής - Αριθμοί μηχανής (συνέχεια)

- ▶ Οι αριθμοί στον υπολογιστή είναι ένα διακριτό (όχι συνεχές) σύνολο αριθμών → **σύνολο αριθμών μηχανής**.
- ▶ Το παραπάνω σύνολο περιγράφεται από:
 - ▶ **β** , τη βάση του συστήματος
 - ▶ **t** , την ακρίβεια = το πλήθος των ψηφίων του κλάσματος των αριθμών
 - ▶ **L, U** το κάτω και άνω φράγμα του εκθέτη **e** του **β** .
(συνήθως **$L \approx -U$**)
- ▶ Αν x αριθμός μηχανής τότε $x = \pm(.d_1d_2d_3\dots d_t) \beta^e$

Αριθμητική κινητής υποδιαστολής - Αριθμοί μηχανής (συνέχεια)

- ☺ Ο μικρότερος, κατά απόλυτη τιμή, αριθμός μηχανής είναι ο $(.1000\dots 0) \beta^L$. Γιατί δεν είναι ο $(.0100\dots 0) \beta^L$ ή ο $(.0000\dots 1) \beta^L$;
- ☺ Ο μέγιστος, κατά απόλυτη τιμή, αριθμός μηχανής είναι ο $(.dddd\dots d) \beta^U$, όπου $d = \beta - 1$.
- ☹ Το άθροισμα δύο αριθμών μηχανής δεν είναι απαραίτητα αριθμός μηχανής.
Π.χ.: $(.dddd\dots d) \beta^U + (.dddd\dots d) \beta^U$ δεν είναι αριθμός μηχανής. **Γιατί;**
- ☹ Το γινόμενο δύο αριθμών μηχανής δεν είναι απαραίτητα αριθμός μηχανής.
Π.χ.: $(.1000\dots 0) \beta^L / 2$ δεν είναι αριθμός μηχανής. **Γιατί;**

Αριθμητική κινητής υποδιαστολής - Αριθμοί μηχανής (συνέχεια)

- ☺ Το «έψιλον» της μηχανής, ϵ , ο μικρότερος αριθμός τ.ω. $fl(1+\epsilon) \neq 1$.
- ☺ Άσκηση: Υπολογίστε το ϵ της μηχανής χρησιμοποιώντας Matlab, με και χωρίς την αντίστοιχη εντολή.
- ☹ Δεν ισχύουν ορισμένες ιδιότητες των πράξεων:
πρόσθεση - προσεταιριστική: $a+(b+c) \neq (a+b)+c$. **Γιατί;**

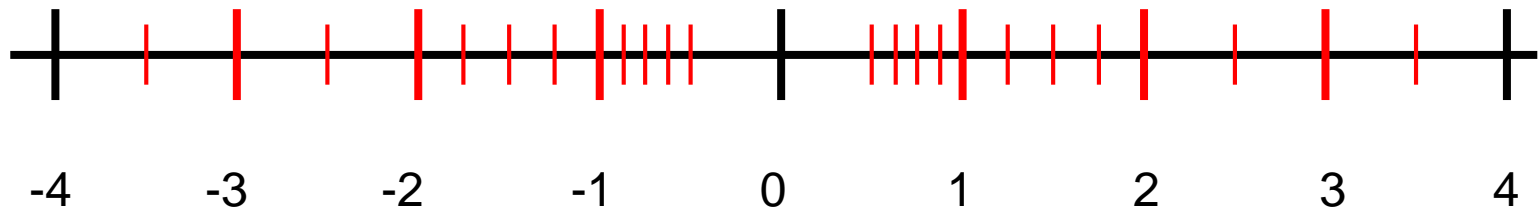
Αριθμητική κινητής υποδιαστολής - Αριθμοί μηχανής (συνέχεια)

Σύστημα	β	t	L	U
IEEE(απλή ακρίβεια)	2	24	-125	128
IEEE(διπλή ακρίβεια)	2	53	-1021	1024
Cray	2	48	-16381	16384
HP(χειρός)	10	10	-98	100
IBM(απλή ακρίβεια)	16	6	-64	63

Αριθμητική κινητής υποδιαστολής - Αριθμοί μηχανής (συνέχεια)

Αν $\beta = 2$, $t = 3$, $L = 0$, $U = 2$ τότε:

- ▶ ο μέγιστος αριθμός σε αυτό τον υπολογιστή είναι: $(.111)_2 \times 2^2 = (3.5)_{10}$
- ▶ Ο ελάχιστος αριθμός είναι: $(.100)_2 \times 2^0 = (.5)_{10}$
- ▶ Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνεται το σύνολο των αριθμών της μηχανής (με το κόκκινο χρώμα).



Αριθμητική κινητής υποδιαστολής - Αριθμοί μηχανής (συνέχεια)

- ▶ Αν x' αριθμός μηχανής, $x' = (.d_1d_2d_3... d_t) \beta^k$, και τότε ο επόμενος του είναι ο $x'' = (.d_1d_2d_3... d_t + .000...1) \beta^k = x' + \beta^{k-t}$
- ▶ Στους υπολογιστές τα άπειρα ψηφία του κλασματικού αριθμού, x , πρέπει να αναπαρασταθούν με πεπερασμένα, πλήθους t .
- ▶ Η αναπαράσταση, $fl(x)$, αυτή γίνεται με δύο τρόπους με στρογγύλευση και με αποκοπή.
- ▶ **Στρογγύλευση:** αν $x = (.d_1d_2d_3... d_t d_{t+1}d_{t+2}d_{t+3}...) \beta^k$
 - ▶ Αν $d_{t+1} \geq \beta/2 \Rightarrow fl(x) = (.d_1d_2d_3... d_t + .000...1) \beta^k$
 - ▶ Αν $d_{t+1} < \beta/2 \Rightarrow fl(x) = (.d_1d_2d_3... d_t) \beta^k$
- ▶ **Αποκοπή:** αν $x = (.d_1d_2d_3... d_t d_{t+1}d_{t+2}d_{t+3}...) \beta^k \Rightarrow fl(x) = (.d_1d_2d_3... d_t) \beta^k$

Υπολογισμός σφάλματος προσέγγισης αριθμού με **αποκοπή**

- ▶ Αν $x = (.d_1d_2d_3... d_t d_{t+1}d_{t+2}d_{t+3}...) \beta^k$
- ▶ τότε $x' = (.d_1d_2d_3... d_t) \beta^k$ και $x'' = (.d_1d_2d_3... d_t + .000...1) \beta^k$ οι δύο διαδихικοί αριθμοί μηχανής όπου $x' \leq x \leq x''$
 - ▶ $fl(x) = x'$
 - ▶ $|fl(x) - x| < |x'' - x'| = \beta^{k-t}$
 - ▶ $d_1 \geq 1 \rightarrow \beta^{-1} \leq .d_1 \leq .d_1d_2d_3... d_t d_{t+1}d_{t+2}d_{t+3}... < 1 \rightarrow |x| = (.d_1d_2d_3... d_t d_{t+1}d_{t+2}d_{t+3}...) \beta^k \geq \beta^{-1} \beta^k = \beta^{k-1}$
- ▶ $\frac{|fl(x) - x|}{|x|} \leq \beta^{k-t} \beta^{1-k} = \beta^{1-t}$ μοναδιαίο σφάλμα αποκοπής

Υπολογισμός σφάλματος προσέγγισης αριθμού με **στρογγύλευση**

- ▶ Αν $x = (.d_1d_2d_3... d_t d_{t+1}d_{t+2}d_{t+3}...) \beta^k$
- ▶ τότε $x' = (.d_1d_2d_3... d_t) \beta^k$ και $x'' = (.d_1d_2d_3... d_t + .000...1) \beta^k$ οι δύο διαδοχικοί αριθμοί μηχανής όπου $x' \leq x \leq x''$

- ▶ $fl(x) = x'$ ή $fl(x) = x''$

- ▶ $|fl(x) - x| \leq |x'' - x'| / 2 = \beta^{k-t} / 2$

- ▶ $d_1 \geq 1 \rightarrow \beta^{-1} \leq .d_1 \leq .d_1d_2d_3... d_t d_{t+1}d_{t+2}d_{t+3}... < 1 \rightarrow |x| = (.d_1d_2d_3... d_t d_{t+1}d_{t+2}d_{t+3}...) \beta^k \geq \beta^{-1} \beta^k = \beta^{k-1}$

- ▶ $\frac{|fl(x) - x|}{|x|} \leq \frac{\beta^{k-t}}{2} \beta^{1-k} = \frac{1}{2} \beta^{1-t}$, μοναδιαίο σφάλμα

στρογγύλευσης

Αν και πιο δύσκολη, η **στρογγύλευση** χρησιμοποιείται παντού...



Τύποι σφαλμάτων στις προσεγγίσεις

Αν x ένας αριθμός και y η προσέγγιση του τότε:

▶ $|y-x| = \varepsilon$ **απόλυτο σφάλμα της προσέγγισης**, $x=y+\varepsilon$

▶ $\frac{|y-x|}{|x|} =$ **σχετικό σφάλμα της προσέγγισης**.

▶ Επειδή συχνά το x μας είναι άγνωστο, υπολογίζουμε το σχετικό σφάλμα με βάση την προσέγγιση, δηλαδή

$$\frac{|y-x|}{|y|}$$

Επιρροή σφαλμάτων στρογγύλευσης στους υπολογισμούς

- ▶ Αν x, y δύο αριθμοί και \diamond μία πράξη (π.χ. πρόσθεση, πολλαπλασιασμός) τότε ο $x \diamond y$ αναπαρίσται στον υπολογιστή σαν $fl(fl(x) \diamond fl(y))$
- ▶ Γενικά $fl(x \diamond y) \neq fl(fl(x) \diamond fl(y))$
- ▶ Παράδειγμα:
 - ▶ $\beta = 10, t = 5, U = -L = 10, fl(.)$ από στρογγύλευση, \diamond πρόσθεση
 - ▶ $x = 5891.26, y = .0773414$
 - ▶ $fl(x) = .58913 \times 10^4, fl(y) = .77341 \times 10^{-1}$
 - ▶ $fl(x) + fl(y) = .5891377341 \times 10^4$
 - ☹ $fl(fl(x) + fl(y)) = .58914 \times 10^4 \leftarrow$ αποτέλεσμα του υπολογιστή
 - ☺ $x + y = 5891.3373414$
 - ☹ $fl(x+y) = .58913 \times 10^4$

Επιρροή σφαλμάτων στρογγύλευσης στους υπολογισμούς (συνέχεια)

Αποδεικνύεται ότι:

- ▶ Πρόσθεση/Αφαίρεση: **εδώ το σφάλμα εξαρτάται ισχυρά από τους αριθμούς!!!!**

$$\frac{|fl(fl(x) + fl(y)) - (x + y)|}{|x + y|} \leq \frac{2u(|x| + |y|)}{|x + y|}$$

- ▶ Πολλαπλασιασμός:

$$\frac{|fl(fl(x) \cdot fl(y)) - (x \cdot y)|}{|x \cdot y|} \leq 3u + 4u^2$$

- ▶ Διαίρεση:

$$\frac{\left| fl\left(\frac{fl(x)}{fl(y)}\right) - \frac{x}{y} \right|}{\left| \frac{x}{y} \right|} \leq 3u + O(u^2)$$

u = το **μοναδιαίο σφάλμα της στρογγυλοποίησης**

Χαρακτηριστικό παράδειγμα (1)

☺ $\beta=10, t=5, U=-L=10, x=.45142708, y=-.45135944$

☺ Ακριβές αποτέλεσμα :

$$x+y = .6764 \times 10^{-4}$$

☺ Προσέγγιση:

$$z = fl(fl(x) + fl(y)) = fl(.45143 - .45136) = .00007 = .70000 \times 10^{-4}$$

☺ Σχετικό σφάλμα: $\left| \frac{z - (x + y)}{x + y} \right| = \frac{.233 \times 10^{-5}}{.6764 \times 10^{-4}} \cong .34 \times 10^{-1} \text{!!!!!!!!!}$

Χαρακτηριστικό παράδειγμα (2)

$\beta=10$, $\tau=10$ στον HP33 και $x = 7892$, $y = 7891$, τότε $\sqrt{x} - \sqrt{y} = ?$

$$\sqrt{7892} = .8883692926 \times 10^2$$

$$\sqrt{7891} = .8883130079 \times 10^2$$

$$\sqrt{7892} - \sqrt{7891} = \underline{.5628470000} \times 10^{-2}$$

$$\sqrt{7892} - \sqrt{7891} = \frac{7892 - 7891}{\sqrt{7892} + \sqrt{7891}} = \frac{1}{\sqrt{7892} + \sqrt{7891}} = \frac{1}{.1776682300 \times 10^3} = \underline{.5628468294} \times 10^{-2}$$

Σφάλματα στον υπολογισμό των αθροισμάτων

- ☺ Πολλές βασικές συναρτήσεις μέσα στον υπολογιστή υπολογίζονται με αθροίσματα/σειρές (π.χ., \sin , \cos , \exp , κλπ.)
- ☺ Αρκετοί δικοί μας υπολογισμοί περιέχουν αθροίσματα (π.χ., προσέγγιση ολοκληρωμάτων, μέσης τιμής, διασποράς κλπ.)

Ένα Απλό Παράδειγμα

☹ Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το άθροισμα:

$$S_n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + k}$$

😊 Επειδή ισχύει
έχουμε:

$$a_k = \frac{1}{k^2 + k} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$S_n = 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 2 - \frac{1}{n+1}$$

όπου παίρνουμε αρκετά καλές προσεγγίσεις:

$$S_9 = 1.9, S_{99} = 1.99, S_{999} = 1.999, S_{9999} = 1.9999$$

Ένα Απλό Παράδειγμα (συνέχεια)

- ▶ Αν χρησιμοποιήσουμε την αναδρομική σχέση που μας δίνει τα S_n ως:

$$S_0 = 1, S_k = S_{k-1} + 1/(k(k+1)) \text{ τότε}$$

- ▶ Αν ξεκινήσουμε το άθροισμα από το τέλος δηλαδή:

$$T_0 = \frac{1}{n^2 + n}$$

$$T_k = T_{k-1} + \frac{1}{(n-k)(n-k+1)}, k = 1, \dots, n-1$$

$$T_n = T_{n-1} + 1$$

n	\check{S}_n	\check{T}_n
9	1.900000000	
99	1.990000003	
999	1.999000003	
9999	1.999899972	

Ένα Απλό Παράδειγμα

(συνέχεια)

- ▶ Αυτό συμβαίνει γιατί τα σφάλματα συσσωρεύονται στους μεγάλους όρους του αθροίσματος.

π.χ.: $\check{S}_4 = S_4 + 3\delta_1 a_1 + 3\delta_1 a_2 + 2\delta_2 a_3 + \delta_3 a_4$ με $|\delta_i| \leq \epsilon$, $i=1,2,3$ και $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$.

- ▶ Το αντίθετο συμβαίνει στην περίπτωση των αθροισμάτων T_n , εκεί το σφάλμα συσσωρεύεται στους μικρότερους όρους του αθροίσματος, δηλ.

$\check{T}_4 = T_4 + 3\delta_1 a_N + 3\delta_1 a_{N-1} + 2\delta_2 a_{N-2} + \delta_3 a_{N-3}$ όπου $a_N < a_{N-1} < a_{N-2} < a_{N-3}$

Παράδειγμα αναίρεσης

- ▶ Οι όροι στο άθροισμα αλλάζουν πρόσημο και να αυξάνονται κατά απόλυτη τιμή, δηλαδή $a_i = (-1)^i a_i$, $a_i < a_{i+1}$, $i=1,2,\dots$
- ▶ Εδώ ο ένας όρος αναιρεί τον προηγούμενο.
- ▶ Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι ο υπολογισμός της εκθετικής συνάρτησης με χρήση του αναπτύγματος Taylor, σε αρνητικά σημεία:

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \quad S_N = \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n x^n}{n!} \quad \xrightarrow{N \rightarrow \infty} e^{-x}$$

όπου ενώ για $x=100$, $e^{-100} \approx 0$
οι πρώτες προσεγγίσεις.....

n	S_n
1	1.
2	-99
3	4901
4	-161766

- ▶ Ένας καλύτερος τρόπος είναι $e^{-x} = 1/e^x$ και να υπολογίσουμε το e^x με ανάπτυγμα Taylor.

Ευστάθεια αλγορίθμων.

- ☹ Ένας αλγόριθμος λέγεται **ασταθής**, αν μικρά σφάλματα στην αναπαράσταση των αριθμών επιφέρουν μεγάλες μεταβολές στο τελικό αποτέλεσμα.
- 😊 Ένας αλγόριθμος λέγεται **ευσταθής** αν τα τελικά αποτελέσματα δεν επηρεάζονται από τα σφάλματα στρογγύλευσης.

Υπολογισμός του

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{x-1} dx$$

- ▶ Με ολοκλήρωση κατά μέλη βλέπουμε ότι ισχύει:

$$I_1 = 1/e, \quad I_n = 1 - nI_{n-1}, \quad n=2,3,\dots \quad \text{αλλά και}$$
$$I_{n-1} = (1 - I_n)/n$$

- ▶ Ισχύει ότι $I_k > I_{k+1}$, $k=1,2,3,\dots$
- ▶ Αν υπολογίσουμε τα αθροίσματα με αύξουσα σειρά τότε:

$$\hat{I}_1 = I_1 + \varepsilon_1, \quad \hat{I}_n = 1 - n \hat{I}_{n-1}, \quad n=1,2,\dots \quad \text{όπου το}$$

σφάλμα της προσέγγισης

$$\varepsilon_n = I_n - \hat{I}_n$$

$$\varepsilon_n = (-1)^{n-1} n! \varepsilon_1$$

n	\hat{I}_n
1	.367879
2	.264242
3	.207274
4	.170904
5	.145480
6	.127120
7	.110160
8	.118720
9	-.068480
10	1.68480
11	-17.53280
12	211.39360
13	-2747.11680
14	38460.63520
15	-576908.52800

Υπολογισμός του

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{x-1} dx$$

- ▶ Αν τα υπολογίσουμε με φθίνουσα

σειρά:

$$\hat{I}_m = I_m + \varepsilon_m, \quad \hat{I}_{n-1} = (1 - \hat{I}_n)/n,$$

$$n = m, \dots, k+1$$

ε_m το σφάλμα της προσέγγισης για το οποίο ισχύει

$$\varepsilon_{n-1} = -\varepsilon_n / n$$

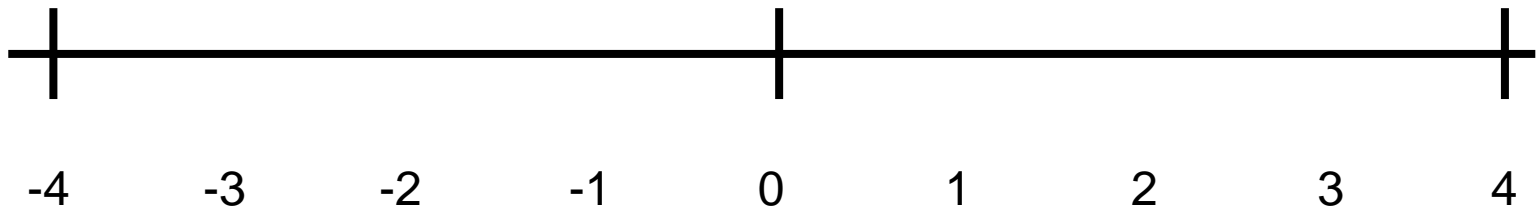
$$\varepsilon_k = (-1)^{m-k} \frac{1}{k+1} \frac{1}{k+2} \frac{1}{k+3} \dots \frac{1}{m} \varepsilon_m$$

n	\hat{I}_n
20	.0000000
19	.0500000
18	.0500000
17	.0527778
16	.0557190
15	.0590176
14	.0627322
13	.0669477
12	.0717733
11	.0773522
10	.0838771
9	.0916123

ΑΣΚΗΣΗ

Αν $\beta = 2$, $\dagger = 2$, $L = -1$, $U = 1$ τότε:

- ▶ Ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός σε αυτό τον υπολογιστή;
- ▶ Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός ;
- ▶ Ποιο είναι το ϵ της μηχανής;
- ▶ Κάντε ένα διάγραμμα φαίνεται με το σύνολο των αριθμών της μηχανής.
- ▶



Βιβλιογραφία

- ▶ **Αριθμητικές Υπολογιστικές Μέθοδοι στην Επιστήμη και τη Μηχανική** (C.Pozrikidis)
- ▶ **Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση** (Γ. Ακρίβη, Β. Δουγαλή)
- ▶ **Αριθμητική Ανάλυση Ι** (Μ. Βραχάτης)
- ▶ **Scientific Computing, An Introductory Survey** (M. Heath)

Ερωτήσεις

- ▶ Ιστοσελίδα μαθήματος:

<http://eclass.uth.gr/>

<http://inf-server.inf.uth.gr/courses/CE213/index.html>

- ▶ E-mail λίστα του μαθήματος:

`ce213@inf-server.inf.uth.gr`

[`http://eclass.uth.gr/`](http://eclass.uth.gr/)

- ▶ Π. Τσομπανοπούλου, Ε3-12, `yota@uth.gr`

$$(a_3 a_2 a_1 a_0, c_1 c_2 c_3 c_4)_B =$$

$$a_3 \beta^3 + a_2 \beta^2 + a_1 \beta + a_0 \beta^0 +$$

$$c_1 \beta^{-1} + c_2 \beta^{-2} + c_3 \beta^{-3} + c_4 \beta^{-4}$$

$$522 = 5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$$

$$- .132 = -1 \cdot 10^{-1} - 3 \cdot 10^{-2} - 2 \cdot 10^{-3}$$

$$2.88 = 2 \cdot 10^0 + 8 \cdot 10^{-1} + 8 \cdot 10^{-2}$$

$$-4.33125 = -4 \cdot 10^0 - 3 \cdot 10^{-1} - 3 \cdot 10^{-2} - 1 \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 10^{-4} - 5 \cdot 10^{-5}$$

$$2.1248 = 2 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 4 \cdot 10^{-3} + 8 \cdot 10^{-4}$$

$$89.167 = 8 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 6 \cdot 10^{-2} + 7 \cdot 10^{-3}$$

$$-2.765 = -2 \cdot 10^0 - 7 \cdot 10^{-1} - 6 \cdot 10^{-2} - 5 \cdot 10^{-3}$$

$$-2.765 = -2 \cdot 10^0 - 7 \cdot 10^{-1} - 6 \cdot 10^{-2} - 5 \cdot 10^{-3}$$

$$- .276 = -2 \cdot 10^{-1} - 7 \cdot 10^{-2} - 6 \cdot 10^{-3}$$

?

Διόγκη

$$\underbrace{\dots}_{t \in \mathbb{R}} \cdot \beta^e \quad L \leq e \leq U$$

Παράδειγμα

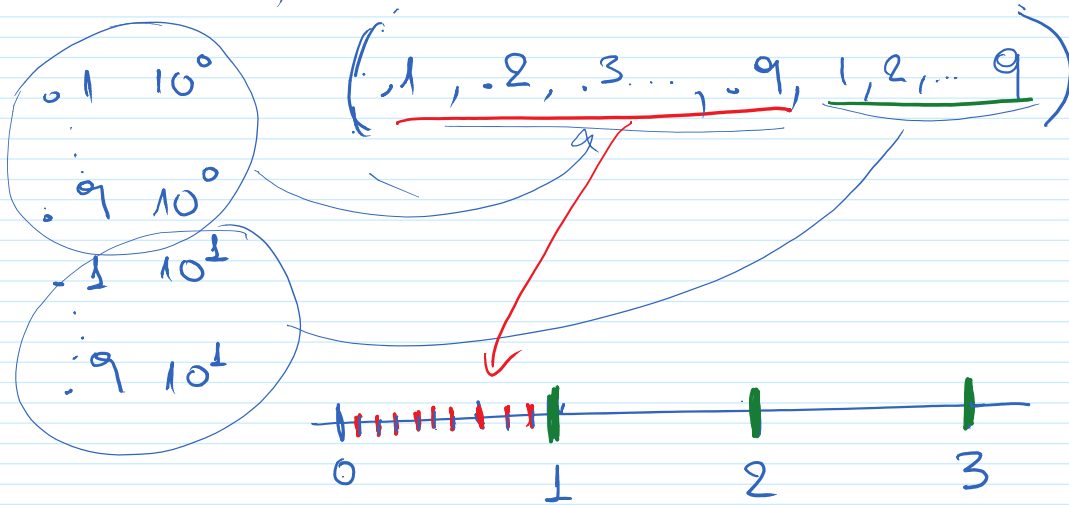
$$B=10, \quad t=1, \quad L=0, \quad U=1$$

$$3.24 \sim .3 \cdot 10^1 \quad \checkmark$$

$$0.0835 \sim .8 \cdot 10^{-1}$$

~~$$.08 \cdot 10^0$$~~

$$\underbrace{\quad \quad \quad}_{1,2,\dots,9} \cdot 10^0 \text{ ή } 10^1$$



$$a+(b+c) \neq (a+b)+c$$

(βασικώς σελίδα 13)

$$a=3.5$$

$$b=2, \quad c=-3$$

$$a+(b+c) = 3.5 + (2-3) = 3.5 - 1 = \underline{\underline{2.5}}$$

$$(a+b)+c = (3.5+2) - 3 = \underline{\underline{2.5}}$$

Overflow!!!