ΗΥ213. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ & ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

Π. ΤΣΟΜΠΑΝΟΠΟΥΛΟΥ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Τύποι Ολοκλήρωσης Gauss.

- Αν για κόμβους ολοκλήρωσης χρησιμοποιήσουμε τις ρίζες των πολυωνύμων Legendre ή Chebyshev, λαμβάνουμε διαφορετικά βάρη (σε κάθε περίπτωση) και τότε έχουμε τους τύπους ολοκλήρωσης Gauss-Legendre και Gauss-Chebyshev αντίστοιχα.

Αλγόριθμοι Αυτόματης Ολοκλήρωσης.

Δεδομένα *[a,b]*, *f*, βασική μέθοδο ολοκλήρωσης *Q* (Τραπεζίου), σύνθετος τύπος *Q'* , ε.

1. Ορίζουμε διαμέριση του πεδίου ορισμού, $a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$
2. Για κάθε $[x_i, x_{i+1}]$ υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα με τον απλό τύπο.
3. Διχοτομούμε το $[x_i, x_{i+1}]$ και εφαρμόζουμε τον *Q'* .
4. Εξετάζουμε τη ανίσοτητα: $\frac{4}{3}\left|Q-Q'\right| \leq \varepsilon \frac{h_i}{b-a}$

Αλγόριθμοι Αυτόματης Ολοκλήρωσης (συνέχεια).

5. Αν είναι αληθής τότε προχωρούμε σε επόμενο διαστημα.
6. Αν δεν είναι αληθής τότε διαιρούμε το $[x_i, x_{i+1}]$ σε δύο υποδιαστήματα και επαναλαμβάνουμε τα βήματα 2., 3., 4.
7. Η όλη διαδικασία σταματά είτε γιατί έχουμε υπολογίσει το ολοκλήρωμα με σφάλμα μικρότερο από ε ή γιατί έχουμε υπερβεί ένα μέγιστο αριθμό υποδιαστημάτων.

Αριθμητική Παραγώγιση.

- Πεπερασμένες διαφορές.
- Παραγώγιση παρεμβάλουσας Spline.

Αριθμητική Παραγώγιση.

<u>Πρόβλημα:</u> Έστω f:[a,b]→R *ομαλή* συνάρτηση, τότε

$$f'(x) = ?$$

Πεπερασμένες διαφορές.

- <u>Πρόβλημα:</u>

$$f'(0) \approx ?????$$

- Χρήση αναπτύγματος Taylor.

$$f(h) = f(0) + hf'(0) + \frac{h^2}{2} f''(0) + \frac{h^3}{3!} f'''(0) + \ldots$$

$$f(-h) = f(0) - hf'(0) + \frac{h^2}{2} f''(0) - \frac{h^3}{3!} f'''(0) + \ldots$$

- Αφαιρώντας κατά μέλη:

$$f'(0) = \frac{f(h) - f(-h)}{2h} + O(h^2)$$

Παραγώγιση παρεμβάλουσας Spline.

- Ορίζουμε διαμέριση του πεδίου ορισμού
- Υπολογίζουμε τις αντίστοιχες τιμές.
- Θεωρούμε τα ζεύγη των δεδομένων.
- Υπολογίζουμε την κυβική Spline που τα παρεμβάλει.
- Παραγωγίζουμε την Spline.

Υλικό από το MatLab για αριθμητική και συμβολική ολοκλήρωση και παραγώγιση.

- ☺ trapz
- ☺ quad, quad8 (adaptively)
- ☺ int (symbolic)
- ☺ diff, gradient
- ☺ Δικό σας λογισμικό.......

Βιβλιογραφία

- **Αριθμητικές Υπολογιστικές Μέθοδοι στην Επιστήμη και τη Μηχανική** **(C.Pozrikidis)**
- Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση (Γ. Ακρίβη, Β. Δουγαλή)
- Αριθμητική Ανάλυση Ι (Μ. Βραχάτης)
- Scientific Computing, An Introductory Survey (M. Heath)

Ερωτήσεις

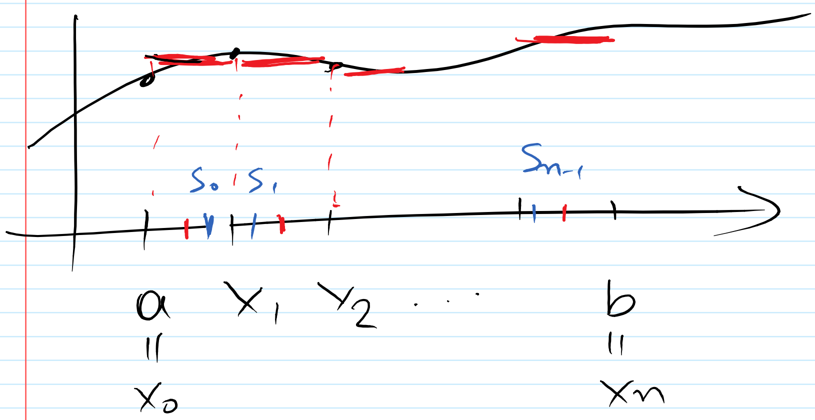
- Ιστοσελίδα μαθήματος:
  http://eclass.uth.gr/
  http://inf-server.inf.uth.gr/courses/CE213/index.html

- E-mail λίστα του μαθήματος:
  ce213@inf-server.inf.uth.gr

- Π. Τσομπανοπούλου, Ε3-12, yota@uth.gr

Integration (2)

Thursday, April 2, 2015 10:33 AM



$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$x_i = a + ih$$

$$\int_a^b f = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f = \sum_{i=0}^{n-1} \left[(x_{i+1}-x_i)\, f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right) + f''(s_i)\,\frac{(x_{i+1}-x_i)^3}{24} \right]$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} h \cdot f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right) + \frac{h^3}{24} \sum_{i=0}^{n-1} f''(s_i)$$

$$= h \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right) + \frac{h^2}{24}(b-a)\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f''(s_i)$$

$$m = \frac{1}{n}\sum m \le \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f''(s_i) \le \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} M = \frac{\cancel{n}M}{\cancel{n}}$$

οπου $M = \max_{a \le x \le b} f''(x)$

$$m = \min_{a \le x \le b} f''(x)$$

Άρα $\quad m \le \frac{1}{n} \sum f''(s_i) \le M$

$\Longrightarrow \exists\, s \in [a,b]$ τ.ω.

$$\frac{1}{n} \sum f''(s_i) = f''(s)$$

Άρα $\exists\, s \in [a,b]$ τ.ω.

$$\int_a^b f = \boxed{h \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)} + \frac{h^2 (b-a)}{24} f''(s)$$

$\boxed{h \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)} = Q_0(f)$

σφάλμα τάξης 2

Μελέτη τάξης της προσέγγισης.

$$\text{error} = \int_a^b f - Q_0(f) = h^2 \frac{b-a}{24} f''(s)$$

$$|\text{error}| \le h^2 \frac{b-a}{24} \|f''\|_\infty$$

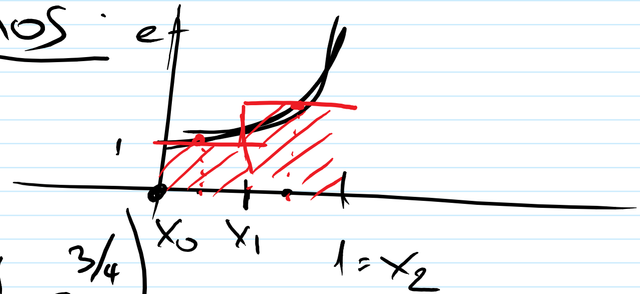
π.χ.

$f(x) = e^x \quad , \quad a = 0 \, , \quad b = 1$

- Απλό τύπος $\int_0^1 e^x dx = 1\cdot e^{1/2} + \frac{1}{24} e^{s}$

$$\|error_1\| \le \frac{1}{24}\|e^s\|_\infty = \frac{e}{24}$$

Σύνθετος τύπος:



$n=2$

$$\int_0^1 e^x - \left(\frac{1}{2}e^{1/4} + \frac{1}{2}e^{3/4}\right) = error$$

$$\|error_2\| \le \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{24}\cdot e =$$

$$\frac{1}{4}\|error_1\|$$

Ομοια έχω για n διαστήματα

$$\left\|\int_a^b e^x - h\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)\right\| \le h^2 \frac{1}{24} e =$$

$$= (b-a)^2 \, 1 \, e$$

$\overline{n}$ 24

$\boxed{a=0,\ b=1}$

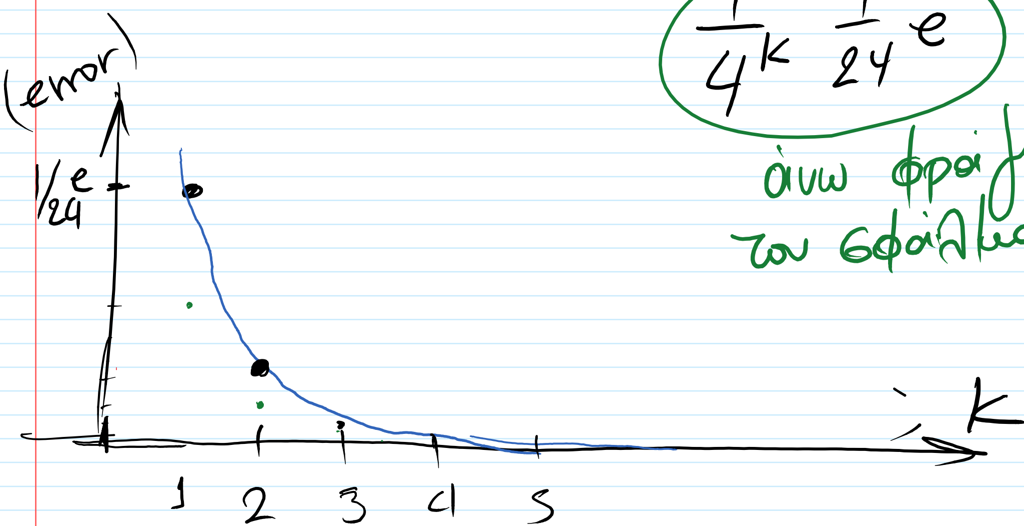
$h_1 = b-a \qquad |error_1| < \frac{1}{24} e$

$h_2 = \frac{b-a}{2} \qquad |error_2| < \frac{1}{4}\frac{1}{24} e$

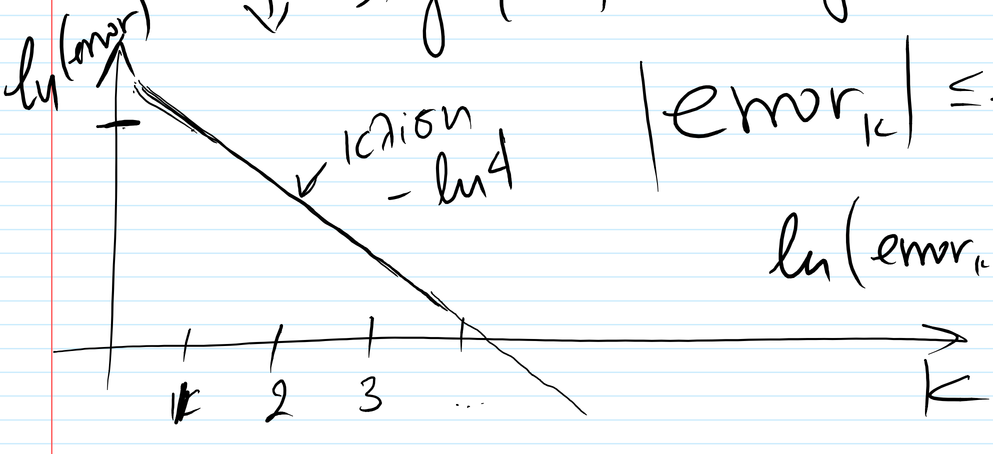
$h_3 = \frac{b-a}{4} \qquad |error_3| < \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\frac{1}{24} e\right) = \frac{1}{4^2}\frac{1}{24} e$

$h_{k+1} = \frac{b-a}{2^k} \qquad \boxed{|error_{k+1}| = \frac{1}{4}|error_k|} < \frac{1}{4^k}\frac{1}{24} e$

άνω φράγμα του σφάλματος



λογαριθμικοί άξονες



$|error_k| \leq \frac{1}{4^k}\frac{1}{24} e$

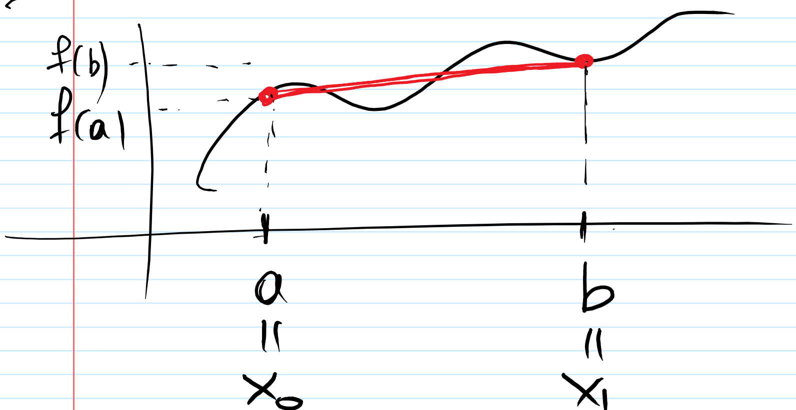
$\ln(error_k) \leq -k\ln 4 + \ln(\ )$

$-\alpha k + \beta$

Άσκηση:

Προγραμματίστε το παραπάνω παράδειγμα σε Matlab και επιβεβαιώστε την τάξη του σφάλματος.

Μέθοδος Τραπεζίου



$$\int_a^b f \approx E_T = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$$

$$= \int_a^b p_1(x)\,dx$$

$$p_1(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

$$f(x)-p_1(x) \overset{\exists \xi_x \in (a,b)}{=} \frac{\prod_{i=0}^{1}(x-x_i)}{2} f''(\xi_x) =$$

σφάλμα παρεμβολής

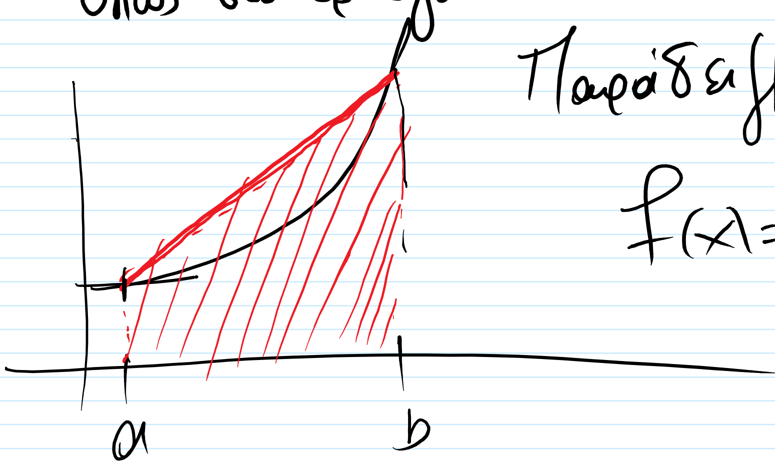
$$= \frac{(x-a)(x-b)}{2} f''(\xi_x)$$

$$\int_a^b f - \int_a^b P_1 = \int_a^b \frac{(x-a)(x-b)}{2} f''(\xi_x)\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_a^b \underbrace{(x-a)(b-x)}_{>0} f''(\underbrace{\xi_x}_{?})\,dx$$

$$= \dots \overset{\exists s\in(a,b)}{=} -\frac{(b-a)^3}{12} f''(s)$$

όπως στο ορθογώνιο

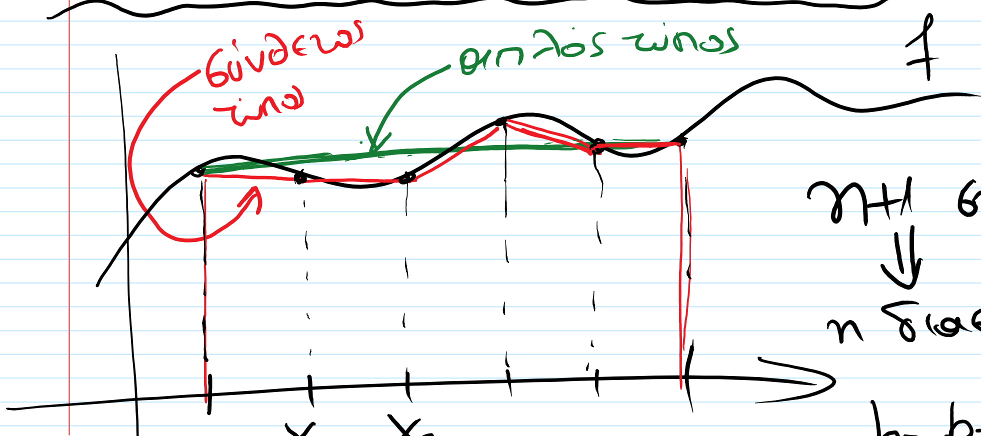


Παράδειγμα:

$f(x)=e^x$

$$\int_a^b e^x dx \approx \frac{e^a+e^b}{2}(b-a)$$

Σύνθετος Τύπος Τραπεζίου:

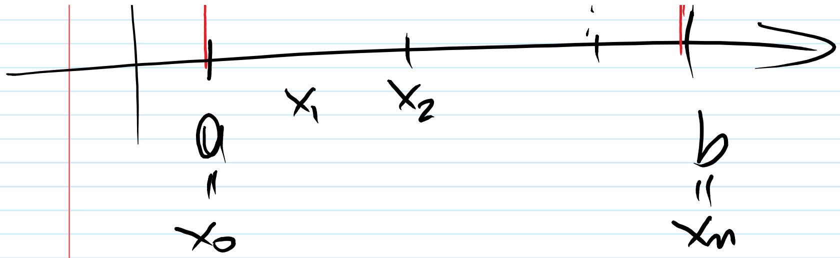


$n+1$ σημεία

$\Downarrow$

n διαστήματα

$h = b-a$



$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$x_i = a + i \cdot h, \quad i = 0, \dots, n$$

Σε κάθε διάστημα εφαρμόζω απλό τύπο Τραπεζίου

$$\int_a^b f = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f = \sum_{i=0}^{n-1} \left[\left(\frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \right) h + \left(-\frac{h^3}{12} f''(\xi_i) \right) \right]$$

$$\int_a^b f = h \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \right) + \left(\frac{-h^3}{12} \right) \sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i)$$

$$= h \sum_{i=0}^{n-1} \left(\quad \right) + \frac{(-h^2)}{12} (b-a) f''(\xi)$$

σφάλμα τάξης $\underline{2}$

$$\int_a^b f \approx Q_T(f) = Q_1(f) =$$

$$\frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \left(f(x_i) + f(x_{i+1}) \right) =$$

$$\frac{h}{2} \left(f(x_0) + f(x_1) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_2) + f(x_3) + \right.$$

$$\frac{h}{2}\Big(f(x_0)+f(x_1)+f(x_1)+f(x_2)+f(x_2)+f(x_3)+ \dots + f(x_{n-2})+f(x_{n-1})+f(x_{n-1})+f(x_n)\Big)=$$

$$=\frac{h}{2}\Big(f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\dots+2f(x_{n-2})+2f(x_{n-1})+f(x_n)\Big)$$

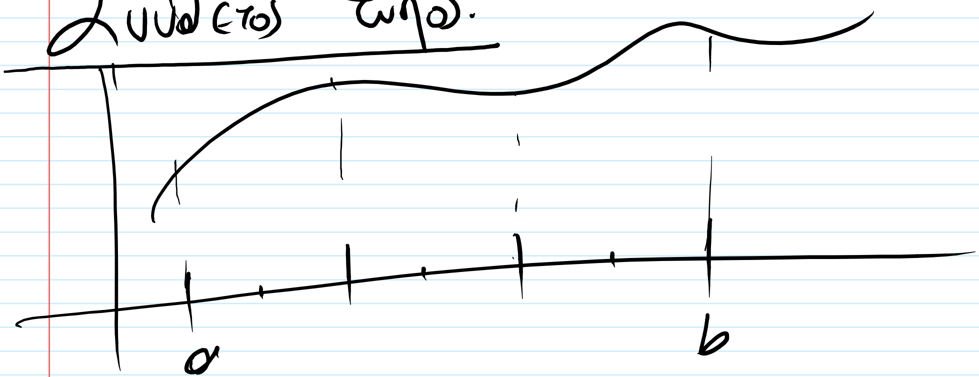
Μέθοδος Simpson

$$\int_a^b f \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)$$

απλός τύπος

$$\text{Σφάλμα} = -\frac{(b-a)^5}{2^4\cdot 180} f^{(4)}(\xi), \quad \exists \xi \in (a,b)$$

Σύνθετος τύπος:



$b \quad n-2 \quad x_{i+2} \quad n-2$

$$\int_a^b f = \sum_{i=0,2}^{n-2} \int_{x_i}^{x_{i+2}} f = \sum_{i=0,2}^{n-2} \frac{x_{i+2}-x_i}{6}\left(f(x_i) + 4f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})\right)$$

άρτιο πλήθος των διαστημάτων ($n=2k$)

ή

περιττό πλήθος σημείων ($n=2k+1$)

$$\int_a^b f \approx \sum_{i=0,2}^{n-2} \frac{2h}{6}\left(f(x_i) + 4f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})\right) =$$

$$= \frac{h}{3}\Big(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)$$

$$f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)$$

$$\vdots$$

$$f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\Big) =$$

$$= \frac{h}{3}\Big(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2)$$

$$+ 4f(x_3) + 2f(x_4)$$

$$\vdots$$

$$+ 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\Big)$$

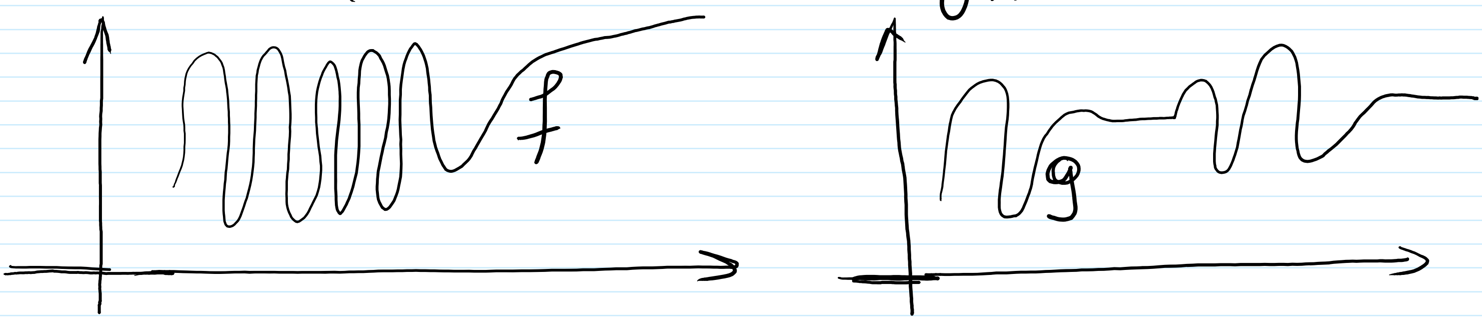
άρτιοι όροι $*2$

$+ 4f(x_{n-1}) + f(x_n)$

Περιττοί όροι $*4$

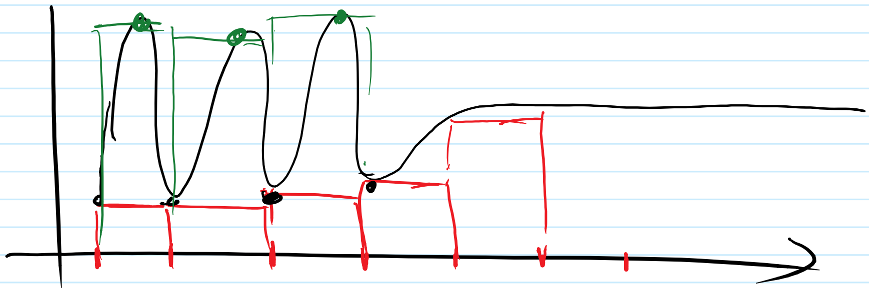
Ερώτημα:

Πως αντιμετωπίζουμε μια συνάρτηση με ανομοιογενή συμπεριφορά; Πως μπορούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα της f ή της g, με αποδοτικό τρόπο;

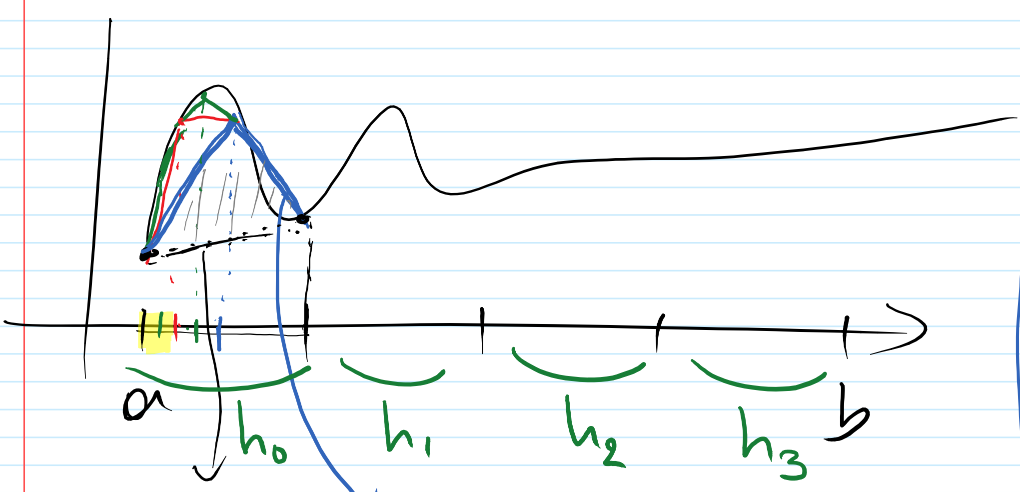


Integration (3)

Τρίτη, 21 Απριλίου 2015 9:53 πμ



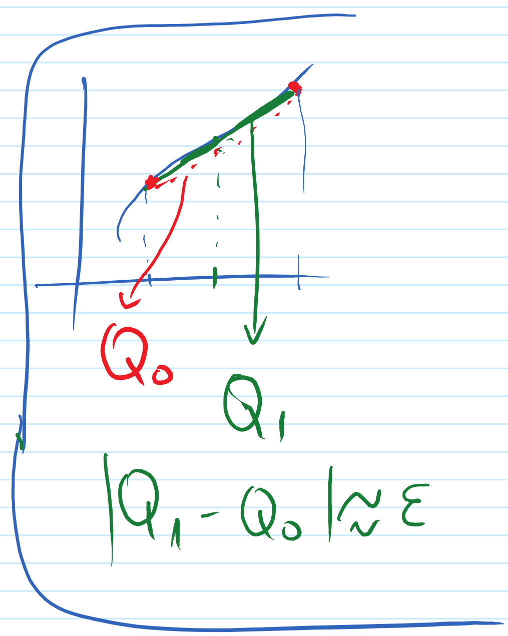
Αντιμετώπιση με αυτόματους τύπους ολοκλήρωσης



Q_0 $\quad Q_1 \to |Q_0 - Q_1|$

$Q_2 \quad \to |Q_1 - Q_2|$

$Q_3 \quad \to |Q_3 - Q_2|$



$$\left|\int_a^b f - Q\right| < \varepsilon$$

Αν n τα αρχικά διαστήματα

τότε $x_i = a + ih_i$, $h_i = \frac{b-a}{n}$

$i = 0, \dots, n$

Τότε $\boxed{\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} f - Q_i\right| < \varepsilon \frac{h_i}{b-a}}$

γιατί τότε $\left|\int_a^b f - Q_i\right| < \sum_i \left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} f - Q_i\right| <$

$$\frac{\varepsilon}{b-a} \underbrace{\sum h_i} = \varepsilon$$

Χρησιμοποιώ τη μέθοδο του

Τραπεζίου. σε κάποιο διάστημα

$$\int^{x_{i+1}} f - Q_i = -\frac{h_i^3}{12} f''(\xi_i) \quad (\text{απλό τύπο})$$

$$\int_{x_i} f - Q_i = -\frac{h_i}{12} f(\xi_i) \quad (\text{απλό τύπο})$$

Με ένα επιπλέον σημείο ο σύνθετος τύπος του Τραπεζίου:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f - \hat{Q}_i = (x_{i+1} - x_i) \cdot \frac{\left(\frac{x_{i+1}-x_i}{2}\right)^2}{12} f''(\hat{\xi}_i) =$$

$$= \frac{h_i^3}{4 \cdot 12} f''(\hat{\xi}_i)$$

Αν υποθέσω ότι $[x_i, x_{i+1}]$ αρκετά μικρό ώστε η f'' να είναι σταθερή

άρα $f''(\xi_i) \cong f''(\hat{\xi}_i)$ τότε

$$\boxed{\int_{x_i}^{x_{i+1}} f - \hat{Q}_i = \frac{1}{4}\left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} f - Q_i\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f = \hat{Q}_i - \frac{1}{4} Q_i$$

$$\int^{x_{i+1}} f - Q_i < \frac{h_i}{b-a} \varepsilon$$

$$\int_{x_i} f - Q_i < \frac{i}{b-a} \varepsilon$$

$$\frac{4}{3}\left(\hat{Q}_i - \frac{1}{4}Q_i\right) - Q_i = \frac{4}{3}\hat{Q}_i - \frac{1}{3}Q_i - Q_i =$$

$$= \frac{4}{3}\left(\hat{Q}_i - Q_i\right) < \frac{h_i}{b-a}\varepsilon$$

θέλω να ισχύει

$$\boxed{\left|\hat{Q}_i - Q_i\right| < \frac{3}{4}\frac{h_i}{b-a}\varepsilon}$$

Differentiation(1)

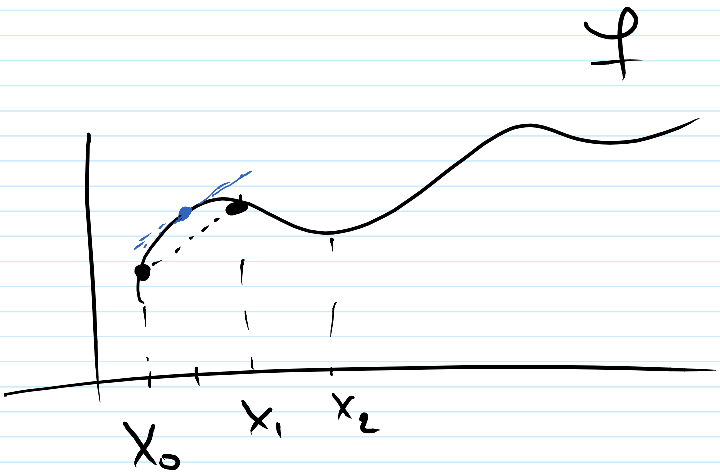
Τρίτη, 21 Απριλίου 2015 9:56 πμ

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$

f' , $\frac{df}{dx}$?

→ Πεπερασμένες διαφορές

→ Παραγώγιση παρεμβάλλουσα (splines)



$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \approx f'(x) + ?$$

$x \in (x_0, x_1)$

σφάλμα

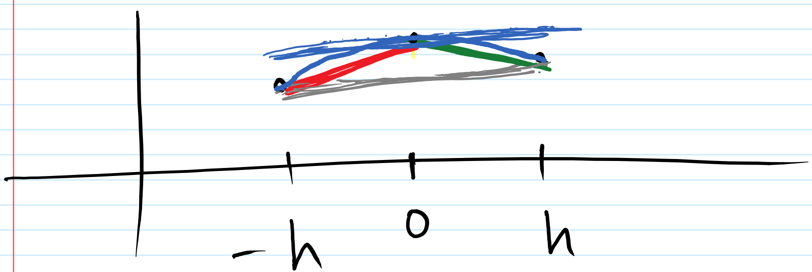
Ανάπτυγμα Taylor:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1} f'(\xi_x)$$

$x \to x_1$

$$\underset{\substack{\| \\ y_1}}{f(x_1)} = \underset{\substack{\| \\ y_0}}{f(x_0)} + \frac{x_1 - x_0}{1} f'(\xi_x)$$

$$\boxed{\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = f'(\xi_x)}$$



$f'(0) = ?$

Χρησιμοποιώντας το h:

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) \dots$$

Άρα στο h:

$$(*)\quad f(h) = f(0) + h f'(0) + \frac{h^2}{2} f''(0) + \dots$$

Τύπο της παραγώγου

$$\frac{h^2}{2} f''(\xi_h)$$

σφάλμα της προσέγγισης.

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = f'(0) + \frac{1}{h}\frac{h^2}{2} f''(\xi_h)$$

$$f'(0) = \frac{f(h) - f(0)}{h} + R$$

$$\overline{\qquad\qquad}_{h} + \ldots$$

όπου $\quad R = \frac{h}{2} f''(\xi_h)$

$$\|R\|_\infty < \frac{h}{2} \|f''\|_\infty$$

Όμοια στο $-h$

$$(**)\; \underbrace{f(-h) = f(0) + (-h) f'(0)}_{\text{τώρα}} + \underbrace{\frac{(-h)^2}{2} f''(0) + \cdots}_{\text{σφάλμα}}$$

$$\frac{f(0) - f(-h)}{h} = f'(0) + \frac{1}{h}\frac{h^2}{2} f''(\xi_h)$$

$$f'(0) = \frac{f(0) - f(-h)}{h} + R$$

$$\|R\|_\infty \leq \frac{h}{2} \|f''\|_\infty$$

αν λάβω υπόψιν και $h, -h$ τότε:

$$f(h) = f(0) + h f'(0) + \frac{h^2}{2} f''(0) + \frac{h^3}{3!} f'''(0) + \cdots$$

$$f(-h) = f(0) - h f'(0) + \frac{h^2}{2} f''(0) - \frac{h^3}{3!} f'''(0) + \cdots$$

γνωστά ?

Θέλω να απαλείψω περισσότερους όρους.

Αφαιρώ κατά μέλη.

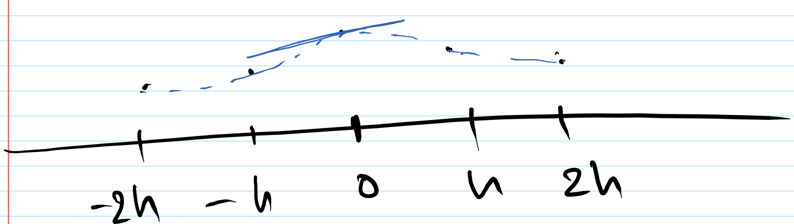
$$f(h) - f(-h) = \underbrace{2h f'(0)}_{\text{τύπο}} + \underbrace{2\frac{h^3}{3!} f'''(0) + 2\frac{h^5}{5!} f^{(5)}(0) + \dots}_{\text{σφάλμα}}$$

$$f'(0) = \frac{f(h) - f(-h)}{2h} + \frac{1}{2h}\, 2\frac{h^3}{3!} f'''(\xi)$$

$$f'(0) = \frac{f(h) - f(-h)}{2h}$$ με σφάλμα

$$R = \frac{h^2}{3!} f'''(\xi)$$

$$\|R\|_\infty \leq \frac{h^2}{3!} \|f'''\|_\infty$$



$$f'(0) = ?$$

$$f(h) = f(0) + h f'(0) + \frac{h^2}{2!} f''(0) + \frac{h^3}{3!} f'''(0) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(0) + \frac{h^5}{5!} f^{(5)}(0) + \dots$$

$$f(h) = f(0) + h f'(0) + \frac{h^2}{2} f''(0) + \frac{h^3}{3!} f'''(0) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(0) + \frac{h^5}{5!} f^{(5)}(0) + \dots$$

$$f(-h) = f(0) - h f'(0) + \frac{h^2}{2} f''(0) - \frac{h^3}{3!} f'''(0) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(0) + \frac{h^5}{5!} f^{(5)}(0) + \dots$$

$$f(2h) = f(0) + 2h f'(0) + \frac{(2h)^2}{2} f''(0) + \frac{(2h)^3}{3!} f'''(0) + \frac{(2h)^4}{4!} f^{(4)}(0) + \frac{(2h)^5}{5!} f^{(5)}(0) + \dots$$

$$f(-2h) = f(0) - 2h f'(0) + \frac{(2h)^2}{2} f''(0) + \dots$$

$1^\eta - 2^\eta$: (α): $f(h) - f(-h) = 2h f'(0) + \frac{2h^3}{3!} f'''(0) + \frac{2h^5}{5!} f^{(5)}(0) \dots$

$3^\eta - 4^\eta$: (β): $f(2h) - f(-2h) = 4h f'(0) + \frac{2 \cdot 8h^3}{3!} f'''(0) + 2\frac{32h^5}{5!} f^{(5)}(0) \dots$

$8(\alpha) - (\beta) =$

$$8f(h) - 8f(-h) - f(2h) + f(-2h) =$$

$$\underbrace{(8 \cdot 2 - 4)}_{12} h f'(0) + \underbrace{\cancel{(2 \cdot 8 - 2 \cdot 8) \frac{h^3}{3!} f'''(0)}}_{0} +$$

$$+ (2 \cdot 8 - 2 \cdot 32) \frac{h^5}{5!} f^{(5)}(0) + \dots$$

$$\boxed{f'(0) = \frac{f(-2h) - 8f(-h) + 8f(h) - f(2h)}{12 \cdot h} + R}$$

όπου $R = \frac{1}{\cancel{12} \cdot h} \overset{4}{\cancel{48}} \frac{h^{\overset{4}{\cancel{5}}}}{5!} f^{(5)}(0) + \dots$

όπου $R = \frac{1}{\cancel{12}\cdot h}\,\cancel{48}\,4\,\frac{h^{\cancel{5}\,4}}{5!} f^{(5)}(0) + \dots$

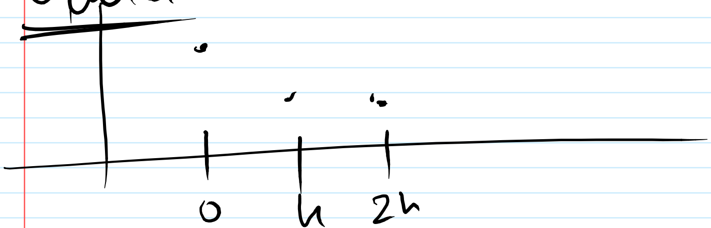
$$= \frac{4h^4}{5!} f^{(5)}(\xi)$$

Όμοια δουλεύουμε μεγαλύτερης τάξης παραγώγους:

$$f''(0) = \frac{f(-h) - 2f(0) + f(h)}{h^2} + O(h^2)$$

?

Όμοια:



$$f''(0) = ? + O(h^?)$$

0, h, 2h